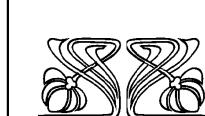
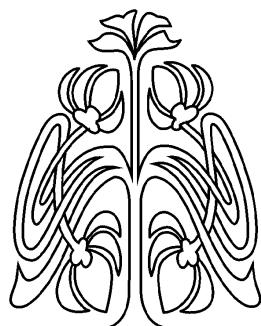
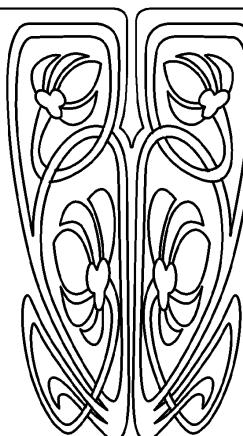


# РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 408–413

*Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 408–413

<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-4-408-413>, EDN: GQHDTE

Научная статья

УДК 517.9

## Об особенностях применения метода вспомогательной системы при диагностике режима обобщенной хаотической синхронизации

П. П. Губенко, А. А. Короновский, О. И. Москаленко✉

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Губенко Павел Петрович, студент 1-го курса магистратуры Института физики, pasha.220902@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0003-4012-1878>

Короновский Алексей Александрович, доктор физико-математических наук, проректор по научной работе и цифровому развитию, заведующий кафедрой физики открытых систем, [alexey.koronovskii@sgu.ru](mailto:alexey.koronovskii@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3585-317X>, AuthorID: 73470

Москаленко Ольга Игоревна, доктор физико-математических наук, начальник управления научной деятельности, профессор кафедры физики открытых систем, [o.i.moskalenko@gmail.com](mailto:o.i.moskalenko@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-5727-5169>, AuthorID: 150252

**Аннотация.** Рассматриваются особенности применения метода вспомогательной системы, проявляющиеся при диагностике режима обобщенной хаотической синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, обладающих внутренней симметрией. Учитывая, что симметрия динамики автономной ведомой системы при наличии воздействия со стороны ведущего осциллятора может приводить к появлению мультистабильности, корректное определение обобщенной синхронизации с помощью метода вспомогательной системы может быть затруднено. Предлагается модификация критерия обобщенной синхронизации, которая позволяет повысить надежность метода в подобных случаях.

**Ключевые слова:** обобщенная синхронизация, метод вспомогательной системы, симметрическая топология аттрактора, отображение, мультистабильность

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (соглашение 075-02-2025-1635 от 27 февраля 2025 г.).

**Для цитирования:** Губенко П. П., Короновский А. А., Москаленко О. И. Об особенностях применения метода вспомогательной системы при диагностике режима обобщенной хаотической синхронизации // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 4. С. 408–413. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-4-408-413>, EDN: GQHDTE

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

**On peculiarities of application of the auxiliary system approach for the generalized chaotic synchronization regime detection**

P. P. Gubenko, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia



Pavel P. Gubenko, pasha.220902@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0003-4012-1878>  
Aleksei A. Koronovskii, alexey.koronovskii@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3585-317X>, AuthorID: 73470  
Ol'ga I. Moskalenko, o.i.moskalenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5727-5169>, AuthorID: 150252

**Abstract.** *Background and Objectives:* In this paper we consider the peculiarity that arises during the generalized chaotic synchronization regime detection in systems with a complex attractor topology having internal symmetry. *Materials and Methods:* As the system under study we consider two modified Guckenheimer – Holmes discrete maps coupled unidirectionally. To detect the presence of generalized synchronization we calculate the spectrum of Lyapunov exponents and propose the modification of auxiliary system approach. *Results:* Considering that the symmetry in the dynamics of the autonomous response system can lead to multistability due to the drive system signal, the correct detection of generalized synchronization with the help of the auxiliary system approach may be complicated. Modification of the generalized synchronization criterion, which allows increasing the reliability of the method in such cases, has been proposed. *Conclusion:* The results obtained with the help of modified auxiliary system approach are in a good agreement with the calculation of Lyapunov exponents.

**Keywords:** generalized synchronization, auxiliary system approach, symmetric attractor topology, discrete map, multistability

**Acknowledgements:** This work was supported by the Regional Scientific and Educational Mathematical Center "Mathematics of Future Technologies" (Agreement no. 075-02-2025-1635, February 27, 2025).

**For citation:** Gubenko P. P., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I. On peculiarities of application of the auxiliary system approach for the generalized chaotic synchronization regime detection. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2025, vol. 25, iss. 4, pp. 408–413 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-4-408-413>, EDN: GQHDTE

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Известно, что взаимодействующие хаотические системы демонстрируют явление хаотической синхронизации, которая может быть различных типов [1, 2]. Значительный интерес вызывает обобщенная хаотическая синхронизация [3], когда между состояниями взаимодействующих систем устанавливается функциональная зависимость (но при этом сами состояния систем оказываются различными), а также перемежающееся поведение, наблюдающееся вблизи границы установления этого синхронного режима [4].

В последнее время обобщённая хаотическая синхронизация привлекает внимание не только с фундаментальной точки зрения, но и благодаря своим прикладным перспективам: от безопасной передачи информации в телекоммуникациях [5] до моделирования и изучения динамики отдельных нейронов и нейронных сетей и машинного обучения [6, 7].

Для детектирования и анализа явления обобщенной хаотической синхронизации апробированы и хорошо себя зарекомендовали такие методы, как метод вспомогательной системы [8], расчёт показателей Ляпунова [9, 10], метод ближайших соседей [3, 11] и др. Среди названных методов метод вспомогательной системы заслуживает особого внимания благодаря своей простоте, наглядности и универсальности. Он легко реализуем, применим для анализа синхронизма в любой момент времени, и, следовательно, в отличие от других методов его можно с успехом использовать для выделения синхронных и асинхронных фаз в режиме перемежающейся обобщенной хаотической синхронизации. Фактически метод вспомогательной системы является универсальным общепризнан-

ным стандартом при изучении обобщенной хаотической синхронизации и связанных с ней эффектов. Выявленным на сегодняшний день ограничением для использования метода является его неприменимость в системах с взаимной связью [12], в том числе, когда это связь между отдельными колебательными системами реализуется опосредованно, например, в сетях со сложной топологией связей.

Ниже будет показано, что использование метода вспомогательной системы может приводить к особенностям поведения ведомых многомерных динамических систем, обладающих в автономном режиме внутренней симметрией хаотического аттрактора. Это связано с тем, что подобная симметрия при наличии внешнего воздействия со стороны ведущего осциллятора может приводить к появлению мультистабильности в совместной динамике рассматриваемых систем, и при условии, что такие мультистабильные состояния оказываются устойчивыми с точки зрения критерия обобщенной синхронизации, в системе может возникнуть режим мультистабильной обобщенной хаотической синхронизации. Похожая ситуация была впервые описана в работе [13] и, чуть позже, в [14], при исследовании синхронизации идентичных хаотических осцилляторов с непрерывным временем, обладающих внутренней симметрией и связанных по классической схеме [15], предложенной Л. М. Пекорой и Т. Л. Кэроллом. В рассматриваемых случаях при одних и тех же значениях управляющих параметров наряду с режимом идентичной (полней) синхронизации наблюдались один или несколько других синхронных режимов, диагностированных как режимы обобщенной синхронизации. В литературе было также описано возникновение режима биста-



бильной обобщенной хаотической синхронизации при воздействии осциллятора Ресслера на систему Лоренца [16]. Наличие же мультистабильности, как известно из [8], может приводить к некорректной интерпретации результатов, полученных с помощью метода вспомогательной системы, если ведомая и вспомогательная системы стартуют из начальных условий, принадлежащих бассейнам притяжения разных аттракторов. При этом границы бассейнов притяжения в фазовом пространстве могут быть устроены весьма сложно и иметь фрактальную границу [13, 17].

В работе рассматривается, к каким нежелательным последствиям может приводить внутренняя симметрия ведомой системы при использовании метода вспомогательной системы, а также предлагается способ модификации метода детектирования обобщенной синхронизации для таких случаев. Выявленные особенности метода вспомогательной системы иллюстрируются на модельном примере систем с дискретным временем – двух связанных односторонней связью модифицированных отображений Гукенхаймера – Холмса [18] с различными значениями параметров, описываемых системой уравнений:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(b, x_n, y_n) = by_n^2 - x_n, \\y_{n+1} &= g(a, x_n, y_n) = ay_n(1 - x_n), \\x'_{n+1} &= f(b', x'_n, y'_n) + \epsilon(f(b_d, x_n, y_n) - f(b', x'_n, y'_n)), \\y'_{n+1} &= g(a', x'_n, y'_n).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $x, y$  – координаты динамической системы,  $a, b$  – управляющие параметры,  $\epsilon$  – параметр связи. Величины без штрихов относятся к ведущей системе, штрихованные величины характеризуют

ведомую систему. Значения управляющих параметров были выбраны такими, что и ведущая, и ведомая системы характеризуются двулистной структурой хаотического аттрактора (рис. 1), симметричной относительно оси координат  $x$  или  $x'$  соответственно.

Как известно, суть метода вспомогательной системы [8] заключается в одновременном рассмотрении, наряду с динамикой ведущей и ведомой систем, поведения вспомогательной системы, которая идентична ведомой, но стартует с других начальных условий (принадлежащих тому же бассейну притяжения). Можно использовать и набор таких систем [19]. В случае, когда в исследуемой системе наблюдается режим обобщенной хаотической синхронизации, после завершения переходного процесса состояния ведомой  $(x'_n, y'_n)$  и вспомогательной  $(x''_n, y''_n)$  систем становятся идентичными, и, соответственно, величина, трактуемая как расстояние между ними (мера), оказывается равной нулю во все моменты времени наблюдения.

При значениях параметра связи  $\epsilon$  меньше критического  $\epsilon_c$ , соответствующего порогу установления синхронного режима, (в том числе и в случае режима перемежающейся обобщенной хаотической синхронизации [20]) существуют моменты времени, в которые состояния ведомой и вспомогательной систем не совпадают, а средняя мера отличия этих состояний, определяемая на конечной временной реализации длины  $N$  как

$$D(\epsilon) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N |x'_i(\epsilon) - x''_i(\epsilon)| + |y'_i - y''_i|,\tag{2}$$

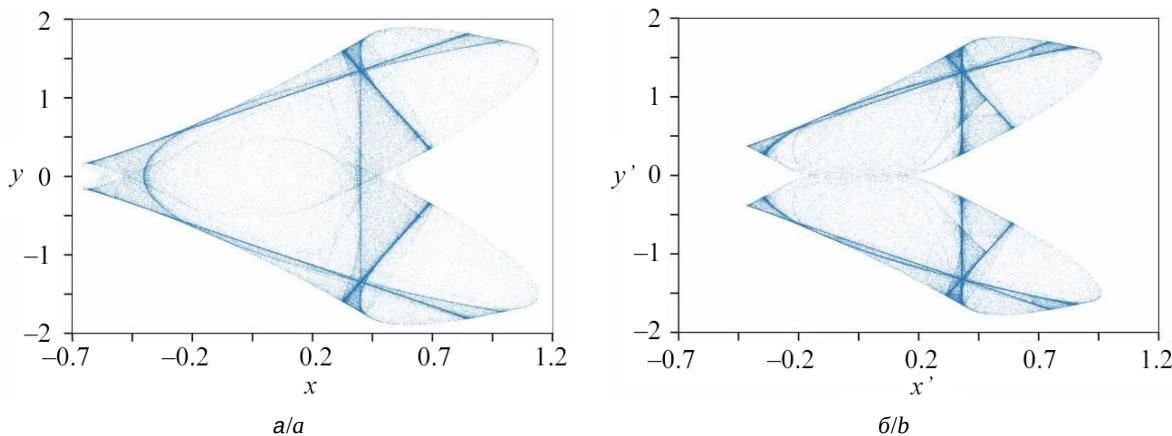


Рис. 1. Фазовые портреты для автономных ведущей (а) и вспомогательной (б) систем ( $a = 1.815, a' = 1.775, b = b' = 0.5, \epsilon = 0$ )

Fig. 1. Phase portraits for autonomous drive (a) and auxiliary (b) systems ( $a = 1.815, a' = 1.775, b = b' = 0.5, \epsilon = 0$ )



принимает положительное значение. Значение параметра связи  $\varepsilon$ , при котором величина  $D(\varepsilon)$  оказывается равной нулю, и является критическим значением  $\varepsilon$  для параметра связи  $\varepsilon$ .

Как правило, критическое значение параметра связи  $\varepsilon$ , понимаемое в указанном смысле, оказывается близким к значению, при котором старший положительный показатель Ляпунова управляемой (ведомой) системы становится отрицательным [8, 10]. (Соответственно, переход старшего условного показателя Ляпунова от положительных значений к отрицательным часто используется в качестве критерия установления режима обобщенной хаотической синхронизации).

Однако для исследуемой системы (1) величина  $D(\varepsilon)$  может значительно отличаться от нуля даже для значений параметра связи  $\varepsilon > \varepsilon_{GS} = 0.645$ , при которых старший показатель Ляпунова ведомой системы (показатель  $\Lambda_2$  на рис. 2, б) оказывается существенно отрицательным при выбранных значениях управляющих параметров. Это означа-

ет, что в анализируемой системе (1) для значений параметра связи, при которых с помощью метода расчета спектра показателей Ляпунова однозначно диагностируется наличие режима обобщенной хаотической синхронизации, метод вспомогательной системы дает существенно противоречивые результаты (рис. 2, а), зависящие от начальных условий ведомой и вспомогательной систем.

Как следует из результатов проведенных исследований, подобная особенность метода вспомогательной системы обусловлена возникающей бистабильностью, связанной с внутренней симметрией ведомой системы, в силу которой поведение рассматриваемых связанных осцилляторов оказывается идентичным с точностью до замены переменной  $y'$  на  $(-y')$ , и, соответственно, такая замена не влияет на оператор эволюции ведомой системы. Именно бистабильность, возникающая при наличии воздействия со стороны ведущей системы, в силу внутренней симметрии ведомой системы приводит к противоречивым результатам диагностирования режима обобщенной

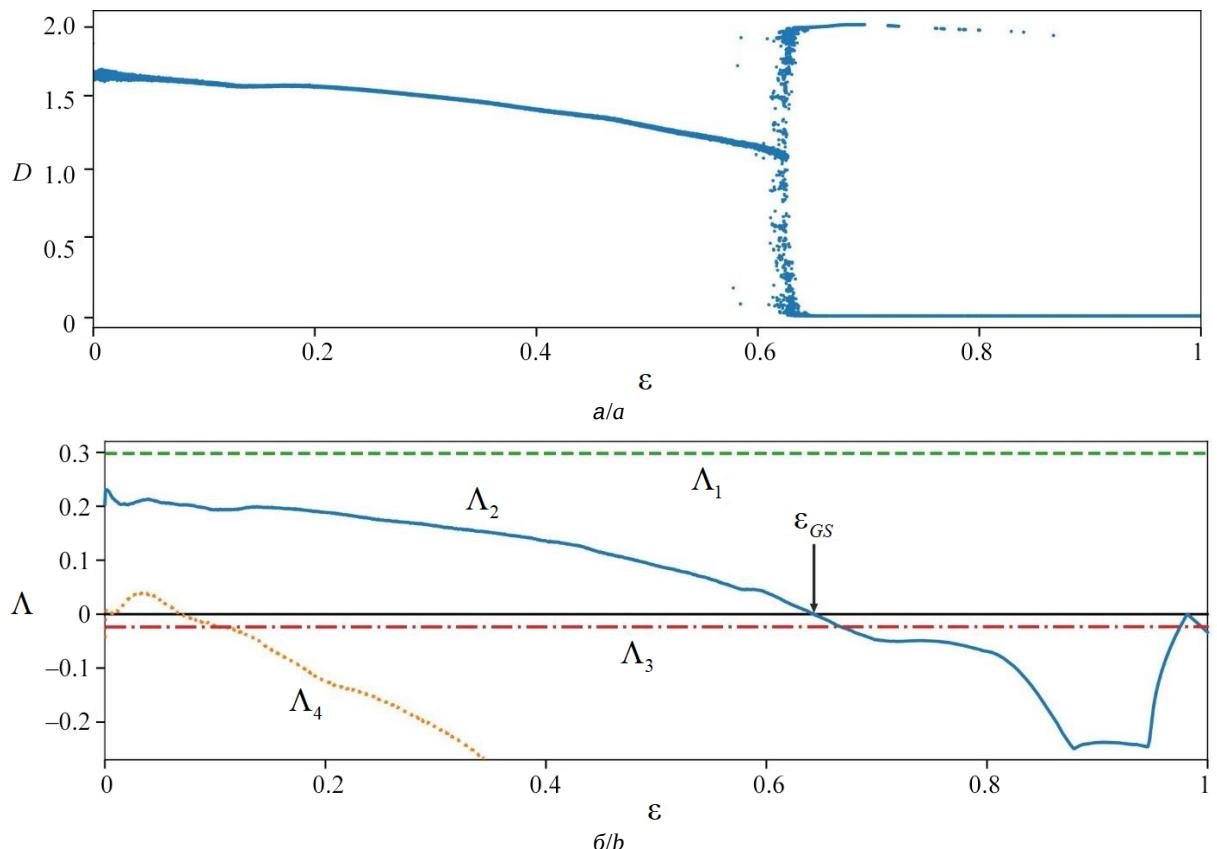


Рис. 2. Зависимости: средней меры между состояниями ведомой и вспомогательной систем  $D(\varepsilon)$  (а) и четырех показателей Ляпунова для исследуемой системы (1) от величины параметра связи  $\varepsilon$  (б)

Fig. 2. Dependencies of the average measure between states of the response and auxiliary systems  $D(\varepsilon)$  (a) and four Lyapunov exponents of the system under study (1) on the coupling parameter  $\varepsilon$  (b)



хаотической синхронизации с помощью метода вспомогательной системы.

Как следствие бистабильности, в режиме обобщенной хаотической синхронизации, когда собственная динамика ведомой системы оказывается подавленной за счет воздействия со стороны ведущей системы [21], у ведомой системы при одних и тех же значениях управляющих параметров и одном и том же состоянии ведущей системы существуют два симметричных состояния (отличающихся только знаком переменной  $y'$ ), в которых она может находиться. Иными словами, для поведения ведомой системы (а, соответственно, и вспомогательной) в этом случае оказывается характерна бистабильность. Соответственно, если ведомая и вспомогательная системы находятся в одинаковых состояниях ( $y'y'' > 0$ ), то величина  $D(\epsilon)$  равна нулю и метод вспомогательной системы диагностирует синхронный режим. Наоборот,  $D(\epsilon)$  сильно отличается от нуля, когда ведомая и вспомогательная системы находятся в разных состояниях ( $y'y'' < 0$ ) и в этом случае, несмотря на наличие обобщенной синхронизации, метод вспомогательной системы будет показывать отсутствие синхронизма.

Метод вспомогательной системы за долгие годы применения из-за его уже называвшихся достоинств стал весьма популярным при изучении обобщенной хаотической синхронизации. Часто исследователи ограничиваются только им, не применяя другие, более сложные в реализации методы. Можно отметить, что подобный подход в подавляющем большинстве случаев оказывается полностью оправданным, но, как видно из вышеприведенных данных, в случаях, когда ведомая система обладает внутренней симметрией (как рассматривалось вы-

ше) мультистабильность, обусловленная этой симметрией, может сыграть с исследователями злую шутку – метод вспомогательной системы будет детектировать асинхронную динамику, несмотря на установление режима обобщенной хаотической синхронизации. Следует отметить, что ситуация будет осложнена также ещё и тем, что возникающая из-за внутренней системы мультистабильность (бистабильность в рассмотренном случае) оказывается выражена не очень явно – аттрактор ведомой системы при этом не претерпевает каких-либо ярко выраженных качественных изменений, которые могли бы навести на мысль о том, что в системе имеет место мультистабильность.

Очевидно, что такую особенность метода вспомогательной системы следует учитывать при изучении режима обобщенной хаотической синхронизации и перемежающейся обобщенной хаотической синхронизации. В подобных случаях, когда ведомая система характеризуется такой внутренней симметрией, следует скорректировать вид характеристики (2) с использованием абсолютных величин переменных, что позволяет учсть вышеописанную особенность поведения изучаемых систем:

$$D'(\epsilon) = \sum_{i=0}^N |x'_i(\epsilon) - x''_i(\epsilon)| + ||y'_i| - |y''_i||. \quad (3)$$

Такой подход позволяет однозначно диагностировать режим обобщенной хаотической синхронизации в подобных системах в полном соответствии с поведением спектра показателей Ляпунова (рис. 3).

Подведем итоги. В настоящей работе описана особенность, ограничивающая применимость метода вспомогательной системы, которая может возникнуть при диагностике обобщенной хаотической

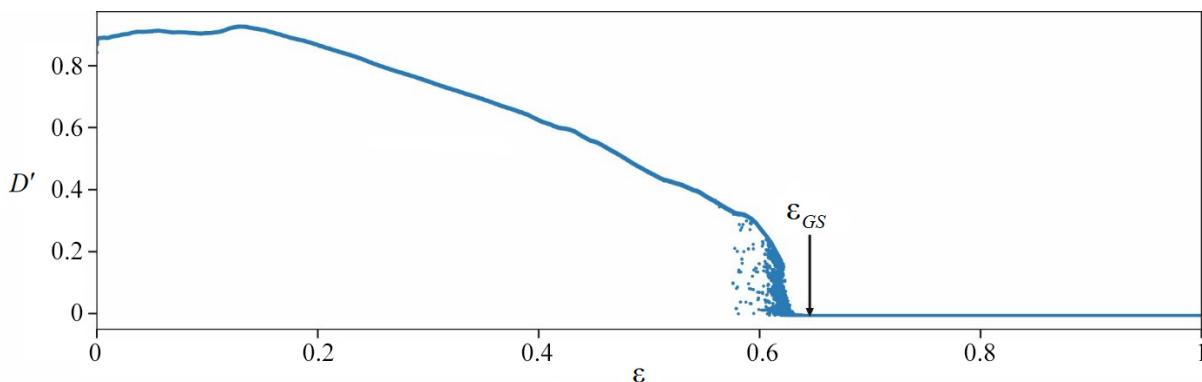


Рис. 3. Зависимость модифицированной средней меры между состояниями ведомой и вспомогательной систем  $D'(\epsilon)$  от величины параметра связи  $\epsilon$

Fig. 3. Dependencies of the modified average measure between states of the response and auxiliary systems  $D'(\epsilon)$  on the coupling parameter  $\epsilon$



синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, обладающих внутренней симметрией. Предложенная адаптация метода вспомогательной системы позволяет повысить его надежность в подобных случаях, что расширяет область его применимости для анализа сложных многомерных систем. В то же самое время следует иметь в виду, что предложенный в работе способ модификации метода детектирования обобщенной синхронизации имеет ограниченную область применения – его можно использовать только для систем, обладающим вполне определенным видом симметрии. Для иных систем с мультистабильностью и иных видов симметрий он является неприменимым.

### Список литературы / References

1. Balanov A. G., Janson N. B., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V. *Synchronization: From Simple to Complex*. Berlin, Springer, 2009. XIV, 426 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72128-4>
2. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge, Cambridge University Press, 2001. XIX, 411 p. <https://doi.org/10.1111/1/1475332>
3. Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 51, pp. 980–994. <https://www.doi.org/10.1103/PhysRevE.51.980>
4. Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Selskii A. O. Intermittent generalized synchronization and modified system approach: Discrete maps. *Phys. Rev. E*, 2024, vol. 109, art. 064217. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.109.064217>
5. Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Hramov A. E. On the use of chaotic synchronization for secure communication. *Phys. Usp.*, 2009, vol. 52, no. 12, pp. 1213–1238. <https://www.doi.org/10.3367/UFNe.0179.200912c.1281>
6. Kulagin N. D., Andreev A. V., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Sergeev A. P., Badarin A. A., Hramov A. E. Intermittency in predicting the behavior of stochastic systems using reservoir computing. *Phys. Rev. E*, 2025, vol. 111, art. 024209. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.111.024209>
7. Hramov A. E., Kulagin N. D., Pisarchik A. N., Andreev A. V. Strong and weak prediction of stochastic dynamics using reservoir computing. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2025, vol. 35, art. 033140. <https://doi.org/10.1063/5.0252908>
8. Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 53, pp. 4528–4535. <https://www.doi.org/10.1103/PhysRevE.53.4528>
9. Kocarev L., Parlitz U. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 1816–1819. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.1816>
10. Pyragas K. Properties of generalized synchronization of chaos. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* (Vilnius, IMI), 1998, no. 3, pp. 101–129. <https://doi.org/0.15388/NA.1998.3.0.15261>
11. Zheng Z., Hu G. Generalized synchronization versus phase synchronization. *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 62, pp. 7882–7885. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.7882>
12. Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Hramov A. E. Inapplicability of an auxiliary-system approach to chaotic oscillators with mutual-type coupling and complex networks. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 87, art. 064901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.064901>
13. González-Miranda J. M. Synchronization of symmetric chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 53, pp. 5656–5669. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.5656>
14. González-Miranda J. M. Bistable generalized synchronization of chaotic systems. *Computer Physics Communications*, 1999, vol. 121–122, pp. 429–431.
15. Pecora L. M., Carroll T. L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, pp. 821–824. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821>
16. Guan S., Lai C.-H., Wei G. W. Bistable chaos without symmetry in generalized synchronization. *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, art. 036209. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.036209>
17. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, vol. 50, pp. 935–938. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.935>
18. Proshin Yu. N., Shakirov M. A. *Modelirovaniye i vizualizatsiya neline'nykh dinamicheskikh sistem. Chast' 1. Tochechnye otobrazheniya* [Modeling and Visualization of Nonlinear Dynamic Systems. Part 1. Point Mappings]. Kazan, Kazan State University Publ., 2017. 36 p. Available at: [https://kpfu.ru/portal/docs/F1367493855/Tochechnye\\_otobrazheniya.pdf](https://kpfu.ru/portal/docs/F1367493855/Tochechnye_otobrazheniya.pdf) (accessed September 20, 2025) (in Russian).
19. Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Selskii A. O., Evtifeev E. V. A Method to detect the characteristics of intermittent generalized synchronization based on calculation of probability of the synchronous regime observation. *Tech. Phys. Lett.*, 2024, vol. 50, pp. 209–212. <https://doi.org/10.1134/S1063785023180116>
20. Hramov A. E., Koronovskii A. A. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.*, 2005, vol. 70, pp. 169–175. <https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10488-6>
21. Hramov A. E., Koronovskii A. A. Generalized synchronization: A modified system approach. *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, art. 067201. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.067201>

Поступила в редакцию 23.06.2025; одобрена после рецензирования 18.08.2025;  
принята к публикации 10.09.2025; опубликована 28.11.2025

The article was submitted 23.06.2025; approved after reviewing 18.08.2025;  
accepted for publication 10.09.2025; published 28.11.2025