



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 147–156

Izvestiya of Saratov University. Physics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 147–156

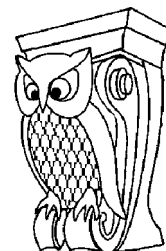
<https://fizika.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-147-156>, EDN: UPIJYC

Научная статья

УДК 530.182:004.942:616-036.22

Восстановление параметров компартментной модели динамических систем на примере эпидемиологической модели SIR



М. А. Коробко, А. В. Бух[✉]

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Коробко Михаил Алексеевич, магистрант кафедры радиофизики и нелинейной динамики, m.a.korobko_1@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0004-5697-0329>

Бух Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики, buh.andrey@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4786-6157>, AuthorID: 1133338

Аннотация. Представлен улучшенный алгоритм оценки значений управляющих параметров модельных динамических систем. Описан принцип работы алгоритма и продемонстрирована его работа на примере модели распространения эпидемий SIR в виде системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод демонстрирует хорошие результаты по восстановлению параметров данной модели как в случае установившихся решений, отличных от состояния равновесия, так и в случае переходных процессов. Рассмотрено влияние шума в исходных данных на качество определения значений модельных параметров.

Ключевые слова: обратная задача, восстановление параметров, динамическая система, дифференциальная модель, модель распространения эпидемий, компартментная модель

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Совета по грантам Президента Российской Федерации СП-774.2022.5.

Для цитирования: Коробко М. А., Бух А. В. Восстановление параметров компартментной модели динамических систем на примере эпидемиологической модели SIR // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 147–156. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-147-156>, EDN: UPIJYC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Recovery of compartment model parameters of dynamical systems for the epidemiological SIR model

М. А. Korobko, А. V. Bukh[✉]

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Mikhail A. Korobko, m.a.korobko_1@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0004-5697-0329>

Andrei V. Bukh, buh.andrey@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4786-6157>, AuthorID: 1133338

Abstract. Background and Objectives: In problems where the model of dynamical system is known and the parameters need to be determined, researchers most often encounter the problem of "getting stuck" in local minima of the cost function. Most known methods do not guarantee finding the global minimum, although they increase the probability of finding it. A known method of avoiding local maxima, which consists of simultaneously using several cost functions that behave differently in the vicinity of local minima, detecting the minimum as local, in some cases does not find a way to leave the region of the local minimum of the cost function. In this paper, we propose an improvement in the latter method, which allows finding the global minimum with a higher probability. **Materials and Methods:** In this paper, 4 different error values were calculated at each iteration of the parameter selection algorithm. The parameter values were saved when at least one of the cost functions reaches a new minimum value. Both the parameters were varied, and the random choice between the saved sets of parameters corresponding to the smallest value of at least one of the cost functions was made, when the procedure is "getting stuck" in local minima. **Results:** An improved algorithm for estimating the values of control parameters of ordinary differential equation models has been presented. The method demonstrates good results in restoring the parameters of the considered dynamical system both in the case of steady-state solutions different from the equilibrium state and in the case of transient processes. **Conclusion:** As the results of numerical modeling using the described algorithm have shown, preserving several sets of parameters that correspond to the best values of error values allows us to avoid local minima of cost functions with a higher probability in the presence of noise.

Keywords: inverse problem, parameter recovery, dynamical system, differential model, epidemic spread model, compartment model



Acknowledgments: This work was supported by the Grant Council of the President of the Russian Federation (project No. SP-774.2022.5).

For citation: Korobko M. A., Bukh A. V. Recovery of compartment model parameters of dynamical systems for the epidemiological SIR model. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 147–156 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-147-156>, EDN: UPIJYC

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Модели динамических систем в виде обыкновенных дифференциальных уравнений широко применяются во многих научных областях, включая физику, химию, биологию, медицину, инженерию, науки об окружающей среде, климатические исследования [1–5]. Когда исследователи работают с системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, они сталкиваются с прямой задачей. Она заключается в определении динамики модели за все время наблюдения при определенных начальных и граничных условиях, а также в оценке чувствительности модели к изменениям начальных условий. Более сложная обратная задача заключается в определении значений параметров модели в форме дифференциального уравнения на основе экспериментальных данных (временных реализаций). Сложность задачи обусловливается наличием множества комбинаций параметров, которые управляют поведением изучаемой системы.

При построении моделей в форме обыкновенных дифференциальных уравнений существует три ситуации:

- законы функционирования моделируемой системы не известны, и возможно использование только описательной статистики;
- исследуемая динамическая система точно подчиняется известным законам, а ее параметры явным образом включены в модель;
- структура изучаемой системы известна частично, так что ее параметры остаются неизвестными [6].

В последнем случае самый неоптимальный способ поиска параметров – это их перебор, поскольку даже в случае небольшого количества параметров, число их комбинаций велико. По этой причине процесс определения параметров по экспериментальным данным целесообразно оптимизировать.

В задачах, в которых модель известна, а параметры требуется определить, исследователи чаще всего сталкиваются с проблемой «застревания» в локальных минимумах функции стоимости [7, 8]. Большинство известных методов

не гарантирует нахождение глобального минимума, хотя и увеличивают вероятность его найти [9]. Наиболее распространенными в задачах оптимизации параметров математической модели являются градиентные методы, которые состоят в изменении функции, дающей квадратичную суммарную ошибку, в сторону ее уменьшения [10]. Такие способы, как метод Ньютона [11], метод сопряженных градиентов [12] и другие усовершенствования метода градиентного спуска также подразумевают известность решения модели в общем явном виде, в силу чего их применение для моделей в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений затруднено.

Кроме того, градиентные методы характеризуются существенным недостатком – попаданием функции стоимости в локальные минимумы. Поэтому их часто применяют совместно с другими методами, увеличивающими вероятность избежать подобную ситуацию. Некоторые из этих решений включают в себя методы мултистартовой оптимизации [13], многокритериальной оптимизации [14], случайных перезапусков [15], имитации отжига [16], оптимизации серого волка [17], кита [18], пламени мотылька [19], алгоритм оптимизации роевого интеллекта [20] и др.

В [8] был предложен новый способ ухода от локальных максимумов, состоящий в одновременном использовании нескольких функций стоимости, которые ведут себя по-разному в окрестности локальных минимумов. В рамках настоящей работы мы предлагаем улучшение метода, раскрытого в [8], позволяющее с большей вероятностью находить глобальный минимум. Исследование проведено на примере компартментной эпидемиологической модели SIR с нелинейной скоростью распространения вируса [21], на которой, к примеру, проявляется недостаток ранее предложенного в [8] метода.

Компартментные эпидемиологические модели с нелинейными характеристиками в настоящее время широко используются в области нелинейной динамики [22, 23]. Следуя работе [8], на каждой итерации алгоритма подбора параметров вычислялись 4 различные величины ошибки. Однако значения параметров сохранялись в памяти компьютера по достижении



нового минимального значения хотя бы по одной из функций стоимости. В случае «застревания» функции стоимости осуществлялись не только вариации параметров, но и случайный выбор между сохраненными наборами параметров, отвечающими наименьшему значению хотя бы одной из функций стоимости.

1. Описание улучшенного алгоритма восстановления параметров дифференциальной модели

Поиск параметров дифференциальной модели представляет собой сложную задачу из-за необходимости интегрирования модели для оценки её соответствия данным, что требует учёта предыдущих состояний, поскольку без этого состояние модели в каждый момент времени не может быть определено. Однако это открывает возможность введения различных функций стоимости, основанных на эволюции модели. Рассмотрим модель динамической системы, представляемую в следующем общем виде:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}(\vec{u}, \vec{p}), \quad (1)$$

где вектор \vec{u} задает фазовое состояние модели в произвольный момент времени t , а векторная функция $\vec{F}(\vec{u}, \vec{p})$ определяет эволюцию модели в зависимости от значений векторных параметров \vec{p} и может быть, например, задана в виде многомерного степенного полинома с параметрами перед каждым из слагаемых этого полинома. Предлагаемый алгоритм разработан для описанной модели в общем виде, и большинство моделей динамических систем можно свести к такому виду.

В качестве основной ошибки E_f будем использовать величину

$$E_f = \frac{1}{PN} \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^N (x_{j,i} - y_{j,i})^2, \quad (2)$$

где P – количество точек в исходных данных, N – размерность фазового пространства исходных данных модели, индекс $j = 1, 2, \dots, N$ отвечает номеру динамической переменной, а индекс i – номеру момента времени t_i , $x_{j,i}$ – значение переменной с номером j в момент времени t_i для исходных данных. При расчете E_f для получения значений $y_{j,i} = u_{j,i}$, соответствующих значениям $x_{j,i}$, настраиваемая модель интегрируется независимо от исходных данных; только начальное состояние выбирается равным соответствующему исходным данным $x_{0,i}$ начальному

состоянию. Значения $y_{j,i} = u_{j,i}$ получаются в результате интегрирования модели (1) в течение времени $t \in [t_0; t_P]$. Отклонение состояний модели может значительно различаться для разных точек, поэтому в качестве второй оценки целесообразно также рассмотреть максимальное значение отклонений

$$\max E_f = \max_{i=1}^P \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_{j,i} - y_{j,i})^2, \quad (3)$$

которое также подлежит минимизации (под \max понимается оператор нахождения максимального значения). В уравнении (3) обозначения соответствуют обозначениям в уравнении (2).

В функциях стоимости (2) и (3) ошибка оценивается за весь период рассмотрения модели без коррекции начальных условий в промежуточных точках, известных из исходных данных $x_{j,i}$, в результате этого на выбор параметров модели оказывает влияние только вклад начальных условий (отвечающих исходным данным в начале процесса). Для учета влияния всех точек исходных данных при моделировании в качестве функции стоимости используется значение [8]

$$E_p = \frac{1}{PN} \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^N (x_{j,i} - z_{j,i})^2, \quad (4)$$

где значения $z_{j,i} = u_{j,i}$, соответствующие исходным данным $x_{j,i}$ в моменты времени с номерами i для переменных с номерами j , получается при корректировке начальных условий в модели так, чтобы они совпадали с исходными данными в контрольных точках. Другими словами, начальные условия модели устанавливаются в каждый из моментов времени t_i (кроме последнего t_P), после чего модели интегрируется до следующего момента времени t_{i+1} . Значения $z_{j,i}$ получаются в результате интегрирования подстраиваемой модели в течение промежутка времени $t \in [t_i; t_{i+1}]$. Аналогичным образом рассматривается не только средняя ошибка (4), но и максимальное отклонение от данной траектории

$$\max E_p = \max_{i=1}^P \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_{j,i} - z_{j,i})^2. \quad (5)$$

Определенные таким образом ошибки позволяют оценивать степень соответствия модели при заданных параметрах исходным данным. При наилучшем соответствии $E_f = \max E_f = E_p = \max E_p = 0$. Для восстановления значений параметров модели, представляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, будем рассматривать две копии такой модели,



первая из которых используется для создания исходных данных, по которым восстанавливаются параметры во второй модели. Первая система численно интегрируется методом Рунге – Кутты с достаточно малым шагом 0.001, однако для второй системы в качестве исходных данных выбирается небольшое количество точек от 10 до 100 из исходной временной реализации, полученной в первой копии модели. Точки выбираются так, чтобы охватить как можно больше уникальных наборов значений переменных, например, с равномерным шагом по времени из части временной реализации, характеризующейся немонотонным поведением.

Ниже представлено описание улучшенного (в сравнении с [8]) алгоритма восстановления параметров на примере эпидемиологической модели SIR [21], описываемой системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = B - DS - \beta I(S + vIS) + \gamma R, \\ \frac{dI}{dt} = \beta I(S + vIS) - \alpha I - DI, \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I - \gamma R - DR, \end{cases} \quad (6)$$

Модель является трехмерной ($N = 3$) и характеризуется наличием зависимости между переменными величинами: $S(t) + I(t) + R(t) = M(t)$, где $M(t)$ – численность популяции, которая по отношению к эпидемиологическим процессам изменяется медленно. Переменные S , I , R определяют численности способных заразиться, инфицированных и имеющих иммунитет частей популяции, соответственно. Параметры B , D определяют естественные прирост и убыль населения, соответственно; β , v – линейную и нелинейную скорости распространения эпидемии, соответственно; γ – скорость потери иммунитета; α – скорость приобретения иммунитета. Алгоритм, представленный в работе [8], не обеспечивает восстановление параметров эпидемиологической модели SIR (6), что может быть связано с наличием сильной взаимосвязанностью переменных $S(t) + I(t) + R(t) = M(t)$ и наличием большого количества сосуществующих решений, характеризующихся нейтральной устойчивостью в одном из направлений трехмерного фазового пространства [21].

На подготовительном этапе подстройки параметров необходимо записать модель таким образом, чтобы она соответствовала системе (1) с многомерными степенными полиномами в правой части. В случае $\vec{u} = (S, I, R)$ такое преобразование для модели (6) выглядит следующим

образом:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = p_0 - p_1 S - p_2 IS - p_3 I^2 S + p_4 R, \\ \frac{dI}{dt} = p_2 IS + p_3 I^2 S - p_5 I, \\ \frac{dR}{dt} = p_6 I - p_7 R, \end{cases} \quad (7)$$

где $p_0 = B$, $p_1 = D$, $p_2 = \beta$, $p_3 = \beta v$, $p_4 = \gamma$, $p_5 = \alpha + D$, $p_6 = \alpha$, $p_7 = \gamma + D$. Стоит отметить, что количество параметров в приведенной к виду (1) модели (7) может отличаться от количества параметров в исходной модели (6) в большую сторону из-за введения параметров для каждого слагаемого многомерного степенного полинома. В рассматриваемом случае количество параметров в исходной модели равно 6, тогда как в приведенной к виду (1) модели количество параметров равно 7. Вместе с тем, результаты проведенного исследования показали, что во всех случаях алгоритм находит набор параметров, сводимый к исходным параметрам. Начальные значения массива параметров $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7)$ в модели (7) задаются произвольным образом или вычисляются на основе произвольных значений параметров в модели SIR в виде (6). Также на подготовительном этапе произвольным образом выбирается параметр для произвольного изменения (уменьшения или увеличения). После установки произвольных начальных значений параметров p_k , $k = 1, 2, \dots, 7$, произвольного выбора параметра для изменения и характера его изменения (уменьшения или увеличения произвольным образом) и вычисления стартовых значений ошибок E_f , $\max E_f$, E_p , $\max E_p$ в соответствии с выбранными параметрами циклично (до достижения требуемой точности – минимума ошибки) выполняются следующие действия:

1. Производится небольшое (порядка $10^{-4}\%$) изменение значения одного из параметров p_k в соответствии с установленным для него характером изменения (уменьшения или увеличения).

2. Вычисляются ошибки для измененного вектора параметров и сравниваются с ошибками на предыдущей итерации. Если хотя бы одна ошибка уменьшилась, успешная модификация параметров сохраняется с заменой предыдущей успешной модификации для данной ошибки. При этом успешные модификации по другим функциям стоимости не заменяются. Изменение (уменьшение или увеличение) продолжается



с ускорением до тех пор, пока оно приводит к уменьшению указанной ошибки. Каждый раз при уменьшении хотя бы одной из ошибок найденные успешные модификации меняют предыдущие успешные модификации для данной ошибки.

3. В случае отсутствия хотя бы незначительного улучшения результата на предыдущей итерации произвольным образом выбирается параметр или группа параметров для последующего изменения. При этом для каждого изменяемого параметра в случае группы параметров отдельно определяется характер изменения (уменьшение или увеличение). Дополнительно произвольным образом выбирается один из четырех сохраненных векторов параметров в качестве стартового для следующей итерации (для каждой ошибки на шаге с номером 2 сохраняется соответствующий ей оптимальный набор параметров).

4. Проверяется необходимость останова алгоритма, который останавливается либо по причине достижения требуемой точности, либо при обнаружении минимумов во всех функциях стоимостей. Условие достижения точности проверяется по среднему геометрическому по всем рассмотренным ошибкам:

$$\langle E \rangle = (E_f \cdot \max E_f \cdot E_p \cdot \max E_p)^{1/4}. \quad (8)$$

По завершении алгоритма выбирается вектор, отвечающий минимально достигнутому значению ошибки $\max E_f$, которая превосходит по значению все остальные ошибки.

Как показали результаты численного моделирования на основе описанного алгоритма, сохранение нескольких наборов параметров, отвечающих наилучшим значениям величин ошибок, позволяет с большей вероятностью избегать локальных минимумов функций стоимости.

2. Восстановление параметров эпидемиологической модели

Для демонстрации работы алгоритма минимизации ошибки, описанного выше, проинтегрируем систему (6) с шагом интегрирования 0.05 методом Рунге – Кутты четвертого порядка в течение 100 единиц безразмерного системного времени. Полученную реализацию фильтруем, выбирая для эксперимента 41 точку (с шагом 2.5 единицы безразмерного времени) и добавляем к каждой из точек значение источника белого гауссовского шума со среднеквадратичным отклонением σ^2 . Затем запускаем разработанный

алгоритм минимизации ошибки, задав значительно отличающиеся от истинных значения параметров $B = D = \beta = v = \gamma = \alpha = 0.1$.

Результат работы алгоритма проиллюстрирован на рис. 1–4 для двух наборов исходных параметров модели и двух значений параметра шума σ . На всех рисунках под литерой *a/a* отображается зависимость величины ошибки E (в смысле формулы (8)) от числа итераций, под литерой *b/b* – относительные ошибки определения параметров, обозначаемые через $\phi(p)$, под литерой *в/c* дается график зависимости $x(t)$ в восстанавливаемой модели. Относительные ошибки вычисляются как $\phi(p) = (p - p_{\text{ист}})/p_{\text{ист}}$, где p представляет собой текущее значение подбираемого параметра, а $p_{\text{ист}}$ – искомое значение параметра. Горизонтальной пунктирной линией (на рисунках с литерой *a*) и численно (на рисунках с литерами *a* и *б*) отмечен уровень максимальной величины ошибки по завершении работы алгоритма.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования и подбора параметров для случая, когда система (6) демонстрирует одно колебание и стремится к состоянию равновесия (рис. 2, *в*). Несмотря на то, что динамика модели является очень простой и кривая зависимости $x(t)$ характеризуется только одним локальным минимумом, с помощью предложенного алгоритма удается достаточно быстро (20712 итераций) и точно (самая большая ошибка $\phi(\gamma) = 1.9\%$) восстановить исходные параметры модели.

На рис. 3 представлены результаты для режима модели (6), характеризующегося иным характером приближения к состоянию равновесия (рис. 3, *в*). Предположительно, значительное увеличение времени работы алгоритма обусловлено более сложной формой траектории в фазовом пространстве. Однако параметры были восстановлены в худшем случае с точностью 0.8%. В предыдущем случае худшая точность составила 1.9%, что может быть связано с достаточно простой формой траектории в фазовом пространстве и сложностью отличить ее от подобных траекторий, наблюдаемых при других наборах значений параметров модели.

Нужно отметить, что оба эксперимента (см. рис. 1 и 2) были проведены в условиях незначительного шума ($\sigma^2 = 10^{-9}$). На рис. 3 и 4 представлены результаты для случая достаточно большой интенсивности шума ($\sigma^2 = 10^{-3}$). В случае типичных для модели значений параметров (см.

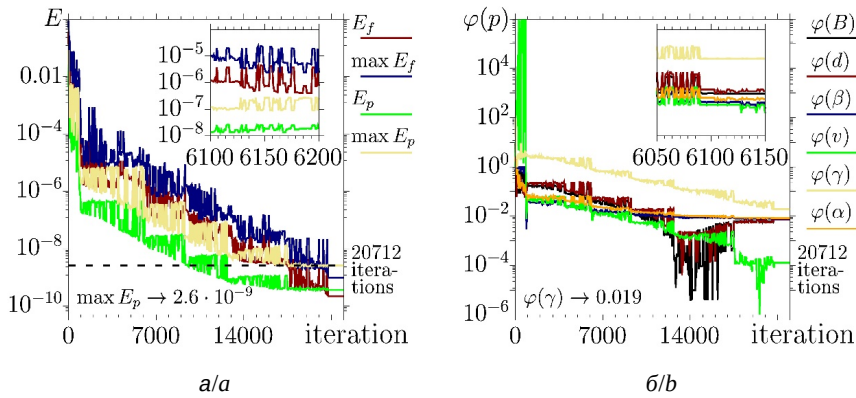


Рис. 1. Результаты работы алгоритма для $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.06$, $v = 10$, $\gamma = 0.001$, $\alpha = 0.031$, $\sigma^2 = 10^{-9}$: зависимость ошибки E от числа итераций (а); относительные ошибки определения параметров модели (б); график моделируемой переменной $x(t)$ (в) (цвет онлайн)

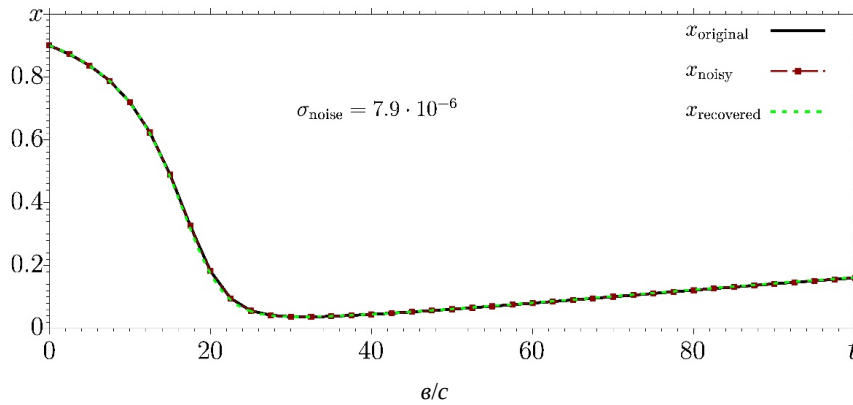


Fig. 1. Numerical results obtained for $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.06$, $v = 10$, $\gamma = 0.001$, $\alpha = 0.031$, $\sigma^2 = 10^{-9}$: dependence of the error E on the number of iterations (a); relative errors by determining the model parameters (b); graph of the modeled variable $x(t)$ (c) (color online)

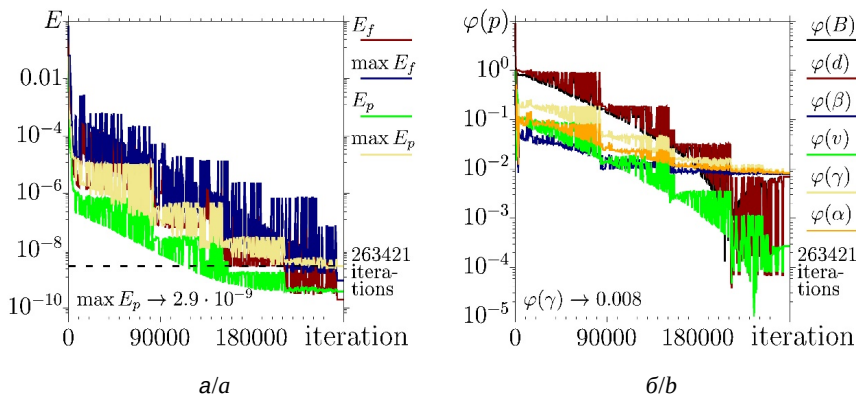


Рис. 2. Результаты работы алгоритма для $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.07$, $v = 10$, $\gamma = 0.07$, $\alpha = 0.07$, $\sigma^2 = 10^{-9}$: зависимость ошибки E от числа итераций (а); относительные ошибки определения параметров модели (б); график моделируемой переменной $x(t)$ (в) (цвет онлайн)

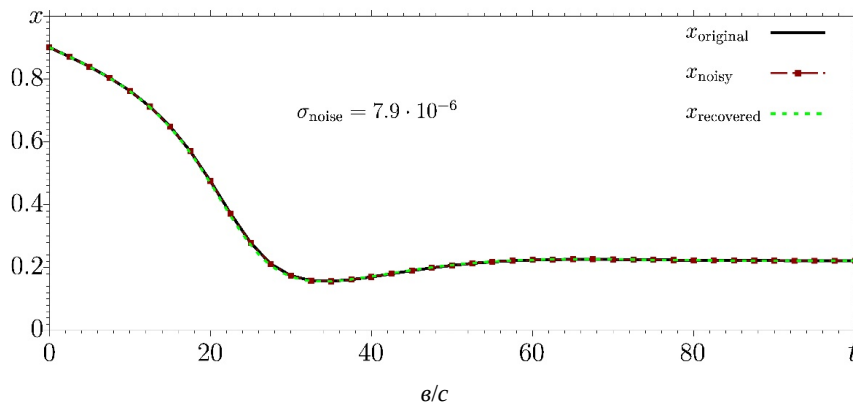


Fig. 2. Numerical results obtained for $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.07$, $v = 10$, $\gamma = 0.07$, $\alpha = 0.07$, $\sigma^2 = 10^{-9}$: dependence of the error E on the number of iterations (a); relative errors by determining the model parameters (b); graph of the modeled variable $x(t)$ (c) (color online)

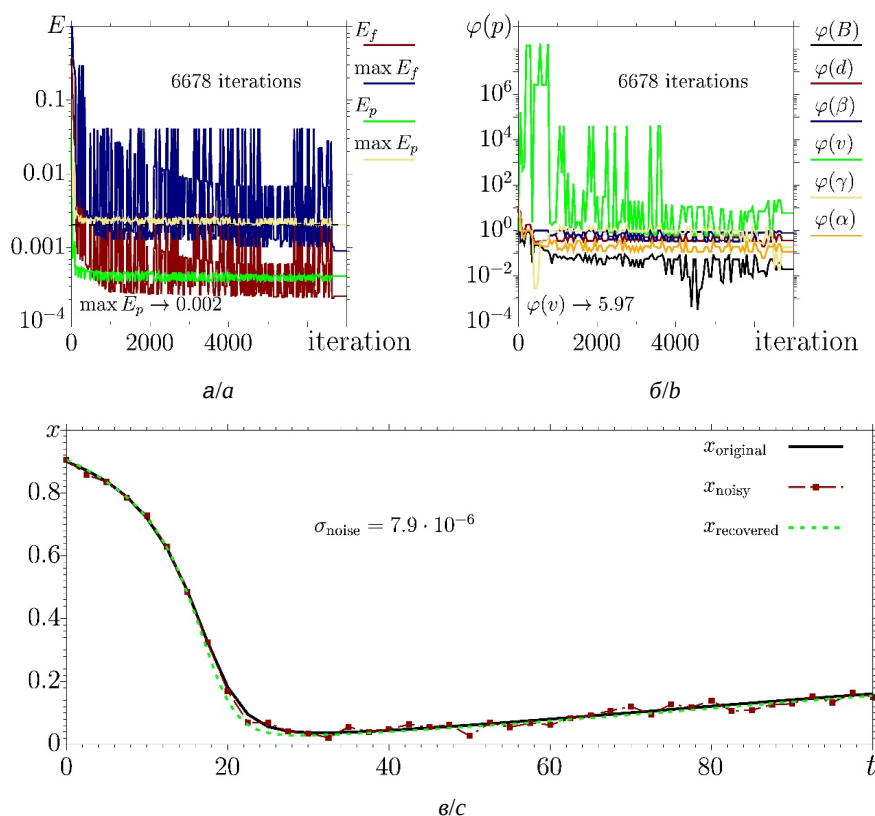


Рис. 3. Результаты работы алгоритма для $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.06$, $v = 10$, $\gamma = 0.001$, $\alpha = 0.031$, $\sigma^2 = 10^{-3}$: зависимость ошибки E от числа итераций (а); относительные ошибки определения параметров модели (б); график моделируемой переменной $x(t)$ (в) (цвет онлайн)

Fig. 3. Numerical results obtained for $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.06$, $v = 10$, $\gamma = 0.001$, $\alpha = 0.031$, $\sigma^2 = 10^{-3}$: dependence of the error E on the number of iterations (a); relative errors by determining the model parameters (b); graph of the modeled variable $x(t)$ (c) (color online)

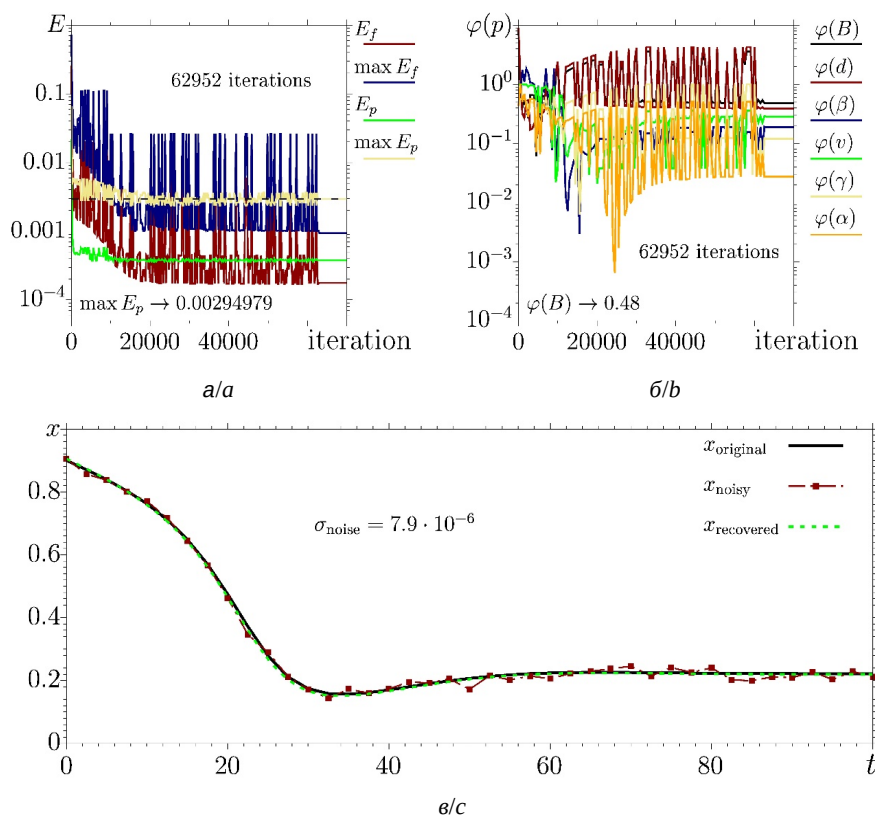


Рис. 4. Результаты работы алгоритма при $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.07$, $v = 10$, $\gamma = 0.07$, $\alpha = 0.07$, $\sigma^2 = 10^{-3}$: зависимость ошибки E от числа итераций (а); относительные ошибки определения параметров модели (б); график моделируемой переменной $x(t)$ (в) (цвет онлайн)

Fig. 4. Numerical results obtained for $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.07$, $v = 10$, $\gamma = 0.07$, $\alpha = 0.07$, $\sigma^2 = 10^{-3}$: dependence of the error E on the number of iterations (a); relative errors by determining the model parameters (b); graph of the modeled variable $x(t)$ (c) (color online)



рис. 3) траектория восстановлена с хорошей точностью с ошибкой порядка интенсивности шума. Однако эта траектория получена при параметрах, значительно отличающихся от исходных. Это свидетельствует о том, что при достаточно большой интенсивности шума рассматриваемый режим становится неотличимым от подобных режимов на уровне шума с выбранной интенсивностью $\sigma^2 = 10^{-3}$.

Интересно, что в случае более сложной траектории (рис. 4) восстановление параметров происходит гораздо лучше (с худшей ошибкой меньше 50% при интенсивности шума $\sigma^2 = 10^{-3}$). При этом результат, по точности сравнимый с интенсивностью шума, в случае значительно значения параметра σ достигается гораздо быстрее (см. рис. 4), чем в случае незначительно возмущенной исходной траектории (см. рис. 2). Таким образом, алгоритм восстановления модели с неизвестными параметрами хорошо показывает себя в случае зашумленных исходных данных.

На рис. 5 приведены результаты для серии запусков исследуемого алгоритма подбора параметров модели для случаев с различной интенсивностью шума. Во всех примерах удается достаточно хорошо восстановить траекторию модели, что проиллюстрировано линейной зависимостью средней ошибки $\langle E \rangle = (4\sigma)^2$ (линия на рис. 5, а). Однако параметры исходной моде-

ли восстанавливаются достаточно точно (ошибка менее 10%) только при $\sigma < 10^{-3}$. При $\sigma > 10^{-3}$ точно восстанавливаются только некоторые параметры, тогда как большая часть заметно отличается по величине от исходных.

Таким образом, предложенный улучшенный алгоритм восстановления параметров дифференциальной модели по временной реализации демонстрирует хорошие результаты при наличии шума достаточно большой интенсивности $\sigma \sim 5 \cdot 10^{-4}$.

Заключение

На примере компартментной эпидемиологической модели SIR представлен алгоритм, позволяющий с задаваемой точностью восстанавливать значения параметров дифференциальной системы. Для обнаружения локальных минимумов вычисляются четыре величины ошибки, как описано в работе [8], но ошибки E_f и E_p определены как средние величины, что позволяет сравнивать все четыре ошибки между собой. Кроме того, для увеличения вероятности обнаружения глобального минимума, когда все четыре ошибки минимальны, было предложено сохранять значения параметров, отвечающие достигнутому локальным минимумам и периодически возвращаться к сохраненным наборам значений параметров в случае «застывания» алгоритма. Такая модификация способа является

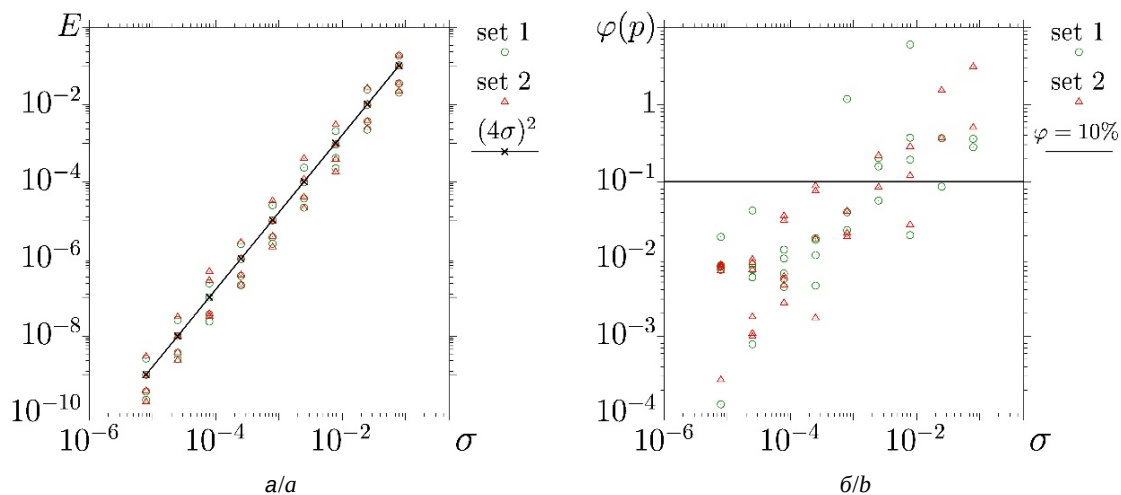


Рис. 5. Зависимости средней величины ошибки (а) и относительных ошибок определения параметров системы (б) от значения характеристики шума σ (горизонтальной линией отмечен уровень, ниже которого относительная ошибка величины параметра меньше 10%). Круглыми точками обозначены результаты при $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.06$, $v = 10$, $\gamma = 0.001$, $\alpha = 0.031$, а треугольниками – при $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.07$, $v = 10$, $\gamma = 0.07$, $\alpha = 0.07$

Fig. 5. Dependences of the obtained values of the cost function (a) and relative errors of the parameter values (b) on the value of the noise parameter σ . The horizontal line indicates the level below which the relative error of the parameter value is less than 10%. The round dots indicate the results for $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.06$, $v = 10$, $\gamma = 0.001$, $\alpha = 0.031$, and the triangles indicate the results for $B = 0.01$, $d = 0.01$, $\beta = 0.07$, $v = 10$, $\gamma = 0.07$, $\alpha = 0.07$



более гибкой, поскольку обеспечивается автоподстройка алгоритма под наиболее изменяющуюся функцию стоимости в каждом отдельном случае.

Для оценки работы алгоритма предлагается вычислять среднее геометрическое по всем ошибкам, а не использовать только максимальную из них. Среднее геометрическое характеризует качество набора значений параметров в целом по всем ошибкам, тогда в случае застревания алгоритма может быть выбран наилучший из сохраненных наборов параметров. Это особенно полезно при наличии шума в исходных данных, из-за которого глобальный минимум функции стоимости может оказаться меньше интенсивности шума и перестать быть различимым.

Представленные результаты демонстрируют возможность восстановления параметров модели, характеризующейся высокой степенью мультистабильности, в которой, кроме того, существуют очень близкие между собой траектории при заметно различающихся значениях параметров. Восстановление параметров реализуется даже при достаточно большой интенсивности шума, добавленного к исходным данным, что иллюстрирует устойчивость предложенного метода, дающего заметное отличие локальных минимумов от глобального.

В то же время существуют случаи, когда алгоритм не обнаруживает новых значений параметров, ведущим к уменьшению хотя бы одной из используемых функций стоимости. Это происходит в том случае, когда все четыре функции стоимости оказались в своих локальных минимумах. Разрешение подобной ситуации требует дальнейших исследований. Возможно, полезным будет использование случайных комбинаций значений параметров из разных наборов, отвечающим различным минимумам функций стоимостей, потому что в проведенных исследованиях нередко часть параметров восстанавливалась хорошо в одном локальном минимуме, а другая часть – в другом локальном минимуме.

В работе исследовано применение алгоритма поиска параметра модели, задаваемой многомерными степенными полиномами в правой части, однако возможность использования раскрытого метода для моделей с более сложными нелинейными слагаемыми не исследована.

Список литературы / References

1. Bocharov G. A., Rihan F. A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, vol. 125, no. 1–2, pp. 183–199. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00468-4](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00468-4)
2. Polynikis A., Hogan S. J., Di Bernardo M. Comparing different ODE modelling approaches for gene regulatory networks. *Journal of Theoretical Biology*, 2009, vol. 261, no. 4, pp. 511–530. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2009.07.040>
3. Miao H., Xia X., Perelson A. S., Wu H. On identifiability of nonlinear ODE models and applications in viral dynamics. *SIAM Review*, 2011, vol. 53, no. 1, pp. 3–39. <https://doi.org/10.1137/090757009>
4. Dahlhoff E. P. Biochemical indicators of stress and metabolism: Applications for marine ecological studies. *The Annual Review of Physiology*, 2004, vol. 66, pp. 183–207. <https://doi.org/10.1146/annurev.physiol.66.032102.114509>
5. McLean K. A. P., McAuley K. B. Mathematical modelling of chemical processes – obtaining the best model predictions and parameter estimates using identifiability and estimability procedures. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2012, vol. 90, no. 2, pp. 351–366. <https://doi.org/10.1002/cjce.20660>
6. Boukouvala F., Hasan M. M. F., Floudas C. A. Global optimization of general constrained grey-box models: New method and its application to constrained PDEs for pressure swing adsorption. *Journal of Global Optimization*, 2017, vol. 67, pp. 3–42. <https://doi.org/10.1007/s10898-015-0376-2>
7. Edsberg L., Wedin P. Å. Numerical tools for parameter estimation in ODE-systems. *Optimization Methods and Software*, 1995, vol. 6, no. 3, pp. 193–217. <https://doi.org/10.1080/10556789508805633>
8. Bukh A. V., Kashtanova S. V., Shepelev I. A. Complex error minimization algorithm with adaptive change rate. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, vol. 176, art. 114154. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.114154>
9. Wright A. H. Genetic algorithms for real parameter optimization. *Foundations of Genetic Algorithms*, 1991, vol. 1, pp. 205–218. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-050684-5.50016-1>
10. Dondelinger F., Husmeier D., Rogers S., Filippone M. ODE parameter inference using adaptive gradient matching with Gaussian processes. *Journal of Machine Learning Research*, 2013, vol. 31, pp. 216–228.
11. Newton I. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman. Berkeley, Univ. of California Press, 1999. 974 p.
12. Fletcher R., Reeves C. M. Function minimization by conjugate gradients. *The Computer Journal*, 1964, vol. 7, no. 2, pp. 149–154. <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.149>
13. Martí R., Resende M. G. C., Ribeiro C. C. Multi-start methods for combinatorial optimization. *European Journal of Operational Research*, 2013, vol. 226, iss. 1, pp. 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.10.012>
14. Mirjalili S., Jangir P., Saremi S. Multi-objective ant lion optimizer: a multi-objective optimization algorithm for solving engineering problems. *Applied Intelligence*,



- 2017, vol. 46, pp. 79–95. <https://doi.org/10.1007/s10489-016-0825-8>
15. Hu X., Shonkwiler R., Spruill M. C. *Random restarts in global optimization*. Georgia Institute of technology, Atlanta, GA, 1994. 32 p. Available at: https://www.researchgate.net/publication/40220792_Random_Restarts_in_Global_Optimization (accessed 20 September 2024).
16. Goffe W. L., Ferrier G. D., Rogers J. Global optimization of statistical functions with simulated annealing. *Journal of Econometrics*, 1994, vol. 60, no. 1–2, pp. 65–99. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(94\)90038-8](https://doi.org/10.1016/0304-4076(94)90038-8)
17. Mirjalili S., Mirjalili S. M., Lewis A. Grey wolf optimizer. *Advances in Engineering Software*, 2014, vol. 69, pp. 46–61. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2013.12.007>
18. Trivedi I. N., Pradeep J., Narottam J., Arvind K., Dilip L. Novel adaptive whale optimization algorithm for global optimization. *Indian Journal of Science and Technology*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 319–326. <https://doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i38/101939>
19. Buch H., Trivedi I. N., Jangir P. Moth flame optimization to solve optimal power flow with non-parametric statistical evaluation validation. *Cogent Engineering*, 2017, vol. 4, no. 1, art. 1286731. <https://doi.org/10.1080/23311916.2017.1286731>
20. Jangir P., Parmar S. A., Trivedi I. N., Bhesdadiya R. H. A novel hybrid particle swarm optimizer with multi verse optimizer for global numerical optimization and optimal reactive power dispatch problem. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 570–586. <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2016.10.007>
21. Jin Y., Wang W., Xiao S. An SIRS model with a nonlinear incidence rate. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, vol. 34, no. 5, pp. 1482–1497. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.04.022>
22. Barman M., Mishra N. Hopf bifurcation analysis for a delayed nonlinear-SEIR epidemic model on networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, vol. 178, art. 114351. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.114351>
23. Buonomo B., Giacobbe A. Oscillations in SIR behavioural epidemic models: The interplay between behaviour and overexposure to infection. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023, vol. 174, art. 113782. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113782>

Поступила в редакцию 27.09.2024; одобрена после рецензирования 22.11.2024;
принята к публикации 10.12.2024; опубликована 30.06.2025

The article was submitted 27.09.2024; approved after reviewing 22.11.2024;
accepted for publication 10.12.2024; published 30.06.2025