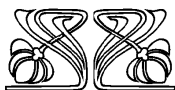
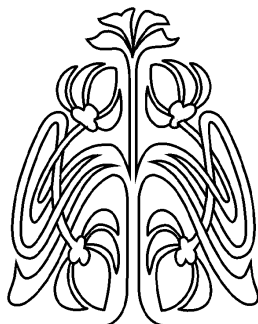




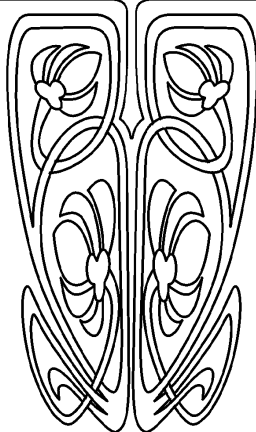
РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 288–294
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 288–294
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-3-288-294>, EDN: HDUENA

Научная статья
УДК 517.9



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



Метод рекуррентного анализа для диагностики режима обобщенной синхронизации в различных классах динамических систем

Е. Д. Илларионова, О. И. Москаленко[✉]

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Илларионова Екатерина Дмитриевна, аспирант, младший научный сотрудник кафедры физики открытых систем, K3524114@yandex.ru; <https://orcid.org/0000-0003-1912-863X>

Москаленко Ольга Игоревна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики открытых систем, o.i.moskalenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5727-5169>, AuthorID: 150252

Аннотация. Посредством рекуррентного анализа установлена возможность количественного определения границы режима обобщенной синхронизации как во взаимно, так и односторонне связанных системах с различной топологией аттрактора. Для оценки полученных данных были рассчитаны спектр показателей Ляпунова и ошибка синхронизации. Полученные результаты проиллюстрированы на примере систем Лоренца и Ресслера, а также радиотехнических генераторов, связанных односторонне и/или взаимно.

Ключевые слова: обобщенная синхронизация, взаимно связанные системы, односторонне связанные системы, спектр показателей Ляпунова, ошибка синхронизации, рекуррентный анализ

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-22-00033, <https://rscf.ru/project/24-22-00033/>).

Для цитирования: Илларионова Е. Д., Москаленко О. И. Метод рекуррентного анализа для диагностики режима обобщенной синхронизации в различных классах динамических систем // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 288–294. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-3-288-294>, EDN: HDUENA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Method of recurrent analysis for the generalized synchronization regime detection in different classes of dynamical systems

E. D. Illarionova, O. I. Moskalenko[✉]

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Ekaterina D. Illarionova, K3524114@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1912-863X>

Olga I. Moskalenko, o.i.moskalenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5727-5169>

Abstract. Background and Objectives: In this paper we study the possibility of quantitative determination of the boundary of the generalized synchronization regime in unidirectionally and mutually coupled systems with different attractor topologies by means of the recurrent analysis.



Materials and Methods: As the systems under study we consider Lorenz and Rössler systems, as well as radiotechnical generators coupled unidirectionally and/or mutually. To evaluate the obtained data together with the recurrent analysis the spectrum of Lyapunov exponents or synchronization error were calculated for all the systems under study. **Results:** We have shown that for identical systems with detuned parameters the results of the method of recurrent analysis coincide with a high degree of accuracy with the values obtained using classical methods for the generalized synchronization regime detection, whereas for nonidentical systems the proposed method demonstrates less accurate results. **Conclusion:** The method of calculation the recurrent diagrams allows us to determine the boundary of generalized synchronization in unidirectionally and mutually coupled systems with different attractor topology. The obtained results are in a good agreement with the results of calculation of the spectrum of Lyapunov exponents and synchronization error.

Keywords: generalized synchronization, mutually coupled systems, unidirectionally coupled systems, spectrum of Lyapunov exponents, synchronization error, recurrent analysis

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-22-00033, <https://rscf.ru/project/24-22-00033/>).

For citation: Illarionova E. D., Moskalenko O. I. Method of recurrent analysis for the generalized synchronization regime detection in different classes of dynamical systems. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 288–294 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-3-288-294>, EDN: HDUENA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Под синхронизацией традиционно понимается согласованное во времени функционирование двух или нескольких процессов или объектов [1, 2]. Это может быть, например, согласованное изменение определенных количественных характеристик двух или нескольких систем или сближение переменных состояния этих систем.

Одним из возможных механизмов синхронизации однонаправленно (взаимно) связанных систем является появление между ними некоторой функциональной зависимости, вид которой может быть достаточно сложным. Данный вид синхронного поведения называют режимом обобщенной синхронизации [3, 4]. Исследованием режима обобщенной синхронизации в научном сообществе занимаются довольно долгое время (см., например, [5–9]). Данный режим достаточно интересен, так как его можно применить в различных задачах – скрытой передачи информации с помощью хаотических сигналов [10, 11], контроля хаоса в СВЧ генераторах [12], а также в некоторых биологических и физических задачах [13, 14].

Для диагностики режима обобщенной синхронизации существуют различные методы. Классическими из них являются метод вспомогательной системы [15] и метод расчета спектра показателей Ляпунова [5]. Первый из них достаточно точно определяет границу синхронного режима, но подходит только для однонаправленно связанных систем. Второй метод применим для разных типов связи, но используется, как правило, только в том случае, если уравнения систем заданы в явном виде.

Впервые в настоящей статье мы рассмотрим вопрос о применимости для диагностики обобщенной синхронизации еще одного метода – метода рекуррентного анализа [16].

1. Понятия рекуррентной диаграммы и совместной рекуррентной диаграммы

Повторяемость – это фундаментальное свойство динамических систем, которое можно использовать для характеристики поведения системы в фазовом пространстве [16]. Качественным отображением этого свойства динамических систем является рекуррентная диаграмма. Технически рекуррентная диаграмма показывает все моменты времени, когда траектория фазового пространства динамической системы посещает примерно одну и ту же область в фазовом пространстве. Данный метод является менее точным по сравнению с классическими методами диагностики синхронного режима, но зато он не требует знания уравнений взаимодействующих систем и их управляющих параметров, а, следовательно, его эффективность не должна сильно зависеть от типа связи между системами, что является большим плюсом, когда в распоряжении исследователя имеются только временные ряды.

Повторяемость траектории \vec{x}_i в фазовом пространстве может быть охарактеризована матрицей:

$$R_{i,j}(\epsilon) = \theta(\epsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \quad (1)$$

$$i, j = 1, \dots, N,$$

где $\theta(u)$ – функция Хевисайда (если $u < 0$, то $\theta(u) = 0$, когда же $u > 0$, $\theta(u) = 1$), ϵ – пороговое расстояние, $\|\cdot\|$ – евклидова норма,



N – количество точек траектории. Тогда для рекуррентных состояний, то есть для состояний, которые находятся в ε -окрестности, справедливо следующее соотношение:

$$\vec{x}_i \approx \vec{x}_j \Leftrightarrow R_{i,j} \equiv 1.$$

Простейшим количественным показателем повторяемости динамики системы является так называемая *частота повторений*:

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}(\varepsilon). \quad (2)$$

Для анализа поведения двух взаимодействующих систем вводится понятие совместной рекуррентной диаграммы. Совместная рекуррентная диаграмма – это график, который показывает те моменты времени, когда попадание в выбранную область фазового пространства двух точек одной динамической системы происходит одновременно с попаданием двух точек второй динамической системы или с небольшим сдвигом во времени. Благодаря такому подходу фазовые пространства обеих систем можно рассматривать отдельно, и для них можно выбрать разные пороговые значения окрестности попадания ε . При этом, размеры окрестностей попадания выбираются с учетом размера фазовых пространств рассматриваемых систем.

Совместные рекуррентные диаграммы могут быть получены более чем для двух систем. Длина данных в рассматриваемых системах должна быть одинаковой. Для построения совместной рекуррентной диаграммы необходимо ввести в рассмотрение совместную рекуррентную матрицу для двух систем \vec{x} и \vec{y} :

$$JR_{i,j}^{\vec{x},\vec{y}} = \theta(\varepsilon_x - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) \theta(\varepsilon_y - \|\vec{y}_i - \vec{y}_j\|), \quad (3)$$

$$i, j = 1, \dots, N,$$

где ε_x и ε_y – пороговые расстояния для первой и второй систем, соответственно.

Для определения границы обобщенной синхронизации с использованием рекуррентного анализа необходимо рассчитать частоту повторений (см. (2)) для каждой системы в отдельности, а также определить частоту совместного повторения для обеих систем \vec{x} и \vec{y} :

$$JRR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N JR_{i,j}^{\vec{x},\vec{y}}(\varepsilon_x, \varepsilon_y). \quad (4)$$

Количественной характеристикой наличия обобщенной синхронизации в данном случае является коэффициент

$$P = \frac{JRR}{RR}, \quad (5)$$

где $RR = RR^{\vec{x}}$ или $RR = RR^{\vec{y}}$. В режиме обобщенной синхронизации системы будут демонстрировать примерно одинаковые повторения, а, следовательно, частота повторений для обеих систем будет примерно одинаковой:

$$RR^{\vec{x},\vec{y}} \approx RR^{\vec{x}} = RR^{\vec{y}}. \quad (6)$$

Удобной количественной характеристикой степени обобщенной синхронизации является индекс, основанный на средней совместной вероятности повторения

$$JPR = \frac{P - RR}{1 - RR}. \quad (7)$$

Индекс JPR изменяется в диапазоне от 0 до 1. Когда системы находятся в асинхронном состоянии, данный индекс близок к нулю, в режиме обобщенной синхронизации значение JPR стремится к единице.

2. Исследуемые системы

Метод рекуррентного анализа применен для исследования обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах, демонстрирующих хаотическую динамику с различной топологией аттрактора. В качестве примеров таких систем выбраны системы с относительно простой топологией аттрактора (однонаправленно и взаимно связанные системы Рёсслера), системы со сложной (двулистной) структурой аттрактора (однонаправленно связанные системы Лоренца), а также однонаправленно связанные системы с разной топологией аттрактора (осциллятор Лоренца, находящийся под действием системы Рёсслера, радиотехнические генераторы с 1.5 степенями свободы). Уравнения и значения управляющих параметров для всех рассмотренных систем представлены в табл. 1. Для проверки корректности используемого подхода для диагностики обобщенной синхронизации наряду с методом рекуррентного анализа использовались также методы расчета спектра показателей Ляпунова для взаимно связанных систем и расчета ошибки синхронизации для однонаправленно связанных осцилляторов.



Таблица 1 / Table 1

Уравнения и значения управляющих параметров исследуемых систем
Equations and control parameter values of the systems under study

Системы / Systems	Тип связи / Type of coupling	Уравнения	Управляющие параметры / Control parameters
Системы Рёсслера / Rössler systems	Взаимная связь / Mutual coupling	$\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \lambda(x_{2,1} - x_{1,2})$ $\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}$ $\dot{z}_{1,2} = p + z_{1,2}(x_{1,2} - c)$	$a = 0.15, p = 0.2, c = 10,$ $\omega_1 = 0.95, \omega_2 = 0.93$
Системы Рёсслера / Rössler systems	Однонаправленная связь / Unidirectional coupling	$\dot{x}_1 = -\omega_1y_1 - z_1$ $\dot{y}_1 = \omega_1x_1 + ay_1$ $\dot{z}_1 = p + z_1(x_1 - c)$ $\dot{x}_2 = -\omega_2y_2 - z_2 + \lambda(x_1 - x_2)$ $\dot{y}_2 = \omega_2x_2 + ay_2$ $\dot{z}_2 = p + z_2(x_2 - c)$	$a = 0.15, p = 0.2, c = 10,$ $\omega_1 = 0.95, \omega_2 = 0.93$
Системы Лоренца / Lorenz systems	Однонаправленная связь / Unidirectional coupling	$\dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1)$ $\dot{y}_1 = x_1(r_1 - z_1) - y_1$ $\dot{z}_1 = x_1y_1 - bz_1$ $\dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) + \lambda(x_1 - x_2)$ $\dot{y}_2 = x_2(r_2 - z_2) - y_2$ $\dot{z}_2 = x_2y_2 - bz_2$	$\sigma = 10, r_1 = 28.0, r_2 = 30.0,$ $b = 8/3$
Системы Лоренца и Рёсслера / Lorenz and Rössler systems	Однонаправленная связь / Unidirectional coupling	$\dot{x}_1 = -\alpha(y_1 + z_1)$ $\dot{y}_1 = \alpha(x_1 + ay_1)$ $\dot{z}_1 = \alpha(p + z_1(x_1 - c))$ $\dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2)$ $\dot{y}_2 = x_2(r - z_2) - y_2 + \lambda y_2$ $\dot{z}_2 = x_2y_2 - bz_2$	$a = 0.2, p = 0.2, c = 5.7, \alpha = 6,$ $\sigma = 10, r = 28.0, b = 8/3$
Радиотехнические генераторы / Radiotechnical generators	Однонаправленная связь / Unidirectional coupling	$\dot{x}_1 = y_1$ $\dot{y}_1 = -x_1 - by_1 + z_1$ $\dot{z}_1 = c(\alpha_1 f(x_1) - z_1) - dy_1$ $\dot{x}_2 = y_2 + \lambda(x_1 - x_2)$ $\dot{y}_2 = -x_2 - by_2 + z_2$ $\dot{z}_2 = c(\alpha_2 f(x_2) - z_2) - dy_2$	$b = 0.5182, c = 0.22439,$ $d = 1.465, \alpha_1 = 14, \alpha_2 = 30,$ $f(x) =$ $= \begin{cases} 0.528, x \leq -1.2, \\ x(1 - x^2), -1.2 < x < 1.2, \\ -0.528, x \geq 1.2 \end{cases}$

3. Результаты исследования

В качестве иллюстрации работоспособности метода диагностики обобщенной синхронизации, основанного на расчете совместной вероятности повторения, на рис. 1 приведены зависимости ошибки синхронизации s^1 (а) и величины JPR (б) от параметра связи λ для *однонаправленно связанных систем Рёсслера*. Из рис. 1, а видно, что при $\lambda = 0.175$ ошибка синхронизации становится равной нулю, что соответствует началу режима обобщенной синхронизации. На рис. 1, б заметно, что количественная мера JPR приближается к значению 1

и перестает в дальнейшем меняться примерно при том же значении параметра связи $\lambda = 0.175$.

Схожие результаты демонстрируют *однонаправленно связанные системы Лоренца* (рис. 2). Из рис 2, б видно, что порог начала синхронного режима, а именно, когда JPR стремится к 1, согласуется со значением $\lambda = 10$, полученным при расчете ошибки синхронизации (рис. 2, а).

В случае же взаимодействующих систем различного типа метод расчета JPR демонстрирует менее точные результаты. Значение JPR в режиме обобщенной синхронизации не достигает 1, но выходит на уровень насыщения,

$s^1 = \frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2} dt$, где (x_3, y_3, z_3) – вектор состояния вспомогательной системы, T_0 – время переходного процесса, T – время счета.

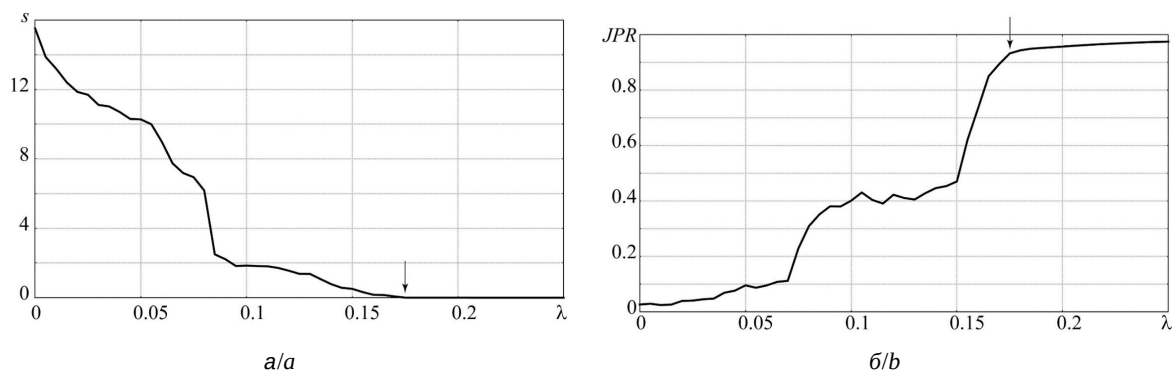


Рис. 1. Зависимости ошибки синхронизации (а) и количественной меры JPR (б) от параметра связи λ для двух однонаправленно связанных систем Рёсслера

Fig. 1. Dependencies of the synchronization error (a) and quantitative measure JPR (b) on the control parameter λ for two unidirectionally coupled Rössler systems

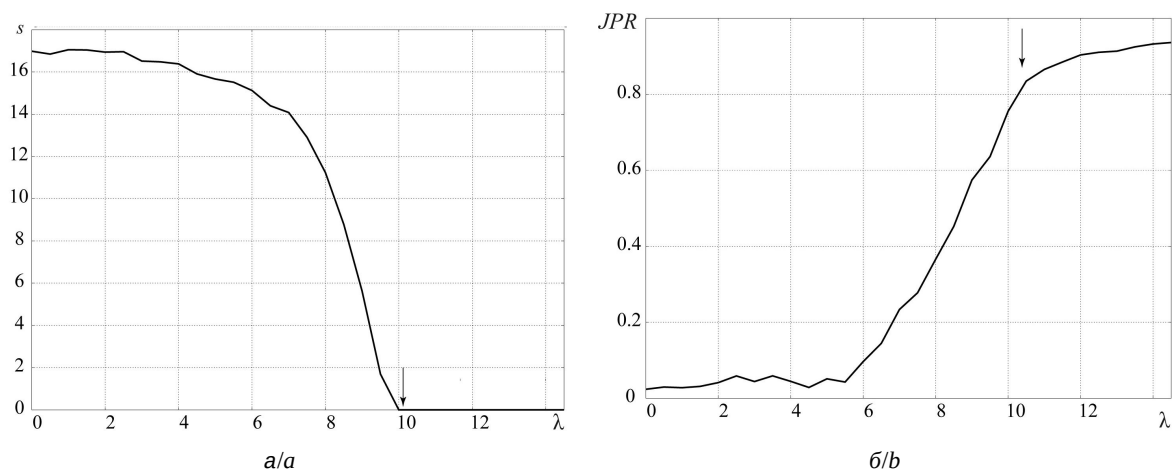


Рис. 2 Зависимости ошибки синхронизации (а) и количественной меры JPR (б) от параметра связи λ для двух однонаправленно связанных систем Лоренца

Fig. 2. Dependencies of the synchronization error (a) and quantitative measure JPR (b) on the control parameter λ for two unidirectionally coupled Lorenz systems

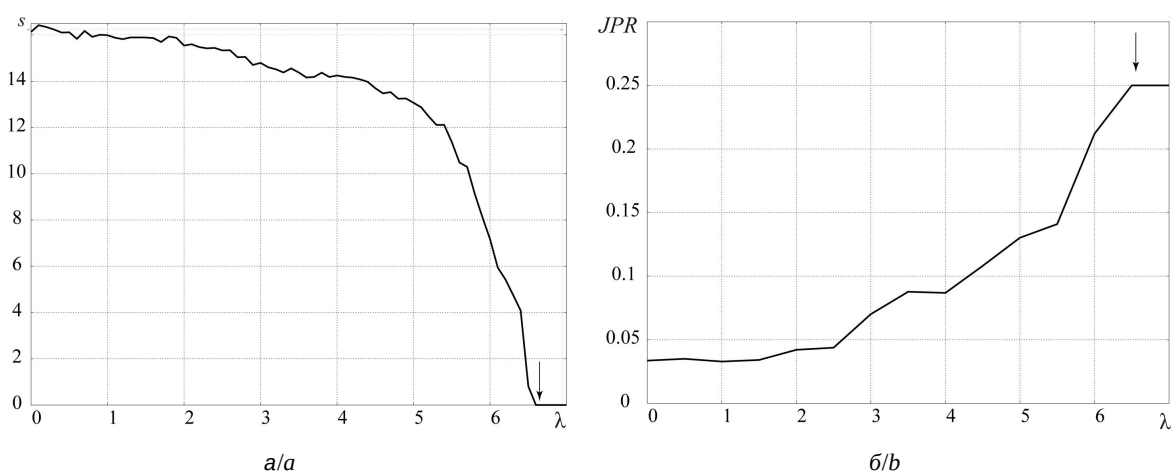


Рис. 3. Зависимости ошибки синхронизации (а) и количественной меры JPR (б) от параметра связи λ для однонаправленно связанных систем Рёсслера и Лоренца

Fig. 3. Dependencies of the synchronization error (a) and quantitative measure JPR (b) on the control parameter λ for unidirectionally coupled Rössler and Lorenz systems



что позволяет произвести примерную оценку порогового значения возникновения синхронного режима. Так, из рис. 3, а видно, что JPR для однонаправленно связанных систем Лоренца и Рёсслера достигает уровня насыщения $JPR \approx 0.25$ при значении параметра $\lambda \approx 6.6$, что можно считать примерной оценкой порога обобщенной синхронизации.

Аналогичные результаты демонстрируют и другие системы, указанные в табл. 1. В табл. 2 приведены границы режима обобщенной синхронизации, полученные с помощью классических методов диагностики синхронного режима и метода расчета совместной вероятности повторения, а также оцененная *точность* последнего метода, рассчитанная по формуле:

$$\delta = \frac{|\lambda_s - \lambda_{JPR}|}{\lambda_s}. \quad (8)$$

Из таблицы видно, что для однотипных систем метод расчета средней вероятности повторения с высокой степенью точности совпадает со значениями, полученными с помощью классических методов диагностики обобщенной синхронизации, а для систем различных типов метод расчета JPR демонстрирует менее точные результаты.

Заключение

Таким образом, метод расчета рекуррентных диаграмм позволяет определить границу обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах с различной топологией аттрактора. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами расчета спектра показателей Ляпунова и ошибки синхронизации. Но для случая взаимодействия систем различных типов метод расчета коэффициента JPR (метод рекуррентного анализа) работает плохо (не выходит на значение 1). Однако характерное наличие полки насыщения, позволяет качественно определить порог синхронизации, который не сильно различается со значением порога, полученного с помощью классических методов диагностики синхронного режима.

Список литературы / References

1. Fradkov A. L. Kiberneticheskaya fizika: printsipy i primery [Cybernetic Physics: Principles and Examples]. Saint Petersburg, Nauka, 2003. 208 p. (in Russian).
2. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge, Cambridge University Press, 2001. 493 p.

Таблица 2 / Table 2

Сравнение значений границ обобщенной синхронизации для различных методов расчета
Comparison of the values of the generalized synchronization boundaries for different calculation methods

Исследуемая система / System under study	Классические методы	Метод рекуррентного анализа / Method of recurrent analysis	
		Граница / Boundary	Точность (8) / Accuracy (8)
Взаимно связанные системы Рёсслера / Mutually coupled Rössler systems	0.075*	0.08	0.06
Однонаправленно связанные системы Рёсслера / Unidirectionally coupled Rössler systems	0.175**	0.175	0
Однонаправленно связанные системы Лоренца / Unidirectionally coupled Lorenz systems	10**	10.5	0.05
Однонаправленно связанные системы Лоренца и Рёсслера / Unidirectionally coupled Lorenz and Rössler systems	6.5**	6.6	0.015
Однонаправленно связанные радиотехнические генераторы / Unidirectionally coupled radiotechnical generators	1.501**	1.6	0.06

Примечание. *Метод расчета спектра показателей Ляпунова. **Метод расчета ошибки синхронизации.
 Note. *Method of calculating Lyapunov exponents spectrum. **Method of calculating synchronization error.



3. Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 51, no. 2, pp. 980–994. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.980>
4. Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Hramov A. E., Boccaletti S. Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 86, no. 3, pt. 2, art. 036216. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.036216>
5. Pyragas K. Conditional Lyapunov exponents from time series. *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, no. 5, pp. 5183–5188. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.5183>
6. Hramov A. E., Koronovskii A. A. Generalized synchronization: A modified system approach. *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, no. 6, art. 067201. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.067201>
7. Ouannas A., Odibat Z. Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete time. *Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 81, pp. 765–771. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2026-0>
8. Rakshit S., Ghosh D. Generalized synchronization on the onset of auxiliary system approach. *Chaos*, 2020, vol. 30, no. 11, art. 111102. <https://doi.org/10.1063/5.0030772>
9. Shen Y., Liu X. Generalized synchronization of delayed complex-valued dynamical networks via hybrid control. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, vol. 118, no. 2, art. 107057. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.107057>
10. Terry G. R., VanWiggeren G. D. Chaotic communication using generalized synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, vol. 12, iss. 1, pp. 145–152. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(00\)00038-2](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(00)00038-2)
11. Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Hramov A. E. On the use of chaotic synchronization for secure communication. *Phys. Usp.*, 2009, vol. 52, no. 12, pp. 1213–1238. <https://doi.org/10.3367/UFNe.0179.200912c.1281>
12. Starodubov A. V., Koronovsky A. A., Khramov A. E., Zharkov Yu. D., Dmitriev B. S. Generalized synchronization in a system of coupled klystron chaotic oscillators. *Technical Physics Letters*, 2007, vol. 33, no. 7, pp. 612–615. <https://doi.org/10.1134/S1063785007070218>
13. Glass L. Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature*, 2001, vol. 410, no. 6825, pp. 277–284. <https://doi.org/10.1038/35065745>
14. Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. Synchronization approach to analysis of biological systems. *Fluctuation and Noise Letters*, 2004, vol. 4, no. 1, pp. L53 – L62. <https://doi.org/10.1142/S0219477504001653>
15. Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 53, no. 5, pp. 4528–4535. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.4528>
16. Marwan N., Romano C., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 2007, vol. 438, no. 5–6, pp. 237–329. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.11.001>

Поступила в редакцию 11.12.2024; одобрена после рецензирования 10.04.2025;
принята к публикации 15.05.2025; опубликована 29.08.2025

The article was submitted 11.12.2024; approved after reviewing 10.04.2025;
accepted for publication 15.05.2025; published 29.08.2025