



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 277–287

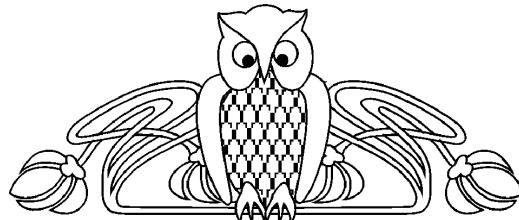
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 277–287

<https://fizika.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-3-277-287>, EDN: EXCZHP

Научная статья
УДК 517.9:621.372

Определение структуры связей в хаотических и стохастических системах при помощи нейронной сети



А. В. Шабунин

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов,
ул. Астраханская, д. 83

Шабунин Алексей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики, shabuninav@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3495-9418>, AuthorID: 34839

Аннотация. Работа посвящена исследованию алгоритма определения связанныности ансамбля хаотических систем с шумом при помощи искусственных нейронных сетей (ИНС). Метод основан на определении причинности по Грэнджеру и использовании искусственных нейронных сетей прямого распространения, обучаемых с регуляризацией. В качестве исследуемой системы выбран ансамбль из двух связанных кубических отображений с диффузионной односторонней и взаимной связями. Рассматривается применимость алгоритма как для строго детерминированной системы, так и для системы с аддитивным гауссовым шумом небольшой интенсивности. Результаты показали возможность использования ИНС для выявления степени влияния подсистем друг на друга, а также для оценки величины коэффициентов связи. При этом, шум небольшой интенсивности практически не влияет на результаты измерений. Более того, шум может играть конструктивную роль, позволяя определять связанныность в тех случаях, когда в «чистых» системах измерения становятся невозможными, например, в режиме синхронизации хаоса или в случае регулярных режимов.

Ключевые слова: нелинейная динамика, ансамбли хаотических систем, определение связанныности, искусственные нейронные сети

Для цитирования: Шабунин А. В. Определение структуры связей в хаотических и стохастических системах при помощи нейронной сети // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 277–287. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-3-277-287>, EDN: EXCZHP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Determining the structure of couplings in chaotic and stochastic systems using a neural network

A. V. Shabunin

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Alexey V. Shabunin, shabuninav@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3495-9418>, AuthorID: 34839

Abstract. Subject and Objectives: The purpose of this work is development and research of an algorithm for determining the structure of couplings of an ensemble of chaotic self-oscillating systems with and without noise, which is based on artificial neural networks (ANN). Ensembles of two cubic maps with diffusive unidirectional and mutual couplings are the systems under study. **Materials and Methods:** The method is based on the determination of causality by Granger and the use of direct propagation artificial neural networks trained with regularization. **Results:** The applicability of the algorithm has been considered both for a strictly deterministic system and for a system with low-intensity additive Gaussian noise. The results have shown the possibility of using ANN to identify the degree of influence of the subsystems on each other, as well as to assess the magnitude of the coupling coefficients. At the same time, low-intensity noise demonstrates a minor effect on the measurement results. Moreover, noise can play a constructive role, allowing to determine the connectivity in the cases where measurements become impossible in “pure” systems, for example, in the chaos synchronization mode or in the case of regular modes. **Discussion and Conclusions:** Although the method has shown its effectiveness for simple mathematical models, its applicability for real systems depends on a number of factors, such as sensitivity to external noise, distortion of the waveforms, the dimension of the array etc. These questions require additional research.

Keywords: nonlinear dynamics, ensembles of chaotic systems, determination of connectivity, artificial neural networks

For citation: Shabunin A. V. Determining the structure of couplings in chaotic and stochastic systems using a neural network. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 277–287 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-3-277-287>, EDN: EXCZHP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Одной из интересных и важных для практики научных проблем является задача выявления величины и направления связей между взаимодействующими системами по генерируемым ими сигналам – *определение связанности*. Для ее решения используется ряд методов, наиболее известный из которых основан на расчете *причинности по Грэнджеру* (ПГ) [1, 2]. Метод ПГ позволяет определить, влияет ли система P на систему Q посредством построения прогноза поведения последней, как при учете динамики P , так и без нее. Очевидно, что, если P воздействует на Q , учет ее состояния должен сделать прогноз поведения Q более точным. Таким образом, для определения ПГ строятся два фильтра-предсказателя:

$$Q(n+1) = f(Q(n)P(n)), \quad (1)$$

$$Q(n+1) = g(Q(n)). \quad (2)$$

По состоянию в текущий n -ый ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$) момент дискретного времени фильтры (1), (2) прогнозируют состояние Q в следующий, в $(n+1)$ -ый, момент. Для количественной оценки прогноза используют усредненную среднеквадратичную ошибку предсказания: $\varepsilon = \sqrt{\langle |\bar{Q}(n) - Q(n)|^2 \rangle}$, где $\bar{Q}(n)$ – предсказанное значение. Соответственно, степень влияния P на Q можно оценить по уменьшению ε при переходе от (2) к (1) [3]. Расчет причинности по Грэнджеру, а также его модификации, использовался для определения связанности как для реальных [4–10], так и модельных [11–13] систем. Наличие множества разнообразных методов, а также дискуссия об их применимости [14], свидетельствуют о том, что задача построения надежного и работоспособного алгоритма определения связанности остается актуальной и в настоящее время.

В качестве инструмента для определения ПГ можно использовать искусственную нейронную сеть [15, 16]. Например, можно обучить ИНС предсказывать динамику рассматриваемой системы Q , то есть заставить ее работать в качестве фильтров f и g системы (1) – (2). Способность ИНС прямого распространения к подобным задачам хорошо известна [17–20]. Кроме того, ИНС обладает собственной сетевой структурой, которая будучи вначале полносвязной, может меняться в ходе обучения, подстраиваясь под структуру связей ансамбля и выявляя тем самым последнюю. Подобная идея была предложена ранее в работе [21]. Она основана на известной в теории

ИНС процедуре *обучения с регуляризацией* [15]. Метод регуляризации был разработан А. Н. Тихоновым [22] и получил широкое применение в задачах оптимизации. Суть его заключается во введении т. н. «штрафа за сложность» сети, который обеспечивает «обнуление» ненужных синаптических коэффициентов. Тем самым удаляются «лишние» связи и остаются лишь те, что необходимы для ее правильного функционирования. В работе данный способ был применен к задаче определения связанности в ансамбле логистических отображений [23]. В настоящем исследовании мы используем его для определения связанности в системе кубических отображений с шумом. Последние характеризуются более сложной динамикой, сочетающей хаотические колебания вокруг неподвижных точек со случайными перескоками между ними.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сеть из N идентичных хаотических подсистем с дискретным временем, в которую добавлены источники аддитивного гауссово-го шума:

$$\begin{aligned} x_i(n+1) = & f(x_i(n)) + \\ & + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} (f(x_j(n)) - f(x_i(n))) + \sigma \xi_i(n). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $x_i(n)$ – вещественная динамическая переменная, описывающая состояние i -ой подсистемы ($i = 1, \dots, N$) в момент времени n , f – функция, дающая его индивидуальную динамику, коэффициенты $\gamma_{ij} \geq 0$ определяют интенсивности связей между отображениями, $\xi_i(n)$ – источники нормального шума интенсивности σ . Введем также ограничение максимальной силы связей, действующей на каждый элемент ансамбля: $\sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \leq 1$. Данный тип связей называется *диффузионным* (см. [24, 25]).

Систему уравнений (3) удобно переписать в матрично-векторной форме:

$$x(n+1) = Mf(x(n)) + \sigma \xi(n), \quad (4)$$

где $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ и $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T$ – вектор-столбцы (индекс T означает транспонирование), $f(x)$ – вектор-функция, действующая по правилу: $f_i = f(x_i)$, M – общая матрица связей ансамбля (квадратная $N \times N$ матрица с диагональными коэффициентами $M_{ii} = 1 - \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}$ и недиагональными компонентами $M_{ij} = \gamma_{ij}$). Заметим, что сумма коэффициентов каждой строки M равна единице. Расчет M по наблюдаемому



сигналу $x(n)$ и является целью определения связности ансамбля (4).

2. Алгоритм определения связности

Алгоритм определения структуры связей при помощи ИНС был подробно рассмотрен в работе [23]. Здесь мы дадим его краткое описание. В основе алгоритма лежит процедура обучения с учителем [15] двухслойной ИНС прямого распространения с функцией активации первого слоя $\phi(x) = \text{th}(x)$ и линейным выходным слоем (рис. 1). Уравнение такой сети имеет вид:

$$y = w\phi(WX + B) + b, \quad (5)$$

где y – скалярный выходной сигнал, $X = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$ – N -мерный вектор входного сигнала, W и w – $m \times N$ и $1 \times m$ матрицы весовых (синаптических) коэффициентов нейронов первого и второго слоев, соответственно, m -мерный вектор B и скаляр b – значения их порогов. Входная размерность N совпадает с числом отображений ансамбля (3), в то время как размерность скрытого слоя m может быть выбрана произвольной и определяется сложностью задачи. В данном исследовании используется то же значение $m = 10$, как и в [23].

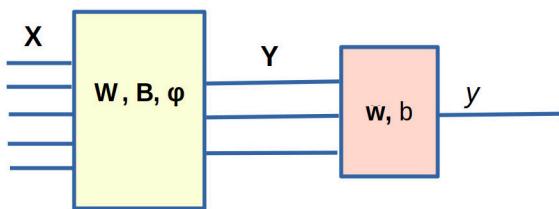


Рис. 1. Схема двухслойной нейронной сети (цвет онлайн)
Fig. 1. Diagram of a two-layer neural network (color online)

Для определения коэффициентов матрицы M ансамбля (3) используется метод обучения ИНС с регуляризацией. Данный метод традиционно применяется для борьбы с переобучением сетей [15, 16], однако здесь он используется для другой цели – упрощения структуры сети так, чтобы последняя стала соответствовать структуре связей в ансамбле (4). Основной целью обучения является предсказание динамики l -го отображения на один шаг вперед. Поэтому обучающее множество формируется из векторов $X(n)$ и целевых значений $x_l(n+1)$; последние представляют собой состояние l -го узла в последующий момент времени. Дополнительной целью обучения является оптимизация (упрощение) структуры самой

ИНС. Суть обучения заключается в подстройке параметров сети, минимизирующей целевую функцию:

$$\Phi_l = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} (y(n) - x_l(n+1))^2 + r \left(\sum_{k=1}^m w_{1k}^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N W_{ij}^2 \right). \quad (6)$$

Первое слагаемое (6) есть средний квадрат ошибок предсказания динамики l -го узла за время K . Второе – «штраф за сложность» структуры используемой ИНС, в качестве которого берется сумма квадратов всех ее синаптических коэффициентов; весовой коэффициент $r \geq 0$ называют коэффициентом регуляризации.

Целевая функция (6) служит одновременно выполнению двух задач: (а) предсказать динамику отображений и (б) использовать для этого максимально упрощенную структуру сети. Для решения второй задачи «лишние» синаптические связи должны быть отключены (т. е. установлены в ноль). После их «обнуления» в ходе обучения, значения синаптических коэффициентов скрытого слоя W_{ij} позволяют диагностировать величину и направление связей между узлами исследуемого ансамбля. Следя [23], для количественного определения степени влияния j -го осциллятора на предсказание динамики l -го рассчитаем среднеквадратичное значение коэффициентов j -го столбца:

$$s_{lj} = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{k=1}^m W_{kj}^2}, \quad (7)$$

которое нормируем на сумму таких значений для всех столбцов:

$$S_{lj} = \frac{s_{lj}}{\sum_{i=1}^N s_{li}}. \quad (8)$$

Полученные величины S_{lj} будем называть коэффициентами влияния j -го узла на l -й, а составленную из них матрицу S – матрицей влияния, служащую для диагностики матрицы связей M .

Таким образом, метод диагностирования структуры связей ансамбля отображений предполагает следующие действия.

1. Создается ИНС, структура которой изображена на рис. 1, со входной размерностью, равной числу элементов ансамбля N и числом нейронов скрытого слоя $m = 10$.

2. Коэффициенты сети инициализируются случайными значениями.

3. Для обучения ИНС формируется обучающее множество из $K = 5000$ векторов $\{X^{(n)}\}_{n=0}^{K-1}$,



каждый из которых представляет собой отображение всего ансамбля в n -ый момент времени: $X^{(n)} = x(n)$.

4. Для выбранного l формируется множество целевых значений $\{d_l^{(n)}\}_{n=0}^{K-1}$, так что

$$d_l^{(n)} = x_l(n+1).$$

5. Проводится обучение сети с регуляризацией, основанной на целевой функции (6).

6. Для идентификации связей согласно (8) рассчитывается l -ая строка матрицы влияния S .

Пункты (4) – (6) выполняются для каждого $l = 1, \dots, N$. В итоге получаем все коэффициенты матрицы влияния S .

Заметим, что, как следует из (8), сумма коэффициентов каждой строки матрицы S равна единице (также как и у матрицы M). Поэтому лишь $N - 1$ из ее коэффициентов являются независимыми. В качестве таковых естественно использовать недиагональные коэффициенты, поскольку именно они характеризуют связанность. Кроме того, поскольку метод расчета базируется на случайных начальных значениях коэффициентов ИНС, он будет давать случайные результаты, обработка которых требует использование статистических методов (подобные методы называют *стохастическим обучением*).

3. Исследуемые отображения

Выберем в качестве элемента ансамбля (3) кубическое отображение, задаваемое уравнением:

$$x(n+1) = (\alpha - 1)x(n) - \alpha x^3(n), \quad (9)$$

где $\alpha \in [0.4]$ – параметр, $x(n) \in (-1, 1)$. Напомним вкратце свойства этого отображения, исследованные в ряде работ (см., например, [26]). Уравнение (9) представляет собой автоколебательную систему, демонстрирующую каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся переходом к хаосу. Кроме того, в отличие от логистического отображения, рассматривавшегося в [23], уравнение (9) обладает симметрией относительно преобразования координат $x \leftrightarrow -x$, что обуславливает возможность появления в его фазовом пространстве пар симметричных друг другу аттракторов, то есть бистабильность. Последняя проявляется в интервале $2 < \alpha < 3.6$, где система демонстрирует каскады бифуркаций удвоения периода на базе симметричных друг другу неподвижных точек:

$$C_{1,2} : x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha - 2}{\alpha}}.$$

В результате, при $\alpha \simeq 3.3$ в фазовом пространстве возникает пара симметричных друг другу одноленточных хаотических аттракторов $A_{1,2}$. При $\alpha \simeq 3.6$ оба хаотических аттрактора объединяются в один (A_0), завершая тем самым этап бистабильности.

Режим объединенного хаотического аттрактора при $\alpha = 3.65$ был выбран в качестве отправной точки исследований. Он качественно отличается от хаоса в логистических отображениях, поскольку динамика объединенного аттрактора сочетает два вида движения: хаотические колебания вокруг C_1 и C_2 и случайные «перескоки» между ними. Типичный вид такой траектории показан на рис. 2.

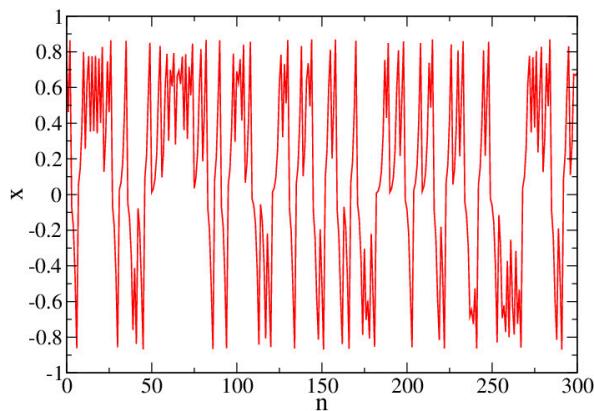


Рис. 2. Временная реализация, демонстрируемая кубическим отображением при $\alpha = 3.65$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Time series demonstrated by a cubic map at $\alpha = 3.65$ (color online)

Необходимо отметить, что при объединении кубических отображений в ансамбль (3) режим колебаний помимо значения α будет определяться также матрицей M . Соответственно, при определенных связях он может смениться с хаотического на регулярный. Такие случаи требуют особого рассмотрения.

4. Ансамбль с односторонней связью

Протестируем описанный в разделе (3) алгоритм на наиболее простом примере – ансамбле из двух отображений с односторонней связью:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f(x_1(n)) + \sigma \xi_1(n), \\ x_2(n+1) &= f(x_2(n)) + \\ &+ \gamma(f(x_1(n)) - f(x_2(n))) + \sigma \xi_2(n), \end{aligned} \quad (10)$$

Матрица связей для системы (10) имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 - \gamma \end{bmatrix}. \quad (11)$$



Значения параметра связи γ ограничим диапазоном от 0 до 0.5.

При выбранном параметре $\alpha = 3.65$ во всем рассматриваемом интервале $0 \leq \gamma \leq 0.5$ система (10) демонстрирует режим развитого хаоса. Однако, свойства этого хаоса зависят от γ , поскольку связь между подсистемами приводит к синхронизации колебаний. Так, при слабой связи фазовые портреты представляют собой хаотические множества точек, более или менее однородно заполняющие квадрат со сторонами от -0.9 до 0.9 (рис. 3, а). С ростом связи, равномерность заполнения нарушается и они начинают стягиваться к диагонали $x_1 = x_2$, что свидетельствует о частичной синхронизации между отображениями (рис. 3, б). Наконец, при связи $\gamma \simeq 0.495$ наблюдается режим почти полной синхронизации хаоса, нарушаемый лишь отдельными «выбросами»

в сторону от диагонали (рис. 3, в). Полная синхронизация реализуется при $\gamma \geq 0.499$.

Детерминированная система ($\sigma = 0$). Применим описанную в разделе (3) методику для колебательного режима при $\gamma = 0.1$ (см. рис. 3, б). Для этого проведем несколько повторяющихся попыток обучения ИНС и рассчитаем по формулам (7), (8) коэффициенты S_{12} и S_{21} . Графики, построенные по результатам расчетов, приведены на рис. 4, а. Видно, что S_{ij} представляют собой случайные флуктуации небольшой интенсивности относительно средних значений. Построенные для них функции плотности вероятности $p_{ij}(S_{ij})$ (рис. 4, б) несимметричны и имеют выраженный резонансный характер с резкими максимумами в точках $\bar{S}_{ij} = \arg(\max(p_{ij}))$. Последние будут использованы далее в качестве оценок для S_{ij} .

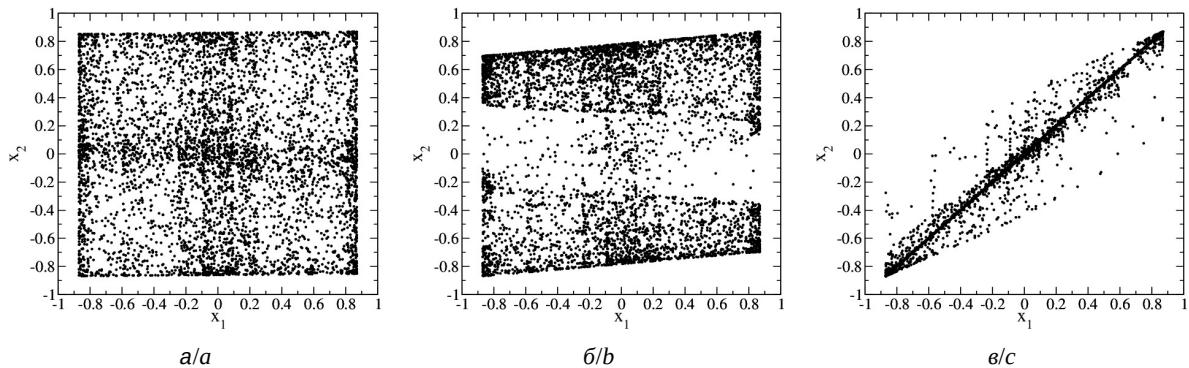


Рис. 3. Фазовые портреты системы (10) для значений $\alpha = 3.65$ и $D = 0$ при $\gamma = 0$ (а), $\gamma = 0.1$ (б), $\gamma = 0.49$ (в)

Fig. 3. Phase portraits of the system (10) at $\alpha = 3.65$, $D = 0$ for $\gamma = 0$ (a), $\gamma = 0.1$ (b), $\gamma = 0.49$ (c)

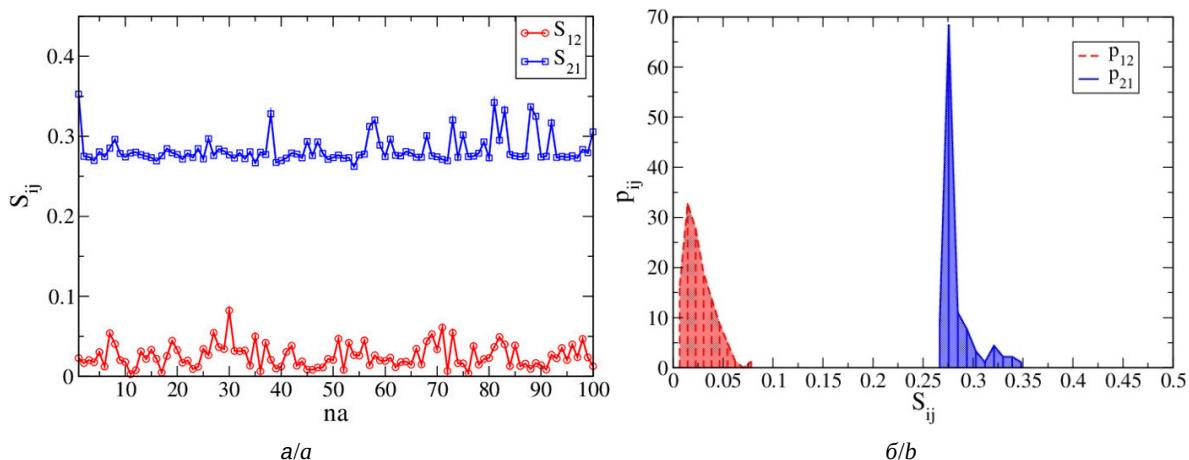


Рис. 4. Зависимость коэффициентов влияния S_{ij} от номера попытки обучения na (а); графики плотности вероятности для этих коэффициентов (б) (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of the influence coefficients S_{ij} on the number of training attempts na (a); probability density graphs for the same coefficients (b) (color online)



Вычисленные по итогам обучения ИНС для $\gamma = 0.1$ коэффициенты влияния для системы (10) образуют матрицу:

$$S = \begin{bmatrix} 0.985 & 0.015 \\ 0.275 & 0.725 \end{bmatrix}.$$

Она качественно соответствует матрице связей M ансамбля (11), так как значение $\bar{S}_{12} \ll \bar{S}_{21}$. Что касается количественной взаимосвязи между S и M , то она будет рассмотрена далее.

Применим ту же методику для оценки коэффициентов матрицы влияния при других значениях связи. Графики полученных зависимостей $\bar{S}_{12}(\gamma)$ и $\bar{S}_{21}(\gamma)$ представлены на рис. 5, а. Как видно из графиков, условие малости коэффициента \bar{S}_{12} , которое может служить критерием работоспособности алгоритма, выполняется для всех значений параметра связи, вплоть до $\gamma \simeq 0.495$, после чего происходит резкий скачок до $\bar{S}_{12} \simeq 0.5$. Скачок происходит в точке перехода к режиму полной синхронизации хаоса и, очевидно, связан с этим явлением. В остальном диапазоне γ значение \bar{S}_{12} колеблется на уровне одного-двух процентов. Что касается коэффициента $\bar{S}_{21}(\gamma)$, то он демонстрирует плавное и монотонное возрастание от нуля до 0.5, имеющее внешнее сходство со степенной зависимостью: $\bar{S}_{21}(\gamma) = A\gamma^z$, где $z < 1$.

При аппроксимации методом наименьших квадратов получаем значения неизвестных коэффициентов: $A \simeq 0.65$, $z = \frac{1}{3}$. Полученная таким образом аппроксимирующая функция имеет вид:

$$\bar{S}_{21} \simeq 0.65\sqrt[3]{\gamma}, \quad (12)$$

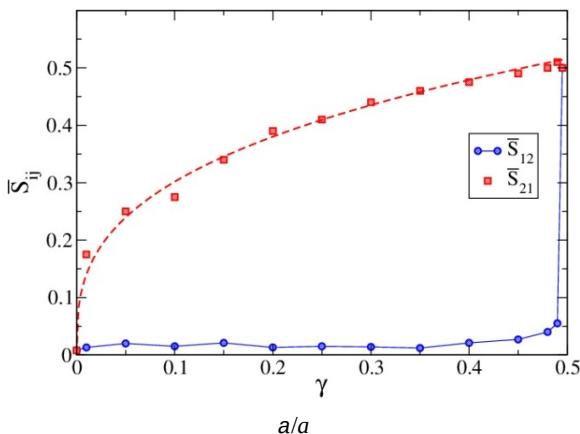


график которой отображается на рис. 5, б штриховой линией. Из нее нетрудно получить формулу для экспериментальной оценки $\bar{\gamma}$:

$$\bar{\gamma} \simeq 3.64\bar{S}_{21}^3. \quad (13)$$

Ее точность можно оценить по графику $\bar{\gamma}(\gamma)$, построенному на рис. 5, б. Формула (13) определяет соотношение между \bar{S}_{21} и M_{21} . Если распространить ее для оценки других недиагональных коэффициентов матрицы M , то рассчитанное из \bar{S}_{12} значение M_{12} в интервале $0 \leq \gamma \leq 0.48$ оказывается меньшим 10^{-4} .

Сопоставление выражения (12) с результатами, полученными в работе для логистических отображений [23], позволяет заключить, что в обоих случаях экспериментальные зависимости хорошо аппроксимируются степенными функциями, однако, значение показателей для разных систем различаются. Что касается связанных кубических отображений, то соотношение (13) выполняется не только для выбранного $\alpha = 3.65$, но и для других значений параметра, соответствующих режиму развитого хаоса. Например, при $\alpha = 3.9$ и $\gamma = 0.1$ расчетные значения коэффициентов влияния равны $\bar{S}_{12} \simeq 0.005$, $\bar{S}_{21} \simeq 0.31$, что дает оценку коэффициента связи $\bar{\gamma} \simeq 0.11$, близкую к истинному значению.

Стochasticская система. Полученные в предыдущем разделе результаты относятся к чисто детерминированной системе с хаотической динамикой. Насколько они изменяются при наличии в системе (10) внутреннего шума? Для рассмотрения этого вопроса проведем исследования $S_{ij}(\gamma)$ при тех же параметрах и $\sigma = 0.02$.

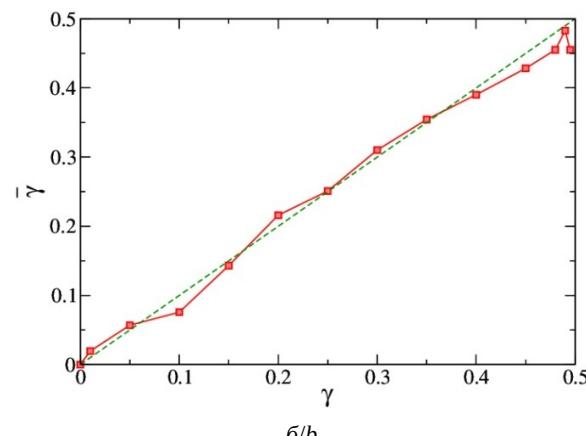


Рис. 5. Зависимости $\bar{S}_{12}(\gamma)$ и $\bar{S}_{21}(\gamma)$ для системы (10) (а); график зависимости оценки коэффициента связи по формуле (13) от его истинного значения (б) (цвет онлайн)

Fig. 5. Graphs $\bar{S}_{12}(\gamma)$ and $\bar{S}_{21}(\gamma)$ for the system (10) (a); graph of the dependence of the estimate of the coupling coefficient obtained by the formula (13) from its true value (b) (color online)



Данная амплитуда шума примерно на порядок меньше величины хаотического сигнала, поэтому его можно полагать шумом средней интенсивности. При $\sigma \geq 0.03$ происходит быстрый уход траектории на бесконечность, что делает измерения невозможными.

Результаты расчетов для стохастической системы представлены на рис. 6, где значения коэффициентов \bar{S}_{12} и \bar{S}_{21} отмечены знаками «+» и «*», соответственно. Для сравнения на том же рисунке сплошными линиями отображены значения коэффициентов для системы без шума, взятые с рис. 3, а. Из сопоставления графиков видно, что в интервале $0 \leq \gamma < 0.495$ шум практически не влияет на значения коэффициента S_{12} . Существенное влияние наблюдается лишь при $\gamma \geq 0.495$, то есть в области полной синхронизации хаоса. Здесь в «чистой» системе правильная оценка связанныстости невозможна, однако, наличие шума позволяет ее провести. Причина этого очевидна: шум разрушает режим полной синхронизации хаоса, при котором $x_1 = x_2$, позволяя тем самым успешно применить данный алгоритм. Таким образом, умеренная стохастичность системы не мешает, а даже помогает работе настоящего метода.

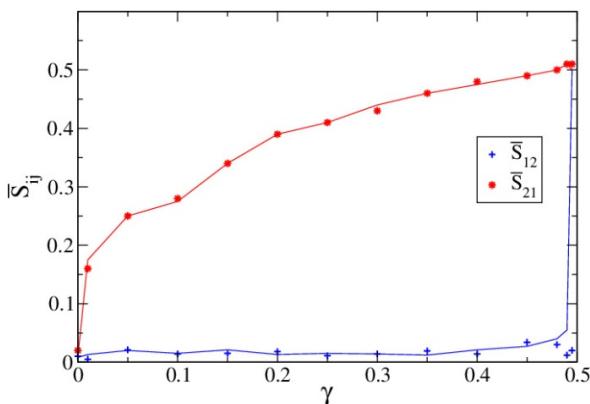


Рис. 6. Зависимость $\bar{S}_{12}(\gamma)$ и $\bar{S}_{21}(\gamma)$ для системы (10) при наличии шума с интенсивностью $\sigma = 0.02$ (цвет онлайн)
Fig. 6. Dependence $\bar{S}_{ij}(\gamma)$ for the system (10) in the presence of noise with intensity $\sigma = 0.02$ (color online)

5. Ансамбль с двунаправленными связями

Будем рассматривать двунаправленное взаимодействие хаотических отображений:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f(x_1(n)) + \gamma_{12}(f(x_1(n)) - f(x_2(n))) + \\ &\quad + \sigma\xi_1(n) \\ x_2(n+1) &= f(x_2(n)) + \gamma_{21}(f(x_1(n)) - f(x_2(n))) + \\ &\quad + \sigma\xi_2(n), \end{aligned} \quad (14)$$

где γ_{12} – коэффициент воздействия второго отображения на первое, а γ_{21} – коэффициент воздействия первого на второе. Матрица связей для данной системы имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \gamma_{12} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 1 - \gamma_{21} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Система (14) имеет более богатую динамику, чем (10). При том же $\alpha = 3.65$ в зависимости от параметров связи можно получить множество как регулярных (периодических), так и хаотических режимов. Периодические режимы не позволяют использовать данный алгоритм, поскольку задача предсказания для них решается тривиальным образом. Поэтому, при отсутствии шума можно использовать только те значения параметров связи, что соответствуют хаотическим колебаниям.

Рассмотрим диагностику связанныстости ансамбля (14) в условия хаоса. Выберем значения связей: $\gamma_{12} = 0.1$ и $\gamma_{21} = 0.3$, соответствующие режиму объединенного хаоса, фазовый портрет которого показан на рис. 7, а. Несмотря на различия с фазовыми портретами на рис. 3, между ними имеется существенное качественное сходство. Поэтому, можно ожидать, что для данного режима алгоритм окажется работоспособным. Действительно, расчет коэффициентов S_{ij} , проведенный в соответствии с ранее описанной процедурой, дает значения, флюктуирующие вокруг $\bar{S}_{12} \simeq 0.28$ и $\bar{S}_{21} \simeq 0.41$; при этом их функции распределения (рис. 8, а), имеют резко выраженный резонансный характер. При использовании формулы (13) получаем оценку коэффициентов связей: $\bar{\gamma}_{12} \simeq 0.08$ и $\bar{\gamma}_{21} \simeq 0.25$, достаточную близкую к истинным значениям. При этом добавление в систему небольшого шума ($\sigma \leq 0.03$) почти не меняет полученные результаты.

Как уже было сказано выше, регулярная динамика взаимодействующих систем не позволяет использовать метод причинности по Грэнджеру. Однако, если в системе присутствует шум, то колебания подсистем становятся апериодическими и можно произвести обучение ИНС. Будет ли работать метод в этом случае? Выберем значения связей, при которых система (14) демонстрирует какой-либо регулярный режим. Например, при $\gamma_{12} = 0.1$ и $\gamma_{21} = 0.2$ фазовый портрет представляет собой цикл периода два (см. рис. 7, б). Если при указанных значениях связей добавить в систему небольшой шум ($\sigma = 0.02$), то колебания перестанут быть регулярными, и фазовый портрет (рис. 7, б) будет представлять набор точек, случайно расположенных в окрестности

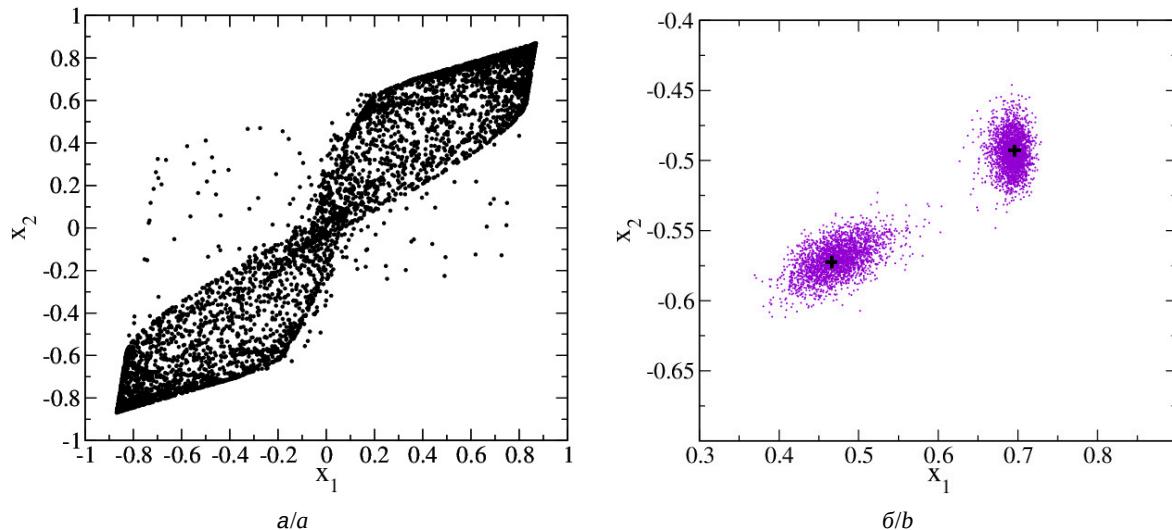


Рис. 7. Фазовые портреты системы (14) ($\alpha = 3.65$) для: $\gamma_{12} = 0.1$, $\gamma_{21} = 0.3$, $\sigma = 0$ (а); $\gamma_{12} = 0.1$, $\gamma_{21} = 0.2$, $\sigma = 0.02$ (б) (аттрактор детерминированной системы при $\sigma = 0$ отмечен знаками «+») (цвет онлайн)

Fig. 7. Phase portraits of the system (14) ($\alpha = 3.65$) at: $\gamma_{12} = 0.1$, $\gamma_{21} = 0.3$ (a), $\sigma = 0$; $\gamma_{12} = 0.1$, $\gamma_{21} = 0.2$, $\sigma = 0.02$ (b) (an attractor of the deterministic system at $\sigma = 0$ is marked by “+”) (color online)

изначального цикла. Теперь, стохастический характер динамики позволяет сделать прогноз для коэффициентов влияния. Полученные значения будут зависеть от величины шума. На рис. 8, б построены графики $\bar{S}_{12}(\sigma)$ и $\bar{S}_{21}(\sigma)$, а также приведен разброс указанных величин. Анализ графиков показывает, что при малых интенсивностях шума, прогнозируемые значения коэффициентов влияния изменяются в широких пределах. При увеличении шума до $\sigma \geq 0.03$ получаемые значения стабилизируются в окрестности величин $\bar{S}_{12} \simeq 0.07$ и $\bar{S}_{21} \simeq 0.4$, соответственно. В то же

время формула (13) к настоящему случаю оказывается плохо применимой. Она дает оценки коэффициентов связи $\bar{\gamma}_{12} \simeq 0.0001$ и $\bar{\gamma}_{21} \simeq 0.23$, значение первой из которых существенно меньше истинного значения.

Аналогичная ситуация наблюдается и для других регулярных режимов. Таким образом, для регулярных колебаний алгоритм работает лишь при наличии значительного шума и в этом случае дает качественную оценку связности, т. е. позволяет определить, что $\gamma_{21} > \gamma_{12}$.

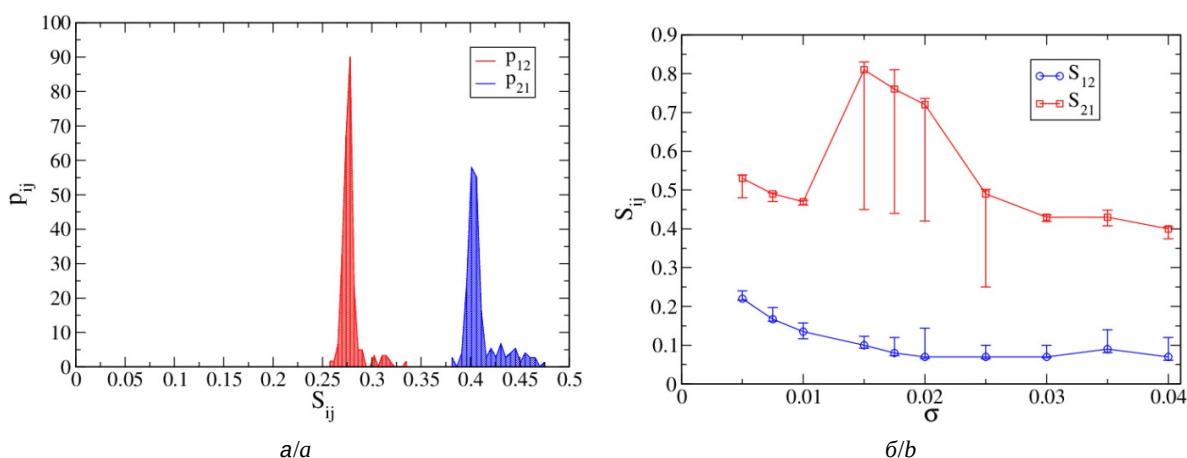


Рис. 8. Плотности вероятности значений коэффициентов S_{12} и S_{21} для системы (14) при $\alpha = 3.65$, $\gamma_{12} = 0.1$, $\gamma_{21} = 0.2$, $\sigma = 0.02$ (а); зависимость коэффициентов S_{12} и S_{21} от σ (б) (вертикальные линии показывают разброс значений) (цвет онлайн)

Fig. 8. Probability densities of coefficients S_{12} and S_{21} for the system (14) at $\alpha = 3.65$, $\gamma_{12} = 0.1$, $\gamma_{21} = 0.2$, $\sigma = 0.02$ (a); dependence of coefficients S_{12} and S_{21} on σ (b) (the vertical lines mark spread of their values) (color online)



Заключение

В статье рассмотрен метод выявления структуры связей в сети хаотических отображений с шумом. Метод основан на обучении ИНС предсказанию будущей динамики ансамбля на основании его текущего состояния и использует процедуру регуляризации. В отличие от предыдущего исследования [23] в настоящей работе рассматривались как полностью детерминированные системы, так и системы с шумом небольшой интенсивности. Кроме того, использованные здесь кубические отображения обладают более сложной динамикой, демонстрируя сочетание хаотических колебаний в окрестности симметричных неподвижных точек со случайными перескоками между ними.

Анализ полученных результатов показал, что в режиме развитого несинхронного хаоса метод позволяет выявлять степень влияния отображений друг на друга, как при односторонней, так и при взаимной связи. При этом, шум небольшой интенсивности практически не влияет на результаты измерений. Более того, шум может играть конструктивную роль, позволяя определять связанность в тех случаях, когда в «чистых» системах измерения становятся невозможными, например, в режиме синхронизации хаоса или в случае регулярных режимов.

Проведенный в работе расчет зависимости коэффициентов влияния от величины связи позволил получить формулу для количественной оценки коэффициентов связи по результатам измерений связанности. Полученное соотношение имеет вид степенной функции, непрерывно и монотонно возрастающей с ростом связи. Погрешность экспериментальной оценки коэффициентов связи в режиме хаоса в большей части диапазона составляет не более 10 процентов от величины. Для зашумленных регулярных режимов формула оценки связи перестает работать и метод позволяет выявить лишь качественное соотношение между коэффициентами связи.

Список литературы

1. Granger C. W. J. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica*. 1969. Vol. 37, iss. 3. P. 424–438. <https://doi.org/10.2307/1912791>
2. Granger C. W. J. Testing for causality. A personal viewpoint // *J. Economic Dynamics and Control*. 1980. Vol. 2. P. 329–352. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(80\)90069-X](https://doi.org/10.1016/0165-1889(80)90069-X)
3. Сысоев И. В. Диагностика связаннысти по хаотическим сигналам нелинейных систем: решение обратных задач. Саратов : Издательство «КУБиК», 2019. 46 с.
4. Hesse R., Molle E., Arnold M., Schack B. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies // *Journal of Neuroscience Methods*. 2003. Vol. 124, iss. 1. P. 27–44. [https://doi.org/10.1016/S0165-0270\(02\)00366-7](https://doi.org/10.1016/S0165-0270(02)00366-7)
5. Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Смирнов Д. А., Тасс П. А. Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложение в нейрофизиологии) // Успехи физических наук. 2008. Т. 178, № 3. С. 323–329. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200803h.0323>
6. Мохов И. И., Смирнов Д. А. Диагностика причинно-следственной связи солнечной активности и глобальной приповерхностной температуры Земли // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2008. Т. 44, № 3. С. 283–293.
7. Мохов И. И., Смирнов Д. А. Эмпирические оценки воздействия естественных и антропогенных факторов на глобальную приповерхностную температуру // Доклады Академии наук. 2009. Т. 426, № 5. С. 679–684. EDN: KMLUCJ
8. Сысоев И. В., Караваев А. С., Наконечный П. И. Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом трепоре методом грейнджеровской причинности // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 4. С. 81–90. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90>
9. Сысоева М. В., Сысоев И. В. Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического приступа // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38, № 3. С. 103–110.
10. Sysoev I. V., Sysoeva M. V. Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // *Physica D*. 2015. Vol. 309. P. 9–19. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.07.005>
11. Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M. Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality // *Physics Letters A*. 2004. Vol. 324, № 1. P. 26–35. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.02.032>
12. Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // *Physical Review E*. 2006. Vol. 73, iss. 6, pt. 2. Art. 066216. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.066216>
13. Корнилов М. В., Сысоев И. В. Реконструкция архитектуры связей в цепочке из трех односторонне связанных систем методом причинности по Грейнджеру // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44, вып. 10. С. 86–95. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2018.10.46103.17201>
14. Grishchenko A. A., van Rijn C. M., Sysoev I. V. Methods for statistical evaluation of connectivity estimates in epileptic brain // *Journal of Biological Systems*. 2023. Vol. 31, № 02. P. 673–690. <https://doi.org/10.1142/S0218339023500237>
15. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. 1104 с.

16. Галушкин А. И. Нейронные сети: основы теории. М. : Издательство «Горячая линия – Телеком», 2012. 496 с.
17. Kulkarni D. R., Parikh J. C., Pandya A. S. Dynamic predictions from time series data – an artificial neural network approach // International Journal of Modern Physics C. 1997. Vol. 8, № 06. P. 1345–1360. <https://doi.org/10.1142/S0129183197001193>
18. de Oliveira K. A., Vannucci A., Da Silva E. C. Using artificial neural networks to forecast chaotic time series // Physica A. 2000. Vol. 284, iss. 1–4. P. 393–404. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00215](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00215)
19. Антипов О. И., Неганов В. А. Прогнозирование и фрактальный анализ хаотических процессов дискретно-нелинейных систем с помощью нейронных сетей // Доклады Академии наук. 2011. Т. 436, № 1. С. 34–37. EDN: NDJQML
20. Шабунин А. В. Нейронная сеть как предсказатель динамики дискретного отображения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 5. С. 58–72. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72>
21. Tank A., Covert I., Foti N., Shojaie A., Fox E. Neural granger causality for nonlinear time Series. URL: <https://arxiv.org/pdf/1802.05842v1> (дата обращения: 20.09.2024).
22. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.
23. Шабунин А. В. Определение структуры связей в ансамбле хаотических отображений при помощи нейронной сети // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5. С. 636–653. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003111>
24. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 69, № 1. P. 32–47 <https://doi.org/10.1143/PTP.69.32>
25. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. The mapping approach // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 70, № 5. P. 1240–1248. <https://doi.org/10.1143/PTP.70.1240>
26. Astakhov V., Shabunin A., Klimshin A., Anishchenko V. In-phase and antiphase complete chaotic synchronization in symmetrically coupled discrete maps // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2002. Vol. 7, № 4. P. 215–229. <https://doi.org/10.1155/S1026022602000250>
- [Diagnostics of connectivity by chaotic signals of nonlinear systems: Solving reverse problems]. Saratov, Izdatel'stvo "Kubik", 2019. 46 p. (in Russian).
4. Hesse R., Molle E., Arnold M., Schack B. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies. *Journal of Neuroscience Methods*, 2003, vol. 124, iss. 1, pp. 27–44. [https://doi.org/10.1016/S0165-0270\(02\)00366-7](https://doi.org/10.1016/S0165-0270(02)00366-7)
5. Bezruchko B. P., Ponomarenko V. I., Prohorov M. D., Smirnov D. A., Tass P. A. Modeling nonlinear oscillatory systems and diagnostics of coupling between them using chaotic time series analysis: Applications in neurophysiology. *Physics – Uspekhi*, 2008, vol. 51, iss. 3, pp. 304–310. <https://doi.org/10.1070/pu2008v05n03abeh006494>
6. Mokhov I. I., Smirnov D. A. Diagnostics of a cause-effect relation between solar activity and the Earth's global surface temperature. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 263–272. <https://doi.org/10.1134/S0001433808030018>
7. Mokhov I. I., Smirnov D. A. Empirical estimates of the influence of natural and anthropogenic factors on the global surface temperature. *Doklady Earth Sciences*, 2009, vol. 427, no. 1, pp. 798–803. <https://doi.org/10.1134/S1028334X09050201>
8. Sysoev I. V., Karavaev A. S., Nakonechny P. I. Role of model nonlinearity for Granger causality based coupling estimation for pathological tremor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2010, vol. 18, no. 4, pp. 81–90. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90>
9. Sysoeva M. V., Sysoev I. V. Mathematical modeling of encephalogram dynamics during epileptic seizure. *Technical Physics Letters*, 2012, vol. 38, no. 2, pp. 151–154. <https://doi.org/10.1134/S1063785012020137>
10. Sysoev I. V., Sysoeva M. V. Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes. *Physica D*, 2015, vol. 309, pp. 9–19. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.07.005>
11. Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M. Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality. *Physics Letters A*, 2004, vol. 324, no. 1, pp. 26–35. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.02.032>
12. Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series. *Physical Review E*, 2006, vol. 73, iss. 6, pt. 2, art. 066216. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.066216>
13. Kornilov M., Sysoev I. Recovering the architecture of links in a chain of three unidirectionally coupled systems using the Granger-causality test. *Technical Physics Letters*, 2018, vol. 44, iss. 5, pp. 445–449. <https://doi.org/10.1134/S1063785018050206>
14. Grishchenko A. A., van Rijn C. M., Sysoev I. V. Methods for statistical evaluation of connectivity estimates in epileptic Brain. *Journal of Biological Systems*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 673–690. <https://doi.org/10.1142/S0218339023500237>
15. Haykin S. *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*. New Jersey, Prentice Hall, 1999. 842 p.
16. Galushkin A. I. *Neyronnye seti: osnovy teorii [Neural Networks: Fundamentals of Theory]*. Moscow, Izda-

References

- Granger C. W. J. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*, 1969, vol. 37, iss. 3, pp. 424–438. <https://doi.org/10.2307/1912791>
- Granger C. W. J. Testing for causality. A personal viewpoint. *J. Economic Dynamics and Control*, 1980, vol. 2, pp. 329–352. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(80\)90069-X](https://doi.org/10.1016/0165-1889(80)90069-X)
- Sysoev I. V. *Diagnostika svyaznosti po khaoticheskim signalam nelineinykh sistem: reshenie obratnykh zadach* [Diagnostics of connectivity by chaotic signals of nonlinear systems: Solving reverse problems]. Saratov, Izdatel'stvo "Kubik", 2019. 46 p. (in Russian).
- Hesse R., Molle E., Arnold M., Schack B. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies. *Journal of Neuroscience Methods*, 2003, vol. 124, iss. 1, pp. 27–44. [https://doi.org/10.1016/S0165-0270\(02\)00366-7](https://doi.org/10.1016/S0165-0270(02)00366-7)
- Bezruchko B. P., Ponomarenko V. I., Prohorov M. D., Smirnov D. A., Tass P. A. Modeling nonlinear oscillatory systems and diagnostics of coupling between them using chaotic time series analysis: Applications in neurophysiology. *Physics – Uspekhi*, 2008, vol. 51, iss. 3, pp. 304–310. <https://doi.org/10.1070/pu2008v05n03abeh006494>
- Mokhov I. I., Smirnov D. A. Diagnostics of a cause-effect relation between solar activity and the Earth's global surface temperature. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 263–272. <https://doi.org/10.1134/S0001433808030018>
- Mokhov I. I., Smirnov D. A. Empirical estimates of the influence of natural and anthropogenic factors on the global surface temperature. *Doklady Earth Sciences*, 2009, vol. 427, no. 1, pp. 798–803. <https://doi.org/10.1134/S1028334X09050201>
- Sysoev I. V., Karavaev A. S., Nakonechny P. I. Role of model nonlinearity for Granger causality based coupling estimation for pathological tremor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2010, vol. 18, no. 4, pp. 81–90. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90>
- Sysoeva M. V., Sysoev I. V. Mathematical modeling of encephalogram dynamics during epileptic seizure. *Technical Physics Letters*, 2012, vol. 38, no. 2, pp. 151–154. <https://doi.org/10.1134/S1063785012020137>
- Sysoev I. V., Sysoeva M. V. Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes. *Physica D*, 2015, vol. 309, pp. 9–19. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.07.005>
- Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M. Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality. *Physics Letters A*, 2004, vol. 324, no. 1, pp. 26–35. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.02.032>
- Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series. *Physical Review E*, 2006, vol. 73, iss. 6, pt. 2, art. 066216. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.066216>
- Kornilov M., Sysoev I. Recovering the architecture of links in a chain of three unidirectionally coupled systems using the Granger-causality test. *Technical Physics Letters*, 2018, vol. 44, iss. 5, pp. 445–449. <https://doi.org/10.1134/S1063785018050206>
- Grishchenko A. A., van Rijn C. M., Sysoev I. V. Methods for statistical evaluation of connectivity estimates in epileptic Brain. *Journal of Biological Systems*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 673–690. <https://doi.org/10.1142/S0218339023500237>
- Haykin S. *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*. New Jersey, Prentice Hall, 1999. 842 p.
- Galushkin A. I. *Neyronnye seti: osnovy teorii [Neural Networks: Fundamentals of Theory]*. Moscow, Izda-



- tel'stvo "Goryachaya Liniya – Telekom", 2012. 496 p. (in Russian).
17. Kulkarni D. R., Parikh J. C., Pandya A. S. Dynamic predictions from time series data – an artificial neural network approach. *International Journal of Modern Physics C*, 1997, vol. 8, no. 06, pp. 1345–1360. <https://doi.org/10.1142/S0129183197001193>
 18. de Oliveira K. A., Vannucci A., Da Silva E. C. Using artificial neural networks to forecast chaotic time series. *Physica A*, 2000, vol. 284, iss. 1–4, pp. 393–404. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00215](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00215)
 19. Antipov O. I., Negamov V. A. Neural network prediction and fractal analysis of the chaotic processes in discrete nonlinear systems. *Doklady Physics*, 2011, vol. 56, no. 1, pp. 7–9. <https://doi.org/10.1134/S1028335811010034>
 20. Shabunin A. V. Neural network as a predictor of discrete map dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 5, pp. 58–72. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72>
 21. Tank A., Covert I., Foti N., Shojaie A., Fox E. *Neural granger causality for nonlinear time series*. URL: <https://arxiv.org/pdf/1802.05842v1> (accessed September 20, 2024).
 22. Tihonov A. N. On incorrect linear algebra problems and a stable solution method. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1965, vol. 163, no. 3, pp. 591–594 (in Russian).
 23. Shabunin A. V. Searching the structure of couplings in a chaotic maps ensemble by means of neural networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 32, no. 5, pp. 636–653. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003111>
 24. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, 1983, vol. 69, no. 1, pp. 32–47. <https://doi.org/10.1143/PTP.69.32>
 25. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. The mapping approach. *Progress of Theoretical Physics*, 1983, vol. 70, no. 5, pp. 1240–1248. <https://doi.org/10.1143/PTP.70.1240>
 26. Astakhov V., Shabunin A., Klimshin A., Anishchenko V. In-phase and antiphase complete chaotic synchronization in symmetrically coupled discrete maps. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2002, vol. 7, no. 4, pp. 215–229. <https://doi.org/10.1155/S1026022602000250>

Поступила в редакцию 26.03.2025; одобрена после рецензирования 23.04.2025;
принята к публикации 15.05.2025; опубликована 29.08.2025

The article was submitted 26.03.2025; approved after reviewing 23.04.2025;
accepted for publication 15.05.2025; published 29.08.2025