

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 266–273
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 266–273
https://fizika.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1817-3020-2026-26-3-266-273, EDN: LMOZHH

Научная статья
УДК 517.927.4

Описание процессов затвердевания с постоянной скоростью посредством аналитического решения уравнений тепломассопереноса

Е. В. Маковеева✉, Д. В. Александров, А. А. Иванов, И. Е. Корозникова, И. В. Александрова, Л. В. Торопова

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, д. 4

Маковеева Евгения Васильевна, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории «Стохастический транспорт наночастиц в живом организме», e.v.makoveeva@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2499-3196, AuthorID: 1123241

Александров Дмитрий Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и математической физики, dmitri.alexandrov@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-6628-745X, AuthorID: 9528

Иванов Александр Андреевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории многомасштабного математического моделирования, alexandr.a.ivanov@bk.ru, https://orcid.org/0000-0002-2490-160X, AuthorID: 230886

Корозникова Ирина Евгеньевна, инженер-исследователь лаборатории «Стохастический транспорт наночастиц в живом организме», i.e.koroznikova@urfu.ru, https://orcid.org/0009-0006-3110-9203, AuthorID: 1271801

Александрова Ирина Владимировна, лаборант-исследователь лаборатории многомасштабного математического моделирования, irina.alexanderova@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9606-4759, AuthorID: 180725

Торопова Любовь Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и математической физики, l.v.toropova@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4587-2630

Аннотация. В работе рассматривается процесс затвердевания с постоянной скоростью бинарной жидкости при наличии двухфазного слоя между чисто твёрдой и жидкой фазами. Сформулирована нелинейная система уравнений, описывающая данный процесс при наличии конвективно-кондуктивного тепломассопереноса в жидкости. Построено аналитическое решение нелинейной задачи тепломассопереноса в параметрическом виде при наличии двух подвижных границ фазового превращения и учёте конвекции в жидкой фазе. Определены распределения температуры, концентрации растворённой примеси, доли твёрдой фазы, скорость движения двухфазного слоя и его протяжённость в зависимости от температурных/концентрационных градиентов и материальных параметров затвердевающего вещества. На основе построенного аналитического решения определены проницаемость двухфазного слоя и среднее междендритное расстояние в нём. Найденные решения демонстрируют, что учёт конвекции приводит к уменьшению скорости процесса затвердевания.

Ключевые слова: системы нелинейных уравнений, подвижные границы, точные аналитические решения, тепломассоперенос

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (тема № FEUZ-2026-0007).

© *Маковеева Е. В., Александров Д. В., Иванов А. А., Корозникова И. Е., Александрова И. В., Торопова Л. В., 2026*

Для цитирования: *Маковеева Е. В., Александров Д. В., Иванов А. А., Корозникова И. Е., Александрова И. В., Торопова Л. В.* Описание процессов затвердевания с постоянной скоростью посредством аналитического решения уравнений тепломассопереноса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2026. Т. 26, вып. 3. С. 266–273. https://doi.org/10.18500/1817-3020-2026-26-3-266-273, EDN: LMOZHH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Analytical solution of heat and mass transfer equations describing the solidification process with a constant velocity

E. V. Makoveeva✉, D. V. Alexandrov, A. A. Ivanov, I. E. Koroznikova, I. V. Alexandrova, L. V. Toropova

Ural Federal University, 4 Turgeneva St., Ekaterinburg 620000, Russia

Eugenya V. Makoveeva, e.v.makoveeva@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2499-3196, AuthorID: 1123241
Dmitri V. Alexandrov, dmitri.alexandrov@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-6628-745X, AuthorID: 9528
Alexander A. Ivanov, alexandr.a.ivanov@bk.ru, https://orcid.org/0000-0002-2490-160X, AuthorID: 230886
Irina E. Koroznikova, i.e.koroznikova@urfu.ru, https://orcid.org/0009-0006-3110-9203, AuthorID: 1271801
Irina V. Alexandrova, irina.alexanderova@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9606-4759, AuthorID: 180725
Lubov V. Toropova, l.v.toropova@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4587-2630

Abstract. ***Background and Objectives*:** This paper deals with the process of solidification of a binary liquid at a constant rate in the presence of a two-phase layer between the pure solid and liquid phases. A nonlinear system of equations describing this process is formulated, taking into account convective and conductive heat and mass transfer within the liquid. ***Materials and Methods:*** A non-linear mathematical model of heat and mass transfer equations in a two-phase system has been solved for a steady-state directed crystallization process by means of a transformation to a moving coordinate system. In the moving coordinate system, the problem is solved by introducing a new independent variable: the solid-phase fraction. ***Results*:** An analytical solution has been derived for a non-linear heat and mass transfer problem in parametric form, taking into account two moving phase transition boundaries and convection in the liquid phase. The distributions of temperature, impurity concentration, solid-phase fraction, the velocity of the two-phase layer and its length were determined as functions of temperature/concentration gradients and the material parameters of the solidifying substance. Based on the analytical solution derived, the permeability of the two-phase layer and the average interdendrite distance within it have been determined. The results have shown that taking convection into account leads to a reduction in the rate of solidification. ***Conclusion:*** The mathematical model developed and the parametric solutions derived on its basis make it possible to analytically describe the process of directional solidification (determine the distribution of temperature, impurity concentration, solid-phase portion, crystallization rate and the length of the two-phase layer), as well as to calculate the material's properties (its permeability and average interdendritic distance) in the presence of a conductive-convective heat and mass transfer mechanism.

Keywords: systems of non-linear equations, moving boundaries, exact analytical solutions, heat and mass transfer

Acknowledgements: This work was supported by of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Theme No. FEUZ-2026-0007).

For citation: Makoveeva E. V., Alexandrov D. V., Ivanov A. A., Koroznikova I. E., Alexandrova I. V., Toropova L. V. Analytical solution of heat and mass transfer equations describing the solidification process with a constant velocity. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2026, vol. 26, iss. 3, pp. 266–273 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1817-3020-2026-26-3-266-273, EDN: LMOZHH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Процессы направленного затвердевания в заданном тепловом и/или концентрационном поле определяют микроструктуру твёрдых материалов и описываются математической моделью Стефана с подвижной границей фазового превращения в переохлаждённых однокомпонентных и бинарных расплавах, а также растворах [1–6]. При этом координата и скорость движения межфазной границы заранее не известны и определяются из решения задачи, а на межфазной границе задаётся температура (в общем случае зависящая от её кривизны, концентрации растворённой примеси и кинетики присоединения атомов) и тепловой/массовый баланс, зависящий от скорости процесса затвердевания [6, 7]. Отметим, что точное решение нестационарной задачи Стефана не известно в силу смещения межфазной границы. Важно, что реальный процесс затвердевания связан с эффектом вытеснения примеси межфазной границей вглубь жидкости. Поэтому перед границей фазового перехода происходит накопление растворённой примеси и, как следствие, возникает концентрационный градиент. Когда концентрационный градиент, умноженный на коэффициент наклона ликвидус становится больше температурного градиента, то перед фронтом затвердевания возникает область концентрационного (конституционного) переохлаждения [7, 8].

Морфологические выступы межфазной границы, оказавшиеся в этой области, получают преимущество роста в охлаждённый расплав. Кроме этого, в области концентрационного переохлаждения может происходить нуклеация и объёмный

рост твёрдого вещества. В результате, переохлаждённая область становится заполненной твёрдой и жидкой фазами одновременно, а рост твёрдого вещества сопровождается выделением скрытой теплоты кристаллизации. Эта скрытая теплота частично/полностью компенсирует концентрационное переохлаждение [9–12]. В случае частичной компенсации, происходит затвердевание с неравновесной двухфазной областью, с возможностью нуклеации и роста частиц новой фазы перед затвердевшим материалом [13, 14]. В случае полной компенсации концентрационного переохлаждения имеет место квазиравновесное затвердевание [9–12].

Ранее было найдено точное аналитическое решение, описывающее процесс затвердевания с постоянной скоростью вдоль выделенного пространственного направления в квазиравновесном случае с кондуктивными условиями на границе «двухфазная область – жидкость» [15–17]. Отметим, что процесс затвердевания с постоянной скоростью реализуется при фиксированных температурных градиентах в твёрдой и жидкой фазах вблизи фронта затвердевания или двухфазной области (например, при вытягивании кристалла из расплава методом Чохральского).

В данной работе мы расширяем постановку задачи на учёт слабой конвекции в жидкости, которая приводит к конвективно-кондуктивным граничным условиям на межфазной границе [18, 19], и находим точное аналитическое решение конвективно-кондуктивной задачи, имеющее предельный переход к ранее полученным решениям без учёта конвекции [15–17].

1. Постановка задачи

Рассмотрим процесс направленного затвердевания бинарного расплава с постоянной скоростью v_s вдоль пространственной координаты x, вызванный фиксированными температурными градиентами $\frac{\partial T_s}{\partial x} = g_s$ и $\frac{\partial T_l}{\partial x} = g_l$ (T_s и T_l температура в твёрдой и жидкой фазах соответственно). Процесс считаем установившимися и разделённым на три части:

1) регион $x < v_s t$ заполнен только твёрдым материалом;
2) регион $v_s t < x < v_s t + \delta$ заполнен твёрдым и жидким материалом,
3) регион $x > v_s t + \delta$ заполнен только жидким материалом (t – временная переменная, δ – толщина двухфазного слоя). Перенос тепла и растворённой примеси в двухфазном слое описывается уравнениями теплопроводности и диффузии примеси:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + L_v\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,\ v_s t < x < v_s t + \delta, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-\phi)C\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(\phi)\frac{\partial C}{\partial x}\right) - k_e C\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad v_s t < x < v_s t + \delta, \quad (2)$$

где T, C и ϕ – температура, концентрация примеси и доля твёрдой фазы в двухфазном регионе соответственно, L_v – коэффициент скрытой теплоты, выделяющейся при фазовом превращении, k_e – равновесный коэффициент распределения примеси.

Коэффициенты теплопроводности $k(\phi)$ и диффузии примеси $D(\phi)$ в двухфазном слое зависят от доли твёрдой фазы ϕ и определяются по известному правилу смесей [6, 20] (диффузией примеси в твёрдой фазе пренебрегаем):

$$k(\phi) = k_s\phi + k_l(1-\phi),\ D(\phi) = D_l(1-\phi), \quad (3)$$

где k_s и k_l – коэффициенты теплопроводности в твёрдой и жидкой фазах, а D_l – коэффициент диффузии примеси в жидкости.

Температура и концентрация примеси в двухфазной области связаны соотношением, определяемым фазовой диаграммой бинарной системы (для простоты считаем эту зависимость линейной с коэффициентом m_e наклона линии ликвидус):

$$T = T_0 - m_e C,\ v_s t < x < v_s t + \delta, \quad (4)$$

где T_0 – температура фазового превращения чистого расплава.

Граничные условия на межфазной поверхности «твёрдый материал – двухфазный слой» имеют вид теплового и массового балансов:

$$k_s g_s - k(\phi_*)\frac{\partial T}{\partial x} = L_v(1-\phi_*)v_s,\ x = v_s t, \quad (5)$$

$$(1-k_e)(1-\phi_*)Cv_s + D(\phi_*)\frac{\partial C}{\partial x} = 0,\ x = v_s t, \quad (6)$$

где ϕ_* – значение доли твёрдой фазы на границе $x = v_s t$ (определяется из решения задачи).

Граничные условия на межфазной поверхности «двухфазный слой – жидкость» также имеют вид балансов тепла и массы [21]:

$$k(0)\frac{\partial T}{\partial x} = k_l g_l + \alpha_T \rho_l c_l v_*\left(T_\infty - T_\delta\right),\ x = v_s t + \delta, \quad (7)$$

$$D(0)\frac{\partial C}{\partial x} = D_l g_C + \alpha_C v_*\left(C_\infty - C_\delta\right),\ x = v_s t + \delta, \quad (8)$$

где α_T и α_C – коэффициенты конвективного тепло- и массообмена соответственно; ρ_l – плотность, c_l – удельная теплоёмкость жидкой фазы; v_* –



скорость трения на границе $x = v_s t + \delta$; T_δ – температура и C_δ – концентрация примеси на этой границе; $g_C = \frac{-g_l}{m_e}$ – градиент концентрации примеси на границе $x = v_s t + \delta$; T_∞ – температура и C_∞ – концентрация примеси в жидкости вдали от области фазового превращения. Отметим, что первые слагаемые в правых частях (7) и (8) представляют собой кондуктивные вклады в потоки тепла и массы, а вторые слагаемые в правых частях этих выражений – конвективные вклады в эти потоки.

2. Решение задачи в параметрическом виде

Для удобства решения задачи будем использовать безразмерные переменные:

$$\widetilde{x} = \frac{v_s}{D_l}(x - v_s t), \quad \widetilde{C} = \frac{C}{C_\infty}, \quad P = \frac{k_s m_e C_\infty}{L_v D_l}, \quad \widetilde{k}(\phi) = \frac{k(\phi)}{k_s}, \quad \widetilde{D}(\phi) = \frac{D(\phi)}{D_l}, \tag{9}$$

$$\widetilde{k}_1 = \frac{k_l}{k_s}, \ \widetilde{g}_l = \frac{g_l D_l}{m_e C_\infty v_s}, \ T_* = \frac{L_v v_s}{\alpha_T \rho_l c_l v_*}, \ \widetilde{\delta} = \frac{v_s}{D_l}\delta, \tag{10}$$

где знак тильда означает безразмерную величину.

Подставляя температуру T из уравнения (4) для линии ликвидус в уравнение теплопроводности (1) и интегрируя (1) с учётом граничных условий (5) и (7), найдем скорость процесса затвердевания v_s и концентрационный градиент в двухфазном слое:

$$v_s = \frac{k_s g_s - k_l g_l - \alpha_T \rho_l c_l v_* (T_\infty - T_\delta)}{L_v}, \tag{11}$$

$$\frac{d\widetilde{C}}{d\widetilde{x}} = -\frac{\phi + P\widetilde{g}_l\widetilde{k}_1 + \frac{(T_\infty - T_\delta)}{T_*}}{P\widetilde{k}(\phi)} = b(\phi), \tag{12}$$

где $T_\delta = T_0 - m_e C_\delta$ – температура на межфазной границе «двухфазный слой – жидкость». Отметим, что в отсутствие конвекции ($v_* = 0$) выражения (11) и (12) переходят в ранее найденные решения для чисто кондуктиввного механизма тепломассопереноса [15, 16]. Из (11) видно, что эффект конвекции проявляется в уменьшении скорости затвердевания v_s, поскольку $T_\infty > T_\delta$. Это вызвано тем обстоятельством, что результирующий тепловой поток в случае кондуктивно-конвективного теплопереноса имеет две составляющие $k_l g_l$ (кондуктивную) и $\alpha_T \rho_l c_l v_* (T_\infty - T_\delta)$ (конвективную) и увеличивается по сравнению с чисто кондуктивным случаем. Поэтому разность тепловых потоков, идущих в твёрдую и жидкую фазы на фронте затвердевания (числитель выражения (11)), уменьшается.

Перепишем теперь уравнение (2) диффузии примеси в двухфазном слое в безразмерных переменных (9) и (10):

$$\frac{d}{d\widetilde{x}}\left[(1-\phi)\widetilde{C} + \widetilde{D}(\phi)\frac{d\widetilde{C}}{d\widetilde{x}}\right] + k_e\widetilde{C}\frac{d\phi}{d\widetilde{x}} = 0, \ 0 < \widetilde{x} < \widetilde{\delta}. \tag{13}$$

Подставляя теперь сюда выражение для $\frac{d\widetilde{C}}{d\widetilde{x}}$ (12), преобразуем уравнение (13) к виду:

$$\frac{d}{d\phi}\left[(1-\phi)\widetilde{C} - M(\phi)\frac{\phi + P\widetilde{g}_l\widetilde{k}_1 + \frac{(T_\infty - T_\delta)}{T_*}}{P}\right] + k_e\widetilde{C} = 0, \quad 0 < \widetilde{x} < \widetilde{\delta}, \tag{14}$$

где $M(\phi) = \frac{\widetilde{D}(\phi)}{\widetilde{k}(\phi)}$. Уравнение (14) показывет, что концентрация примеси в двухфазном слое зависит только от доли твёрдой фазы ϕ.

Интегрируя уравнение (14) с учётом граничных условий (6) и (8), получаем концентрацию примеси:

$$\widetilde{C}(\phi) = (1-\phi)^{k_e - 1}\left(\widetilde{C}_\delta + I(\phi)\right), \quad 0 < \widetilde{x} < \widetilde{\delta}, \ 0 < \phi < \phi_*, \tag{15}$$

где

$$I(\phi) = P^{-1}\int_0^\phi (1-\varphi)^{-k_e}\left[M(\varphi) + \left(\varphi + P\widetilde{g}_l\widetilde{k}_1 + \frac{T_\infty - T_\delta}{T_*}\right)\frac{dM}{d\varphi}\right]d\varphi,$$

$$\widetilde{C}_\delta = \frac{T_0 - T_\delta}{m_e C_\infty}.$$

Уравнение (15) позволяет записать следующее соотношение между производными:

$$\frac{d\widetilde{x}}{d\phi} = \frac{\frac{d\widetilde{C}}{d\phi}}{\frac{d\widetilde{C}}{d\widetilde{x}}} = \widetilde{\nu}(\phi), \tag{16}$$

где $\frac{d\widetilde{C}}{d\phi}$ и $\frac{d\widetilde{C}}{d\widetilde{x}}$ зависят только от ϕ и определяются выражениями (15) и (12).

Интегрируя уравнение (16), находим зависимость безразмерной координаты от доли твёрдой фазы и безразмерную толщину двухфазного слоя:

$$\widetilde{x}(\phi) = \widetilde{\delta} + \int_0^\phi \widetilde{\nu}(\varphi)d\varphi, \ \widetilde{\delta} = -\int_0^{\phi_*}\widetilde{\nu}(\varphi)d\varphi, \tag{17}$$

где $\phi = \phi_*$ при $\widetilde{x} = 0$ и $\phi = 0$ при $\widetilde{x} = \widetilde{\delta}$. Отметим, что обратная функция к функции $\widetilde{x}(\phi)$ определяет распределение доли твёрдой фазы в двухфазном слое.

Граничные значения ϕ_* и $\widetilde{C}_\delta$ находятся из условий (6) и (8) и определяются уравнениями:

$$\widetilde{D}(\phi_*)\,b(\phi_*) + (1-k_e)(1-\phi_*)\widetilde{C}(\phi_*) = 0, \tag{18}$$

$$D_l g_C + \alpha_C v_* C_\infty \left(1 - \widetilde{C}_\delta\right) - b(0) C_\infty v_s = 0. \quad (19)$$

Найденное решение позволяет переписать выражения для скорости затвердевания и граничного значения концентрации примеси:

$$v_s = \frac{k_s g_s - k_l g_l}{L_v} + \frac{\alpha_T \rho_l c_l v_* (T_\infty - T_0 + m_e C_\infty)}{L_v (p m_e C_\infty - 1)}, \quad (20)$$

$$\widetilde{C}_\delta = \frac{1 + p(T_\infty - T_0)}{1 - p m_e C_\infty},\ p = \frac{\rho_l c_l \widetilde{\alpha}}{P \widetilde{k}_1 L_v},\ \widetilde{\alpha} = \frac{\alpha_T}{\alpha_C}. \quad (21)$$

Подставляя выражение для концентрации примеси (15) в уравнение (4), определяем температуру в двухфазном слое в зависимости от доли твёрдой фазы:

$$T(\phi) = T_0 - m_e C_\infty \widetilde{C}(\phi),\ 0 < \widetilde{x} < \widetilde{\delta},\ 0 < \phi < \phi_*. \quad (22)$$

Найденное решение задачи позволяет определить микроструктурные параметры материала – проницаемость $\Pi(\phi)$ двухфазного слоя и среднее междендритное расстояние λ_1 в виде [7, 22–25]:

$$\Pi(\phi) = \Pi_0 (1 - \phi)^3,\ \lambda_1 = \left(\frac{2\pi s D_l |\widetilde{\nu}(\phi_*)|}{w v_s}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

где $w = 1$ и $w = 0.86$ для кубической и гексагональной сингоний кристаллов, а s – характерный диаметр вершин дендритных кристаллов в двухфазном слое, определяемый критерием отбора их устойчивой моды роста [7]

$$\frac{2 d_0 \kappa_l}{s^2 v_s} = \sigma_* (s, v_s, v_*),\ \phi = \phi_*, \quad (24)$$

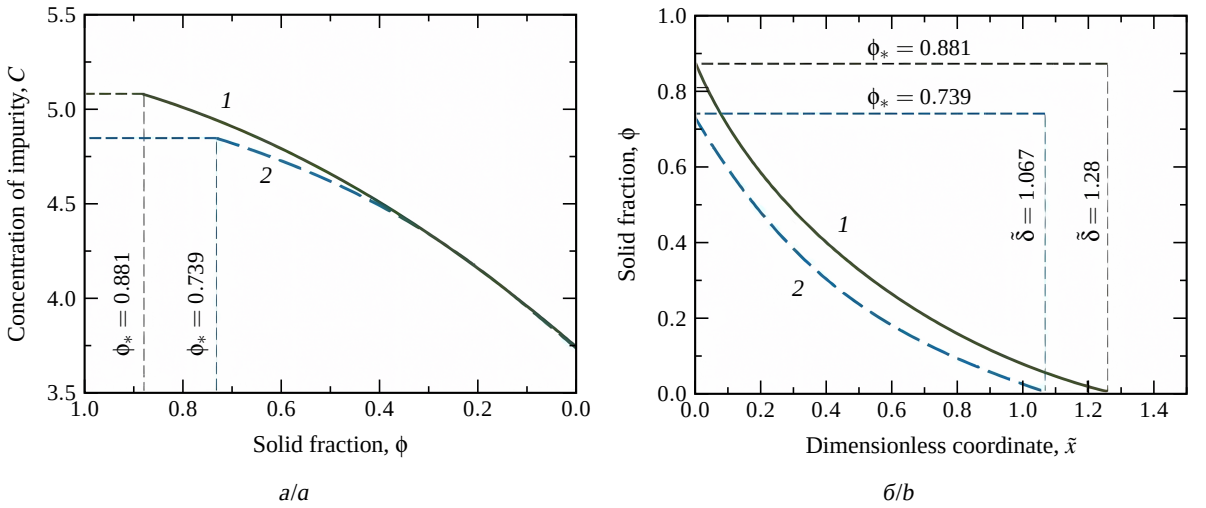
где d_0 – капиллярная константа, $\kappa_l = \frac{k_l}{(\rho_l c_l)}$ – коэффициент температуропроводности, а σ^* – функция s, v_s и v_*, приведенная в работе [7]. Критерий отбора (24) устойчивого роста дендритов является нелинейным уравнением для определения диаметра вершины дендрита s как функции от скорости затвердевания v_s и скорости трения v_*. Подставляя $s(v_s, v_*)$ в (23), получаем междендритное расстояние, как функцию от скорости затвердевания и скорости трения: $\lambda_1 = \lambda_1(v_s, v_*)$.

Таким образом, выражения (15)–(23) дают точное аналитическое решение задачи в параметрической форме (параметром является доля твёрдой фазы ϕ).

3. Поведение основных зависимостей

Аналитические решения (15)–(23) графически представлены на рис. 1 и 2 для железоникелевого расплава при различных значениях скорости трения v_*, которая определяет интенсивность конвективных составляющих теплового и концентрационного потоков у границы двухфазного слоя. Физические параметры материалы приведены в таблице на основе данных [15–17].

Как видно из рис. 1, *а*, концентрация примеси на границе с твёрдым материалом $\widetilde{C}(\phi_*)$ – самая высокая вследствие вытеснения примеси в жидкость (на границе с жидкой фазой, где $\phi = 0$, она определяется первой формулой (21)).



а/a *б/b*

Рис. 1. Концентрация примеси $\widetilde{C}$ (15) в двухфазном слое в зависимости от доли твёрдого материала ϕ (*а*). Доля твёрдого материала ϕ в двухфазном слое в зависимости от безразмерной координаты $\widetilde{x}$, согласно первой формуле (17) (*б*). Кривые *1* и *2* соответствуют различным значениям скорости трения: *1* – $v_* = 0.22 \cdot 10^{-3}$ м·с$^{-1}$, *2* – $v_* = 0.24 \cdot 10^{-3}$ м·с$^{-1}$

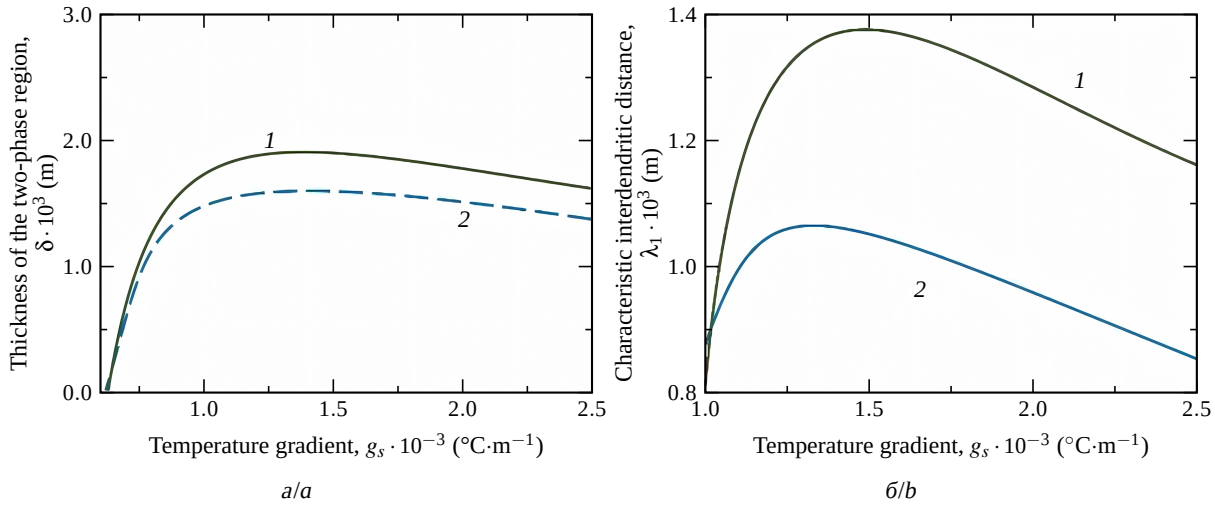
Fig. 1. Concentration of impurity $\widetilde{C}$ in the two-phase layer as a function of the fraction of solid material ϕ (15) (*a*). Fraction of solid material ϕ in the two-phase layer as a function of the dimensionless coordinate $\widetilde{x}$, according to the first formula (17) (*b*). The curves *1* and *2* correspond to different values of friction velocity: *1* – $v_* = 0.22 \cdot 10^{-3}$ m·s^{-1}, *2* – $v_* = 0.24 \cdot 10^{-3}$ m·s^{-1}

Физические параметры материалов [15–17]
Physical parameters of materials [15–17]

Параметр / Parameter	Материал / Material Значение параметра / Parameter value		
	Fe–Ni	Sn–5 мас.% Pb / Sn–5wt.% Pb	Sn–2.5 мас.% Pb / Sn–2.5wt.% Pb
T_0, °C	1529.5	505	505
L_v, Дж·м$^{-3}$ / J·m^{-3}	$1.583 \cdot 10^{10}$	$4.425 \cdot 10^{8}$	$4.425 \cdot 10^{8}$
ρ_l, кг·м$^{-3}$ / kg·m^{-3}	$7 \cdot 10^{3}$	7183	7092
c_l, Дж·кг$^{-1}\cdot$°C^{-1} / J·kg$^{-1}\cdot$°C^{-1}	426.36	253	256
D_l, м^2·с$^{-1}$ / m^2·s^{-1}	$5 \cdot 10^{-9}$	$4.5 \cdot 10^{-9}$	$4.5 \cdot 10^{-9}$
k_s, Дж·м$^{-1}$·с$^{-1}\cdot$°C^{-1} / J·m^{-1}·s$^{-1}\cdot$°C^{-1}	73.986	65	66
k_l, Дж·м$^{-1}$·с$^{-1}\cdot$°C^{-1} / J·m^{-1}·s$^{-1}\cdot$°C^{-1}	41.8	33	33
k_e	0.68	0.0656	0.0656
m_e, °C·мас.%$^{-1}$ / °C·wt.%$^{-1}$	2.65	2.2	2.2
g_s, °C·м$^{-1}$ / °C·m^{-1}	10^3	90	90
g_l, °C·м$^{-1}$ / °C·m^{-1}	10^2	20	20
T_∞, °C	1700	750	750
C_∞, мас.% / wt.%	0.3	5	2.5
α_T	0.097	0.03	0.03
$\widetilde{\alpha}$	35	70	70

При этом увеличение скорости трения v_* приводит к более низкой концентрации в двухфазном слое. Из рис. 1, *б* видно, что толщина $\widetilde{\delta}$ самого слоя и содержание твёрдой фазы ϕ в нём при этом уменьшаются. Также отметим, что проницаемость П двухфазного слоя увеличивается с ростом v_*, согласно первой формуле (23).

Из рис. 2, *а* и 2, *б* следует, что толщина $\widetilde{\delta}$ двухфазного слоя и характерное междендритное расстояние λ_1 немонотонно зависят от темпера-



а/*a* *б*/*b*

Рис. 2. Толщина δ двухфазного слоя в зависимости от градиента температуры g_s в твёрдой фазе, согласно второй формуле (17) (*а*). Характерное междендритное расстояние λ_1 в двухфазном слое в зависимости от градиента температуры g_s в твёрдой фазе, согласно второй формуле (23) (*б*). Кривые *1* и *2* соответствуют различным значениям скорости трения: *1* – $v_* = 0.22 \cdot 10^{-3}$ м·с$^{-1}$, *2* – $v_* = 0.24 \cdot 10^{-3}$ м·с$^{-1}$

Fig. 2. Thickness δ of the two-phase layer as a function of the temperature gradient g_s in the solid phase, according to the second formula (17) (*a*). Characteristic dendritic distance λ_1 in the two-phase layer as a function of the temperature gradient g_s in the solid phase, according to the second formula (23) (*b*). The curves *1* and *2* correspond to different values of friction velocity: *1* – $v_* = 0.22 \cdot 10^{-3}$ m·s^{-1}, *2* – $v_* = 0.24 \cdot 10^{-3}$ m·s^{-1}

турного градиента g_s в твёрдом материале. При этом с увеличением скорости трения уменьшается λ_1, что соответствует более узкому двухфазному слою.

На рис. 3 представлена зависимость междендритного расстояния от скорости кристаллизации в соответствии со второй формулой (23).

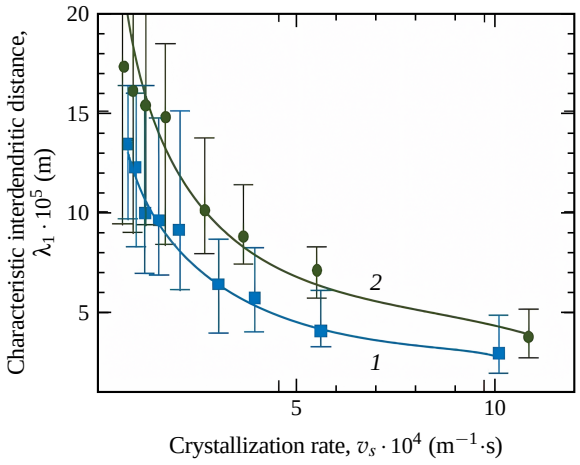


Рис. 3. Среднее междендритное расстояние λ_1 в зависимости от скорости кристаллизации v_s, согласно теоретической формуле (23): *1* – линия для Sn – 5 мас.% Pb ($C_\infty = 5$ мас%), *2* – линия для Sn – 2.5 мас.% Pb ($C_\infty = 2.5$ мас.%) (сравнивается с экспериментальными данными для расплавов Sn – Pb [26]). Скорость трения: $v_* = 0.7 \cdot 10^{-3}$ м·с$^{-1}$

Fig. 3 Average dendritic depending λ_1 depends on the crystallization rate v_s, according to (23): *1* – line for Sn – 5wt%Pb ($C_\infty = 5$ wt.%), *2* – green line for Sn–2.5wt% Pb ($C_\infty = 2.5$ wt.%). It is compared with experimental data for Sn – Pb melts [26]. Friction velocity: $v_* = 0.7 \cdot 10^{-3}$ m·s^{-1}

На графике представлены два эксперимента с бинарными расплавами. Отметим, что с ростом скорости затвердевания междендритное расстояние уменьшается. Экспериментальные данные, отмеченные квадратами, отвечают расплаву Sn – 5 мас.% Pb, а отмеченные кругами – расплаву Sn – 2.5 мас.% Pb. Все кривые лежат в рамках экспериментальных данных и согласуются с учетом погрешности эксперимента.

Заключение

В настоящей работе сформулирована нелинейная системы уравнений и граничных условий, описывающая процесс тепломассопереноса при затвердевании бинарной жидкости с двухфазным слоем с учётом конвекции в жидкости. Уравнения тепломассопереноса в двухфазном слое учитывают, что распространение тепла происходит, как по твёрдой фазе с долей ϕ, так и по жидкой фазе с долей $1 - \phi$, а диффузия примеси происходит лишь по жидкости. Это учитывается зависящими от ϕ коэффициентами теплопроводности и диффузии примеси (диффузией примеси по твёрдому материалу традиционно пренебрегается). Модель учитывает, что температура и концентрация примеси в двухфазном слое фазового превращения связаны материальным уравнением ликвидуса, определяемым фазовой диаграммой бинарной жидкости. Процесс направленного затвердевания рассматривается в установившемся режиме при заданных температурных/концентрационных градиентах в чисто твёрдой и жидкой фазах. С учётом этого обстоятельства сформулированы граничные условия на межфазных границах «твёрдый материал – двухфазный слой» и «двухфазный слой – жидкость». Граничные условия учитывают, что жидкая фаза может находиться в условиях конвекции, что приводит к кондуктивной и конвективной составляющим теплового и массового потоков. Для удобства решения задачи введены безразмерные переменные и параметры. Построено аналитическое решение сформулированной нелинейной задачи в параметрическом виде (параметром является доля твёрдой фазы ϕ в двухфазном слое). Найдены температура, концентрация растворённой примеси и координата в зависимости от ϕ; определены скорость процесса затвердевания и протяжённость двухфазного слоя в зависимости от операционных и материальных параметров системы.

В будущем представляется важным расширить рассматриваемую модель на случай нестационарного процесса направленного затвердевания бинарной системы в условиях кондуктивно-конвективного тепломассопереноса в жидкости (например, в условиях затвердевания от охлаждаемой стенки [6]).

Список литературы / References

1. Kurz W., Rappaz M., Trivedi R. Progress in modelling solidification microstructures in metals and alloys. Part II: Dendrites from 2001 to 2018. *International Materials Reviews*, 2021, vol. 66, pp. 30–76. https://doi.org/10.1080/09506608.2020.1757894
2. Galenko P. K. Convection effect on solidification microstructure: Dendritic arm spacing and microsegregation. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2023, vol. 232, pp. 1261–1271. https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-023-00860-2
3. Burago N. G., Fedyushkin A. I. Numerical solution of the Stefan problem. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1809, art. 012002. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1809/1/012002
4. Dokoza T., Plümacher D., Smuda M., Jegust C., Oberlack M. Solution to the 1D Stefan problem using the

unified transform method. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2021, vol. 54, no. 37, art. 375203. https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac1b79

5. Panov E. Y. Self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem on the half-line. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2024, vol. 70, no. 3, pp. 441–450 (in Russian). https://10.22363/2413-3639-2024-70-3-441-450
6. Nizovtseva I., Ankudinov V., Rahner E., Lippmann S. Climate related phase transitions with moving boundaries by virtue of mushy zone investigation in Al–Cu: Experiment and phase-field modeling. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2024, vol. 47, iss. 8, pp. 6853–6867. https://doi.org/10.1002/mma.9901
7. Alexandrov D. V., Galenko P. K. Dendrite growth under forced convection: Analysis methods and experimental tests. *Physics-Uspekhi*, 2014, vol. 57, no. 8, pp. 771–786. https://doi.org/10.3367/UFNe.0184.201408b.0833
8. Yan J., Liu T., Wang M., Sun J., Dong S., Zhao L., Wang Q. Constitutional supercooling and corresponding microstructure transition triggered by high magnetic field gradient during directional solidification of Al-Fe eutectic alloy. *Materials Characterization*, 2022, vol. 188, art. 111920. https://doi.org/10.1016/j.matchar.2022.111920
9. Borisov V. T. *Teoriya dvukhfaznoi zony metallicheskogo slitka* [Theory of Two-Phase Zone of a Metal Ingot]. Moscow, Metallurgiya, 1987. 222 p. (in Russian).
10. Hills R. N., Loper D. E., Roberts P. H. A thermodynamically consistent model of a mushy zone. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1983, vol. 36, iss. 4, pp. 505–540. https://doi.org/10.1093/qjmam/36.4.505
11. Fowler A. C. The formation of freckles in binary alloys. *IMA J. Appl. Math.*, 1985, vol. 35, iss. 2, pp. 159–174. https://doi.org/10.1093/imamat/35.2.159
12. Buyevich Y. A., Iskakova L. Y., Mansurov V. V. The nonlinear dynamics of solidification of a binary melt with a quasi-equilibrium mushy region. *Can. J. Phys.*, 1990, vol. 68, pp. 790–793. https://doi.org/10.1139/p90-115
13. Mansurov V. V. The nonlinear dynamics of solidification of a binary melt with a nonequilibrium mushy region. *Math. Comp. Model.*, 1990, vol. 14, pp. 819–821. https://doi.org/10.1016/0895-7177(90)90296-Y
14. Alexandrov D. V., Makoveeva E. V., Glebova A. E., Toropova L. V. Mathematical modeling of measured recalescence velocities. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2026, vol. 49, iss. 2, pp. 977–988. https://doi.org/10.1002/mma.70204
15. Makoveeva E. V., Koroznikova I. E., Glebova A. E., Ivanov A. A., Alexandrova I. V., Bulycheva S. V., Alexandrov D. V., Toropova L. V. Towards a theory of steady-state solidification process with a quasi-equilibrium two-phase region. *The European Physical Journal Special Topics*, 2024, vol. 233, pp. 3289–3297. https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-024-01362-5
16. Alexandrov D. V. Solidification with a quasiequilibrium two-phase zone. *Acta Materialia*, 2001, vol. 49, iss. 5, pp. 759–764. https://doi.org/10.1016/S1359-6454(00)00388-8
17. Nizovtseva I. Models of transport processes and structural transitions on the basis of equilibrium multi-component zone. *Advanced Studies in Theoretical Physics*, 2015, vol. 9, no. 12, pp. 559–564. https://doi.org/10.12988/astp.2015.5778
18. Kaviany M. *Principles of Convective Heat Transfer*. Berlin, Springer-Verlag, 2001. XXVI+709 p.
19. Kaviany M. *Principles of Heat Transfer.* New York, John Wiley and Sons, 2002. 973 p.
20. Batchelor G. K. Transport properties of two-phase materials with random structure. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1974, vol. 6, pp. 227–255. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.06.010174.001303
21. Makoveeva E. V., Alexandrov D. V., Galenko P. K. The impact of convection on morphological instability of a planar crystallization front. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 2023, vol. 217, art. 124654. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124654
22. Worster M. G. Instabilities of the liquid and mushy regions during solidification of alloys. *J. Fluid Mech.*, 1992, vol. 237, pp. 649–669. https://doi.org/10.1017/S0022112092003562
23. Schulze T. P., Worster M. G. A numerical investigation of steady convection in mushy layers during the directional solidification of binary alloys. *J. Fluid Mech.*, 1998, vol. 356, pp. 199–220. https://doi.org/10.1017/S0022112097007878
24. Notz D., Worster M. G. A one-dimensional enthalpy model of sea ice. *Ann. Glaciol.*, 2006, vol. 44, pp. 123–128. https://doi.org/10.3189/172756406781811196
25. Deguen R., Alboussiere T., Brito D. On the existence and structure of a mush at the inner core boundary of the Earth. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 2007, vol. 164, iss. 1–2, pp. 36–49. https://doi.org/10.1016/j.pepi.2007.05.003
26. Rocha O. L., Siqueira C. A., Garcia A. Cellular/dendritic transition during unsteady-state unidirectional solidification of Sn–Pb alloys. *Materials Science and Engineering: A.* 2003, vol. 347, iss. 1–2, pp. 59–69. https://doi.org/10.1016/S0921-5093(02)00581-6

Поступила в редакцию 14.04.2026; одобрена после рецензирования 02.06.2026;
принята к публикации 17.06.2026; опубликована 30.09.2026

The article was submitted 14.04.2026; approved after reviewing 02.06.2026;
accepted for publication 17.06.2026; published 30.09.2026