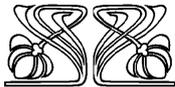
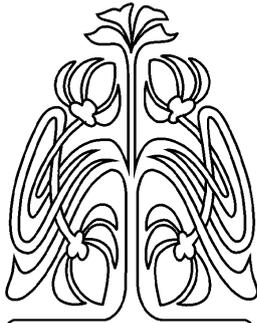




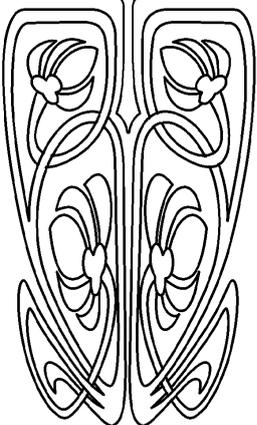
РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 102–113
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 102–113
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-2-102-113>, EDN: ILIDL M

Научная статья
УДК 532.529+628.335



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



Моделирование и расчет течений дисперсных сред в канале с внезапным расширением при наличии нуклеации, коагуляции и фазовых переходов

Т. Р. Аманбаев, Ж. Д. Изтаев, Г. Е. Тилеуов, Н. А. Абдусалиев

Южно-Казахстанский университет им. М. Ауэзова, Казахстан, 160012, г. Шымкент, просп. Тауке хана, д. 5

Аманбаев Тулеген Рахманович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и моделирования, tulegen_amanbaev@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6703-4008>

Изтаев Жалгасбек Дулатович, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных систем и моделирования, zhalgasbek75@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2205-0247>

Тилеуов Гамидулла Есболович, PhD, старший преподаватель кафедры информационных систем и моделирования, gamidulla_nca@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6049-6066>

Абдусалиев Нурислам Алдиярулы, магистр, преподаватель кафедры информационных систем и моделирования, nurislamabdusaliev@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-4365-0159>

Аннотация. С помощью квазиравновесной модели, основанной на уравнениях механики многофазных сред, изучено течение дисперсной смеси в канале с внезапным расширением при наличии процессов нуклеации (зародышеобразования), коагуляции зародышей (кластеров) и фазовых переходов (испарения, конденсации) в двумерной постановке. Для описания процесса зародышеобразования используется модель гомогенной нуклеации. Считается, что процесс коагуляции кластеров происходит за счет их броуновского движения, при этом для коэффициента коагуляции берется выражение, соответствующее монодисперсным сферическим частицам. Для определения скорости фазовых переходов используется формула Герца – Кнудсена – Ленгмюра. Считалось, что в узкой части канала при определенных условиях непрерывно появляются зародыши дисперсной фазы, которые попадают с потоком в расширенную часть канала. В качестве примера рассмотрено течение дисперсной смеси с зародышами воды в собственном паре. Расчеты проведены с помощью численного метода крупных частиц. Показано, что течение имеет вихревую структуру, причем в зоне вихря формируются наиболее крупные частицы (кластеры). Расчетами установлено, что процесс коагуляции достаточно сильно влияет на распределение размеров кластеров внутри канала. Обнаружено, что степень переохлаждения пара существенно влияет на приведенную плотность дисперсной фазы (в частности, увеличение этого параметра на 50% приводит к росту приведенной плотности дисперсной фазы в среднем примерно на три порядка). Установлено, что картина течения, полученная с помощью численных расчетов, согласуется с экспериментом.

Ключевые слова: канал, дисперсная смесь, нуклеация, коагуляция, фазовые переходы, кластеры, квазиравновесная модель, метод крупных частиц

Для цитирования: Аманбаев Т. Р., Изтаев Ж. Д., Тилеуов Г. Е., Абдусалиев Н. А. Моделирование и расчет течений дисперсных сред в канале с внезапным расширением при наличии нуклеации, коагуляции и фазовых переходов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 102–113. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-2-102-113>, EDN: ILIDL M

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Modeling and calculation of dispersed media flows in a channel with rapid expansion in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions**T. R. Amanbaev, Zh. D. Iztaev, G. E. Tilleuov, N. A. Abdusaliev**

Auezov South Kazakhstan University, 5 Tauke khan Avenue, Shymkent 160012, Kazakhstan

Tulegen R. Amanbaev, tulegen_amanbaev@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6703-4008>Zhalgasbek D. Iztaev, zhalgasbek75@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2205-0247>Gamidulla E. Tilleuov, gamidulla_nca@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6049-6066>Nurislam A. Abdusaliev, nurislamabdusaliev@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-4365-0159>

Abstract. Background and Objectives: In practice, there are often processes in which in the initial state the working medium is single-phase, for example, in the form of gas (steam), and during the process under study conditions are created for the appearance of a new phase in the form of droplets (nuclei). The process of nucleation and further condensation growth of clusters in supersaturated vapor is one of the most important processes leading to the development of the dispersed phase. The liquid phase nuclei that appear as a result of nucleation are quite small (nano-sized) and, therefore, subject to Brownian wander, which leads to their mutual collisions and coagulation. The processes of evaporation and condensation in various media are used to obtain nanomaterials (in particular, in the synthesis of carbon nanotubes), as well as to obtain nano- and ultradisperse particles in expanding channels due to nucleation and their condensation and coagulation growth. **Materials and Methods:** Using a quasi-equilibrium model based on the equations of mechanics of multiphase media, the flow of a dispersed mixture in a channel with sudden expansion in the presence of processes of nucleation, coagulation of nuclei (clusters) and phase transitions (evaporation, condensation) in a two-dimensional formulation was studied. The homogeneous nucleation model is used to describe the nucleation process. It is assumed that the process of coagulation of clusters occurs due to their Brownian motion. To determine the rate of phase transitions, the Hertz – Knudsen – Langmuir formula is used. The problem of the flow of a gas-dispersed mixture in a channel with sudden expansion in a two-dimensional formulation is considered. It was assumed that in the narrow part of the channel, under certain conditions, nuclei of the dispersed phase continuously appear, which enter the widened part of the channel with the flow. The calculations were carried out based on the algorithm of the numerical “large particles” method, which is based on splitting the original equations into physical processes. **Results:** As a result of the study, the basic properties of the flow of a two-phase mixture in a channel in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions have been established. It has been shown that the flow has a vortex structure, and the largest particles are formed precisely in the vortex zone. Calculations have established that the coagulation process has a fairly strong effect on the distribution of cluster sizes inside the channel. The influence of the degree of steam supercooling on the flow of the dispersed mixture in the channel has been studied and it has been found that this parameter significantly affects the density distribution of the dispersed phase. The flow pattern obtained using calculations is consistent with experiment. **Conclusion:** The basic properties of the behavior of the mixture parameters along the expanding channel at presence of nucleation, coagulation and phase transitions have been established. The results obtained can be useful in various areas of modern technology: when designing various heat-power and heat-exchange installations, for studying the process of outflow of various mixtures from containers, for modeling the processes of formation and growth of nuclei (in particular, nanoclusters) in saturated media, etc.

Keywords: channel, dispersed medium, nucleation, coagulation, phase transitions, clusters, quasi-equilibrium model, large particles method

For citation: Amanbaev T. R., Iztaev Zh. D., Tilleuov G. E., Abdusaliev N. A. Modeling and calculation of dispersed media flows in a channel with rapid expansion in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 102–113 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-2-102-113>, EDN: ILIDLML

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC0-BY 4.0)

Введение

В практике часто встречаются процессы, в которых в исходном состоянии рабочая среда является однофазной, например, в виде газа (пара), а в ходе исследуемого процесса создаются условия для появления новой фазы в виде капель (зародышей) [1, 2]. Процесс зародышеобразования (нуклеации) и дальнейший конденсационный рост кластеров в пересыщенном паре является одним из наиболее важных процессов, приводящих к зарождению и развитию дисперсной фазы. Процесс нуклеации играет существенную роль в различных областях техники и химической технологии, природных явлениях (образование капелек тумана, дождевых облаков)

и т. п. Отметим, что проблема математического описания процесса зародышеобразования остается актуальной до сих пор. В последнее время она активно обсуждается в связи с изучением роста нанокластеров в дисперсных системах [3–5].

Появившиеся в результате нуклеации зародыши жидкой фазы являются достаточно мелкими (наноразмерными) и в связи с этим подвержены броуновскому блужданию. Броуновское блуждание приводит к их взаимному столкновению, поэтому является одним из основных, постоянно действующих механизмов, способствующих коагуляции (слиянию) микрокапель. Коагуляция частиц является одной из основных причин эволюции дисперсных систем с части-



цами (твердыми или жидкими). Это явление наблюдается в различных физических ситуациях и оказывает воздействие на рост кластеров в растворах, газодисперсных системах и т. п. [6–8].

Процессы испарения и конденсации в различных средах используют для получения наноматериалов (в частности, при синтезе углеродных нанотрубок), а также для получения нано- и ультрадисперсных частиц в расширяющихся каналах за счет зародышеобразования и их конденсационного и коагуляционного роста [8, 9].

Таким образом, изучение течений двухфазных систем в каналах переменного сечения (в частности, с внезапным расширением) при наличии различных процессов (нуклеации, коагуляции зародышей, фазовых переходов) представляет теоретический и практический интерес и является актуальным.

В данной работе исследовано поведение газодисперсной системы в канале с внезапным расширением при наличии указанных выше процессов в двумерной постановке. Ранее в [10] подобная задача изучена в квазидномерной постановке (в качестве канала переменного сечения взят параболоид вращения).

1. Основные уравнения

Для моделирования движения двухфазной дисперсной смеси при наличии процессов коагуляции зародышей (кластеров) и фазовых переходов используем уравнения и замыкающие соотношения механики многофазных сред [1]. Описание методами механики сплошной среды различного рода смесей связано с введением понятия многоскоростного континуума и определением взаимопроникающего движения составляющих смеси. Для каждого из этих континуумов в каждой точке определяется плотность (приведенная), скорость, а затем и другие параметры, относящиеся к своему континууму и своей составляющей смеси.

Таким образом, в каждой точке объема, занятого смесью, определено N плотностей ρ_i , N скоростей \mathbf{v}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и т. д. Исходя из этих величин, можно определить параметры, характеризующие смесь в целом, а именно плотность смеси ρ и среднemasсовую скорость смеси \mathbf{v} : $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_N$, $\rho \mathbf{v} = \rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \rho_N \mathbf{v}_N$. В случае, когда внутренняя энергия смеси e аддитивна по массе входящих в нее составляющих $\rho e = \rho_1 e_1 + \rho_2 e_2 + \dots + \rho_N e_N$, а кинетическая энергия определяется лишь макроскопическим движением, полная энергия смеси E может быть

представлена в виде

$$\rho E = \rho_1(e_1 + \mathbf{v}_1^2/2) + \rho_2(e_2 + \mathbf{v}_2^2/2) + \dots + \rho_N(e_N + \mathbf{v}_N^2/2).$$

Механика смесей строится на основе физических законов сохранения массы, импульса и энергии, которые записываются для каждой составляющей в некотором фиксированном в пространстве объеме, учитывая при этом обмен массой, импульсом и энергией между составляющими внутри выделенного объема. В механике гетерогенных смесей необходимо ввести доли объема α_i , занимаемые каждой фазой $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1$ ($0 < \alpha_i < 1$). Таким образом, помимо приведенных плотностей ρ_i , определяются истинные плотности фаз $\rho_i^\circ = \rho_i/\alpha_i$.

Следует иметь в виду, что деформация каждой фазы в гетерогенной смеси связана не только со смещением внешних границ выделенного объема, но и смещением межфазных поверхностей внутри выделенного объема смеси. Учет этого обстоятельства требует привлечения условий совместного деформирования фаз. Наиболее часто встречается условие равенства давлений фаз, регулирующее их объемные содержания или условие несжимаемости одной из фаз. В широком классе задач можно использовать схему с общим давлением фаз $p_1 = p_2 = \dots = p_N = p$ [1].

В рассматриваемом нами случае смесь состоит из двух фаз ($N = 2$), несущей ($i = 1$) и дисперсной ($i = 2$), несущую фазу составляет собственно газ, а дисперсную (или конденсированную) – частицы (или капли). При этом в качестве частиц (или капель) выступают зародыши (или кластеры), которые обладают достаточно малыми размерами. Учитывая последнее обстоятельство, уравнения смеси запишем в квазигомогенном приближении [1, 11] когда относительным движением компонентов можно пренебречь ($\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$) т. е. пренебрегаются динамическими и инерционными эффектами из-за относительного движения составляющих смеси. Примем условие совместного деформирования с общим давлением фаз $p_1 = p_2 = p$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_1 \mathbf{v} &= -n j_{12}, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_2 \mathbf{v} &= n j_{12}, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \mathbf{v} &= -J_c, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p, \quad \rho \frac{dE}{dt} + \operatorname{div} p \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$



$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_1 = \alpha_1 \rho_1^\circ, \quad \rho_2 = \alpha_2 \rho_2^\circ, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \quad \alpha_2 = \frac{4\pi}{3} a^3 n, \quad E = e + \frac{\mathbf{v}^2}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь α_i , ρ_i° , ρ_i – объемные доли, истинные и приведенные плотности несущей ($i = 1$) и дисперсной фаз ($i = 2$); ρ , p , e , E , \mathbf{v} – плотность, давление, внутренняя и полная энергии, а также вектор скорости смеси; n , a – концентрация и радиус частиц; j_{12} , J_c – интенсивности фазового перехода и коагуляции. Уравнения (1) – это уравнения неразрывности фаз и числа дисперсных частиц, уравнения (2) – уравнения импульса и полной энергии смеси (d/dt – субстанциональная производная, ∇ – набла-оператор).

Заметим, что в рамках квазигомогенного приближения процесс обмена импульсом между компонентами смеси из-за фазовых переходов не влияет на изменение импульса смеси. Кроме того, внутренние межфазные процессы никак не могут сказываться на изменении полной энергии смеси. Об этом свидетельствует отсутствие членов, ответственных за межфазный обмен в правых частях уравнений импульса и полной энергии (2). В то же время фазовые превращения влияют на изменения приведенных плотностей составляющих смеси.

Очевидно фазовые превращения не влияют на изменения общей плотности смеси в целом. Действительно, сложение первых двух уравнений системы (1) дает

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0.$$

Данное уравнение можно использовать вместо одного из уравнений неразрывности фаз. В целом система уравнений (1)–(3) еще не замкнута, так как необходимо задать уравнения состояния фаз.

2. Замыкающие соотношения

2.1. Уравнения состояния и интенсивность фазовых переходов

Конкретизация модели многофазной сплошной среды требует привлечения механических и термодинамических свойств фаз [1]. Итак, для замыкания системы (1)–(3) необходимо задать термодинамические уравнения состояния фаз. При этом газ будем считать калорически совершенным с постоянной теплоемкостью, а вещество конденсированной фазы – несжимаемым. Наряду с относительным движением фаз пренебрегаем также и отличиями температур между

несущей и конденсированной фазами $T_1 = T_2 = T$. Тогда с учетом принятых допущений будем иметь:

$$p = \rho_1^\circ R_1 T, \quad e = cT, \quad \rho c = \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2, \quad (4)$$

$$i_1 = i_{10} + c_1(T - T_0), \quad (5)$$

$$i_2 = i_{20} + c_2(T - T_0) + (p - p_0)/\rho_2^\circ$$

$$(\rho_2^\circ, c_1, c_2, R_1 = \text{const}).$$

Здесь T – температура среды; i_1 , i_2 , c_1 , c_2 – энтальпии и теплоемкости газа и дисперсной фазы; R_1 – газовая постоянная; c – эффективная теплоемкость смеси; i_{10} , i_{20} , T_0 , p_0 – параметры среды в некотором фиксированном (например, начальном) состоянии. Необходимо иметь в виду, что энтальпия пара в общем случае зависит от давления и связана с энтальпией жидкой фазы. При этом условие пригодности (4) обеспечивается, если зависимость для теплоты парообразования описывается следующей формулой [1]:

$$l(p) = l(p_0) - (c_2 - c_1)(T_s(p) - T_s(p_0)) - (p - p_0)/\rho_2^\circ,$$

где $T_s(p)$ и $l(p)$ – температура насыщения и теплота парообразования, зависящие от давления. Для температуры насыщения имеем уравнение Клапейрона – Клаузиуса [1].

Интенсивность фазового перехода определяется как

$$j_{12} = 4\pi a^2 \xi_{12}, \quad \xi_{12} = K_\beta (T_s - T)/T_s,$$

$$K_\beta = \beta_m l \rho_1^\circ / \sqrt{2\pi R_1 T_s}.$$

Здесь ξ_{12} – интенсивность фазовых превращений, отнесенная на единицу площади межфазной поверхности и вычисляемая по формуле Герца – Кнудсена – Ленгмюра.

2.2. Интенсивность коагуляции

Далее необходимо конкретизировать интенсивность коагуляции кластеров. В этой связи отметим, что мелкие (наноразмерные) частицы реагируют на случайные молекулярные флуктуации плотности и средней скорости молекул среды, поэтому все время пребывают в нерегулярном (броуновском) движении. Броуновское блуждание приводит к их взаимному столкновению, поэтому является одним из основных, постоянно действующих механизмов, способствующих коагуляции мелких частиц. При построении математической модели процесса коагуляции на дисперсную систему налагаются следующие предположения физического характера [12, 13]:



число частиц достаточно большое, чтобы можно было применить функцию распределения числа частиц по массам (или объемам); дисперсная система настолько разрежена, что можно рассматривать лишь парные столкновения частиц, а тройными и более высокого порядка взаимодействиями можно пренебречь; частицы дисперсной системы образуют хаотическое множество. Эти условия необходимы для статистического описания системы и важны для упрощения математического моделирования изучаемого процесса. Основным уравнением теории коагуляции является уравнение Смолуховского [13].

Заметим, что в случае, когда в роли частиц выступают жидкие капли, удобно записать уравнение коагуляции через объемы частиц, которое в непрерывном варианте имеет вид

$$\frac{dn(v,t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^v K(\phi, v-\phi)n(\phi,t)n(v-\phi,t)d\phi - \int_0^\infty K(\phi, v)n(\phi,t)n(v,t)d\phi, \quad (6)$$

где v, ϕ – объемы частиц, K – ядро коагуляции (является симметричной функцией по своим аргументам), $n(v,t)$ – число частиц с объемом v в единице объема смеси. Уравнение (6) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

В случае монодисперсных сферических частиц, подверженных броуновскому блужданию, ядро коагуляции запишется в виде [13]

$$K = K_0 = \frac{8 k_B T}{3 \mu_1} C.$$

Здесь k_B – постоянная Больцмана μ_1 – динамическая вязкость несущей фазы. Поправочный коэффициент C учитывает эффекты свободно-молекулярного режима, которые проявляются в случаях, когда размеры частиц сравнимы с длиной свободного пробега молекулы газа и зависит от числа Кнудсена [4] (этот коэффициент следует учитывать при размерах частиц менее 1 мкм). В этом случае скорость изменения количества частиц в единице объема дисперсной системы примет вид

$$J_c = K_0 n^2 / 2. \quad (7)$$

Таким образом, уравнения (1)–(3) с приведенными в этом разделе замыкающими соотношениями представляют математическую модель течения конденсирующейся среды при наличии

процессов коагуляции зародышей и фазовых переходов. Необходимо отметить, что хотя в данной модели скорости и температуры фаз совпадают между собой, имеют место процессы коагуляции и фазовых превращений, которые приводят к изменениям компонентного состава смеси и размеров кластеров. Поэтому представленную модель уместно назвать как квазиравновесную модель дисперсной смеси (в отличие от равновесной модели, когда смесь рассматривается как односкоростная и однотемпературная сплошная среда с эффективными теплофизическими параметрами без межфазовых превращений [1]).

3. Постановка задачи

3.1. Начальные и граничные условия

Рассмотрим течение двухфазной газодисперсной смеси в канале с внезапным расширением. При этом будем полагать, что на первой стадии из-за процесса нуклеации в узкой части канала непрерывно появляются зародыши жидкой фазы. Затем при течении сформированной газодисперсной смеси в расширенной части канала осуществляются процессы коагуляции зародышей и фазовых переходов. Задачу рассмотрим в декартовой системе координат (x, y) (рис. 1). Зададим следующие граничные условия на входе в расширяющуюся часть канала (h – полуширина узкой части канала):

$$x = 0, \quad -h < y < h:$$

$$a = a_*, \quad N = N_*, \quad p = p_0, \quad \rho_1^\circ = \rho_{10}^\circ,$$

$$T_s = T_s(p_0) \equiv T_{s0}, \quad T = T_0 < T_{s0},$$

$$u = u_0, \quad v = 0.$$

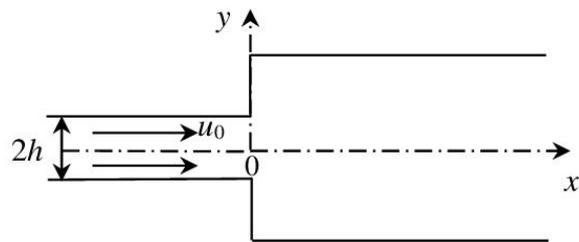


Рис. 1. Схема задачи

Fig. 1. Problem scheme

Здесь a_*, N_* – критический радиус и концентрация зародышей, соответствующие начальному пересыщению пара на входе в расширенную часть канала (при $x = 0$), u, v – компоненты вектора скорости по декартовым осям x, y .



На твердых границах примем условие непротекания, а на свободной (правой) границе – условие непрерывности течения. В качестве начальных условий в расширенной части канала примем условия невозмущенной газовой фазы (без зародышей жидкой фазы). Заметим, что течение смеси симметрично относительно продольной оси x .

Для полноты постановки задачи необходимо задать критические параметры a_* , N_* зародышей появляющихся в потоке при входе в расширяющуюся часть канала.

3.2. Определение критических параметров зародышей

Критические величины a_* , N_* , определяются исходя из молекулярно-кинетической теории процесса гомогенной нуклеации, которая основана на том, что в газе в результате флуктуаций концентрации молекул в их хаотическом движении непрерывно образуются и разрушаются кластеры (микрокапли в переохлажденном паре). В случае максвелловского распределения молекул по скоростям распределение указанных кластеров по радиусу описывается формулой Гиббса. Работа $\delta Z(a)$ равна изменению термодинамического потенциала Гиббса для вещества, входящего в кластер с учетом вклада для создания поверхности жидкой фазы [1]

$$\delta Z(a) = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_2^0 \Delta z + 4\pi a^2 \sigma,$$

$$\Delta z = z_2(p, T) - z_1(p, T).$$

Здесь z – потенциал Гиббса, σ – поверхностное натяжение. В метастабильном состоянии, когда $z_2 < z_1$ (переохлажденный пар или перегретая жидкость), величина $\delta Z(a)$ имеет максимум при $a = a_*$

$$a_* = -\frac{2\sigma}{\rho_2^0 \Delta z},$$

$$\delta Z(a_*) \equiv E_* = \frac{4\pi}{3} a_*^3 \sigma. \quad (8)$$

Величина E_* – работа создания критического зародыша. Таким образом, если в метастабильной несущей фазе возникает кластер с размером $a > a_*$, то оно должно расти, так как это приводит к уменьшению термодинамического потенциала системы. Такой сверхкритический кластер может оказаться зародышем новой дисперсной фазы. Докритические кластеры с радиусом $a < a_*$ должны исчезать, так как это

также приводит к уменьшению термодинамического потенциала. Концентрация критических зародышей определяется по формуле $N(a_*) \equiv N_* = N_1 \exp(-E_*/k_B T)$.

Следует отметить, что теория образования и роста зародышей становится все более актуальной с развитием материаловедения, нанотехнологии, микроэлектроники и до сих пор еще совершенствуется. Подробный анализ развития теории нуклеации с учетом результатов экспериментов осуществлен в [14, 15]. Отмечено, что теория нуклеации находится в начале нового этапа развития, который будет, по существу, полумпирическим, поскольку теоретические методы в рамках классической теории гомогенной нуклеации имеют ряд ограничений фундаментального характера. Некоторые аспекты процесса нуклеации изучены, например, в [16, 17]. В [16], в частности, приведен метод определения поверхностного натяжения критического зародыша из экспериментально измеренной скорости нуклеации при известных пересыщении и температуре, а в недавно опубликованной работе [17] представлен упрощенный подход, позволяющий оценить влияние гомогенной нуклеации на параметры пара вблизи поверхности испарения.

Несмотря на наличие разных модификаций теории зародышеобразования в этой работе будем придерживаться классической теории гомогенной нуклеации, которая хорошо зарекомендовала себя во многих теоретических и экспериментальных исследованиях.

Согласно современным представлениям процесс кластеризации в высокоскоростных потоках можно разделить на две стадии [5, 8]. На первой стадии определяющим является процесс образования зародышей критического размера, на второй – процессы конденсационного роста и коагуляции вновь образовавшихся зародышей, когда нуклеацию можно не учитывать. Хотя в ряде случаев рассматриваемые процессы протекают одновременно, такое разделение представляется вполне разумным.

3.3. Уравнения движения в плоской двумерной постановке

Уравнения (1), (2) в рамках принятой плоской двумерной постановки можно привести к форме

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1 v}{\partial y} = -n j_{12},$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_2 v}{\partial y} = n j_{12}, \quad (9)$$



$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu}{\partial x} + \frac{\partial nv}{\partial y} = -J_c, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho Eu}{\partial x} + \frac{\partial \rho Ev}{\partial y} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Здесь уравнения импульсов и полной энергии приведены в дивергентный вид. Такая форма записи уравнений движения смеси удобна для численного интегрирования по методу крупных частиц (МКЧ), который используется в данной работе.

4. Краткое описание МКЧ

Для дискретного моделирования поставленной задачи воспользуемся методом крупных частиц, который разработан для решения задач газовой динамики [18], а впоследствии модифицирован для задач механики многофазных сред [19]. МКЧ позволяет по единому алгоритму исследовать сложные задачи в широком диапазоне изменения начальных условий при наличии различных особенностей течений. Метод относится к группе методов частиц в ячейках, но также использует механизмы, свойственные эйлеровым методам. Основная идея МКЧ состоит в расщеплении исходной системы уравнений по физическим процессам, что позволяет модифицировать метод для учета дополнительных процессов. Приведем краткое описание метода применительно к нестационарному течению дисперсной среды.

Согласно положениям МКЧ область интегрирования покрывается эйлеровой сеткой с прямоугольными ячейками (“крупные частицы”). Интегрирование проводится в два этапа. На первом из них, называемом эйлеровым этапом, движение фаз через границы разностных ячеек и межфазный обмен импульсом и энергией отсутствуют. Поэтому в системе уравнений отбрасываются слагаемые, обязанные конвективному переносу массы, импульса и энергии фаз, и из соответствующих редуцированных уравнений системы определяются промежуточные значения скоростей и полных энергий фаз. На первом, т. е. эйлеровом этапе, все параметры частиц, а также плотность газа остаются неизменными.

На втором, лагранжевом этапе учитывается межфазовый обмен импульсом и энергией в условиях перемещения фаз через границы

разностных ячеек. При этом используются вычисленные на первом этапе промежуточные значения параметров. Полагается, что вся масса переносится только за счет нормальной к границе составляющей скорости фаз. Потоки масс можно определять по формулам первого порядка точности, которые позволяют проводить устойчивый счет без введения явных членов искусственной вязкости. Устойчивость вычислений при этом обеспечивается внутренней структурой разностной схемы – наличием аппроксимационной вязкости. Окончательные значения параметров фаз определяются на основе законов сохранения массы, импульса и энергии, записанных для отдельных ячеек эйлеровой сетки.

Отметим, что первый этап описанной схемы дискретного моделирования является неустойчивой, однако за счет абсолютной устойчивости второго этапа разностная схема в целом становится тоже устойчивой. Подробный анализ вопросов аппроксимации, устойчивости, точности и других свойств МКЧ проделан в работах [18, 19]. В частности, показано, что в данной дискретной модели внутри области интегрирования имеет место строгое выполнение законов сохранения массы, импульса и энергии. Шаг счета по времени определяется условиями устойчивости типа Куранта – Фридрихса – Леви [19]. Граничные условия в МКЧ задаются путем введения дополнительных фиктивных ячеек вдоль всей границы расчетной области, параметры состояния в которых определяются на каждом временном шаге на основе состояния соседних ячеек.

Заметим, что согласно квазиравновесной модели в уравнениях (2) (также в уравнениях (11), (12)) члены, ответственные за межфазный обмен импульсом и энергией, отсутствуют, в связи с чем проведение расчетов с помощью МКЧ несколько упрощается.

5. Обсуждение результатов

Поставленная выше задача о течении дисперсной смеси в канале с внезапным расширением при наличии конденсационного роста зародышей жидкой фазы и их коагуляции решена численно с помощью МКЧ, который был применен к системе уравнений (9)–(12) (предварительно приведенной к безразмерной форме). Расчеты проведены для пара воды и зародышей водяных капель. Начальные значения определяющих параметров на входе в расширяющуюся часть канала следующие: давление $p_0 = 1$ МПа,



температура насыщения, соответствующая данному давлению, $T_{s0} = 453$ К, плотность пара $\rho_{10}^{\circ} = 5.15$ кг/м³, плотность воды $\rho_2^{\circ} = 887$ кг/м³, вязкость пара $\mu_1 = 1.49 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), теплоемкость пара $c_1 = 2615$ м²/(с²·К), теплоемкость воды $c_2 = 4410$ м²/(с²·К), коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0.042$ кг/с² [2]. Степень переохлаждения пара $\theta = (T_{s0} - T_0)/T_{s0}$ варьировалась в диапазоне от 0.022 до 0.066. При этом рассчитанный по формуле (8) критический радиус зародышей $a_* \sim 1$ нм. Для удобства скорость среды отнесена к начальной скорости звука в газе, а остальные параметры – к соответствующим значениям на входе в расширяющийся канал. Значения продольной и поперечной координат отнесены к полуширине узкой части канала. Поскольку картина течения симметрична относительно продольной оси канала, то расчеты проведены только для верхней половины канала. При этом на оси канала ставилось условие симметричности течения. Полуширина узкого канала разделена на 10 ячеек, а расчетная область разбивалась на равномерную квадратную эйлерову сетку с размерами 100 ячеек в продольном и 50 ячеек в поперечном направлениях (при этом безразмерный шаг координатной сетки δ равен 0.1) Безразмерный шаг по времени $\tau = 0.1\delta$ (такое значение τ в достаточной степени удовлетворяет условию устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви).

Расчеты проводились с помощью программы, созданной для реализации алгоритма МКЧ в математической системе MATLAB. Точность расчетов контролировалась путем проведения повторных вычислений с уменьшенными вдвое шагами по времени и координатам. Для проверки правильности работы построенного алгоритма дискретного моделирования на основе МКЧ были проведены расчеты по распространению плоской ударной волны в чистом (без частиц) газе, а также в пространстве, полностью заполненном смесью газа с дисперсными частицами. Сравнение полученных численных решений с известными решениями [1, 18, 19] показало их полное соответствие. Максимальное время счета типичных вариантов на домашнем персональном компьютере с процессором «Intel Core i3-3240 CPU» с частотой 3.40 НГz (оперативной памятью 4.00 ГБ и 32-разрядной операционной системой) составляло не более 20 мин. Ниже представлены некоторые результаты расчетов, полученные при степени переохлаждения пара $\theta = 0.044$.

На рис. 2 представлено поле скорости смеси на момент времени 0.4 с после входа в расширяющуюся часть канала. Видно, что течение имеет вихревую структуру, причем, как показали расчеты, такая структура перемещается по расширенному каналу, приблизительно сохраняя свою форму. Такое поведение смеси по-видимо-

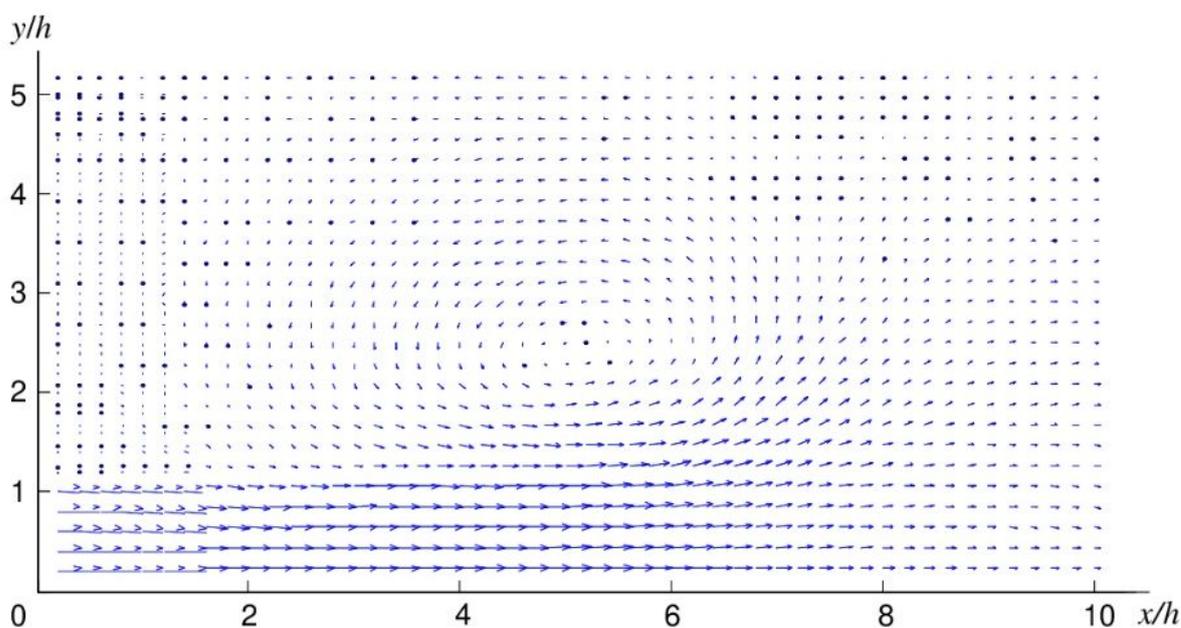


Рис. 2. Поле скорости смеси в расширяющейся части канала
Fig. 2. Mixture velocity field in the expanding part of the channel



му, связано с тем, что поток дисперсной смеси после входа в расширяющийся канал встречается на своем пути покоящуюся среду, вследствие чего тормозится и заворачивает в сторону (сказанное подкрепляется характером распределения скорости смеси). Отметим, что в зоне вихревого течения скорость среды существенно меньше, чем во входящем в канал потоке.

Рис. 3 иллюстрирует распределение приведенной плотности дисперсной фазы в расширенной части канала. Отметим, что распределение плотности дисперсной фазы имеет рогообразный (или вихревой) вид. Причем наибольшая плотность дисперсной фазы наблюдается на передней части рогообразной структуры. Это связано с тем, что в области переднего фронта натекающего потока происходит его торможение за счет взаимодействия с покоящейся средой и, вследствие этого, – накопление частиц в этой зоне. Протяженность и высота рогообразной структуры на рассматриваемый момент времени достигают соответственно порядка 10-кратной и 4-кратной полуширины входной части канала. Замечено, что распределение давления идентично распределению плотности смеси. Следует иметь в виду, что процесс коагуляции способствует уменьшению концентрации капель (за счет их слияния), вследствие чего уменьшается общая межфазная поверхность в смеси, и это приводит, соответственно, к уменьшению

интенсивности фазовых переходов (влияние коагуляции подробно обсуждается ниже).

Важно сравнить расчетные данные с экспериментом. С этой целью на рис. 4 показана экспериментальная картина течения, полученная в результате двух последовательных выхлопов воздуха через отверстие [21] (визуализация течения получалась при помощи дымовой проволоочки, протянутой поперек отверстия). Эта картина течения воспроизведена и описана также в [22], где собраны разные иллюстрации течений газа и жидкости, полученные в экспериментах. На представленном рисунке отчетливо видна симметричная вихревая структура течения, при этом наблюдается накопление дымовых частиц (дисперсной фазы) на передней части структуры. Эти обстоятельства согласуются с результатами численного эксперимента (см. рис. 3).

Результаты расчетов показали, что наиболее крупные капли формируются именно в зоне вихря, причем первоначальный радиус капель за счет процессов коагуляции и конденсации увеличивается на расчетный момент времени более чем в 10 раз. Существенное укрупнение капель наблюдается также в области передней части рогообразной структуры. Поскольку скорость коагуляции пропорциональна квадрату концентрации частиц (формула (7)), то можно полагать, что рост размеров капель в указанных областях связано с увеличением концентрации капель при торможении смеси. К тому же повышение

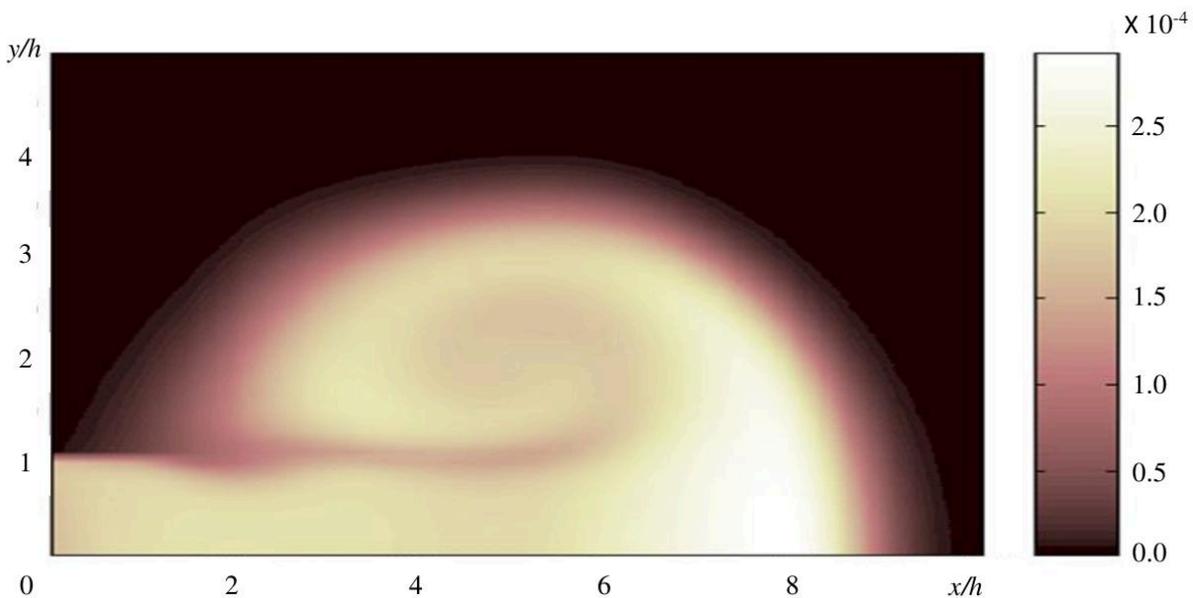


Рис. 3. Распределение приведенной плотности дисперсной фазы (цвет онлайн)

Fig. 3. Distribution of the reduced density of the dispersed phase (color online)

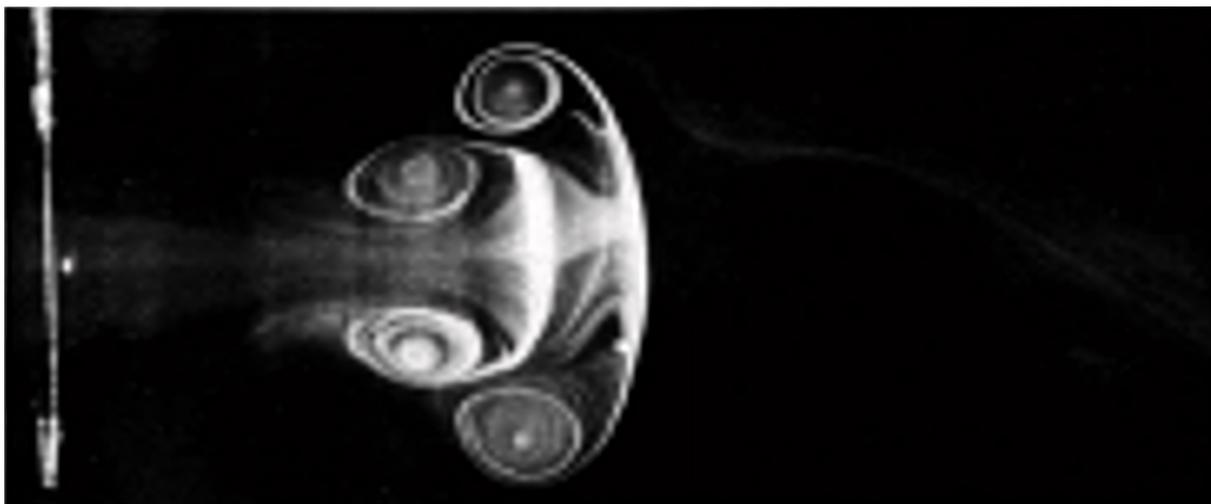


Рис. 4. Картина течения, полученная в результате двух последовательных выхлопов воздуха через отверстие [22]

Fig. 4. Flow pattern obtained as a result of two successive air exhausts through an orifice [22]

температуры смеси, обусловленное торможением потока и конденсацией пара на межфазной поверхности (при конденсации выделяется некоторое количество теплоты), также способствует росту скорости коагуляции (коэффициент коагуляции зависит от температуры, см. выше).

Важно изучить влияние процесса коагуляции на течение смеси в канале. С этой целью получены расчетные распределения параметров смеси при отсутствии процесса коагуляции, которые показали, что распределение приведенной плотности дисперсной фазы обладает такой же “рогообразной” структурой, как при наличии коагуляции. Однако приведенная плотность дисперсной фазы достигает в этом случае заметно больших значений из-за конденсации пара на межфазной поверхности. Это обусловлено тем, что при отсутствии коагуляции фазовые переходы происходят на большей межфазной поверхности (поскольку коагуляция, как отмечено выше, приводит к уменьшению межфазной поверхности, где происходят фазовые превращения). В случае отсутствия процесса коагуляции капли увеличиваются только за счет конденсации пара на межфазной поверхности, поэтому размеры капель не достигают существенных значений (в частности, радиус капель увеличивается не более чем ~ 2 раза, что существенно меньше по сравнению со случаем, когда имеет место коагуляция). Таким образом, процесс коагуляции существенно влияет на рост кластеров при течении смеси пара и зародышей конденсированной фазы в канале.

Для изучения влияния степени переохлаждения пара в узкой части канала получено распределение приведенной плотности капель при другом значении параметра $\theta = 0.066$. Обнаружено, что этот параметр существенно влияет на приведенную плотность дисперсной фазы. Например, увеличение параметра θ на 50% приводит, как показали расчеты, к росту приведенной плотности дисперсной фазы примерно на три порядка.

Заключение

На основе квазиравновесной модели проведены расчеты течения дисперсной смеси в канале с внезапным расширением с учетом процессов нуклеации, коагуляции и фазовых переходов. Установлены основные свойства поведения параметров смеси вдоль канала. В частности, обнаружено, что течение имеет вихревую структуру, причем наиболее крупные капли создаются в зоне вихря. Показано, что наличие процесса коагуляции сильно влияет на распределение размеров частиц в потоке, приводя к существенному их увеличению. Изучено влияние степени переохлаждения пара на течение дисперсной смеси в канале и установлено, что этот параметр влияет на распределение плотности дисперсной фазы значительно.

Таким образом, для укрупнения микрокапель (или микрочастиц) в дисперсных потоках целесообразно, в частности, создавать в потоке вихревые структуры, где формируются (в основном за счет коагуляции) наиболее крупные частицы.



В целом течение дисперсной смеси во внешне расширяющемся канале имеет сложный характер из-за наличия фазовых переходов, коагуляции частиц, взаимодействия набегающей и покоящейся сред.

Полученные результаты и выводы могут быть полезны в разных областях современной технологии: при проектировании теплоэнергетических и теплообменных установок, для исследования процессов истечения дисперсных смесей из емкостей, для моделирования процессов образования и роста зародышей (в частности, нанокластеров) в насыщенных средах и т. п.

Список литературы

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред : в 2 ч. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 456 с.
2. Zhang Y., Erkey C. Preparation of supported metallic nanoparticles using supercritical fluids: A review // *J. Supercrit. Fluids*. 2006. Vol. 38, iss. 2. P. 252–267. <https://doi.org/10.1016/j.supflu.2006.03.021>
3. Weber M., Russell L. M., Debenedetti P. G. Mathematical modeling of nucleation growth formed by the rapid expansion of supercritical solution under subsonic conditions // *J. Supercrit. Fluids*. 2002. Vol. 23, iss. 1. P. 65–80. [https://doi.org/10.1016/S0896-8446\(01\)00134-6](https://doi.org/10.1016/S0896-8446(01)00134-6)
4. Jun Li, Matos H. A., Gomes de Azevedo E. Two-phase homogenous model for particle formation gas saturated solution process // *J. Supercrit. Fluids*. 2004. Vol. 32, iss. 1–3. P. 275–286. <https://doi.org/10.1016/j.supflu.2004.01.004>
5. Волков В. А., Муслаев А. В., Пирумов У. Г., Розовский П. В. Неравновесная конденсация паров металла в смеси с инертным газом при расширении в соплах установок для генерации кластерных пучков // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 1995. № 3. С. 39–46.
6. Волков В. А., Муслаев А. В., Розовский П. В. Численное моделирование неравновесной конденсации паров металла в сверхзвуковом сопле // *Математическое моделирование*. 1990. Т. 2, № 11. С. 56–63.
7. Пирумов У. Г. Перспективные методы получения ультрадисперсных частиц в высокоскоростных потоках // *Проблемы машиностроения и надежности*. 1996. № 1. С. 94–116.
8. Анিকেев В. И., Степанов Д. А., Ермакова А. Моделирование и расчет процесса быстрого расширения сверхкритического флюида с образованием наночастиц // *Теоретические основы химической технологии*. 2011. Т. 45, № 2. С. 155–169.
9. Jung J., Perrut M. Particle design using supercritical fluids: Literature and patent survey // *J. Supercrit. Fluids*. 2001. Vol. 20, iss. 3. P. 179–219. [https://doi.org/10.1016/S0896-8446\(01\)00064-X](https://doi.org/10.1016/S0896-8446(01)00064-X)
10. Amanbaev T. R., Tilleuov G. E., Zuparbekova A. Mathematical modeling of dispersed media flows in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions // *Bulletin of the Karaganda University. Physics Series*. 2021. № 2. P. 14–24. <https://doi.org/10.31489/2021ph2/14-24>
11. Тимошенко В. И. Квазигомогенная модель газодисперсных течений с химическими реакциями и фазовыми переходами // *Докл. НАН Укр*. 2018. № 2. С. 34–42. <https://doi.org/10.15407/dopovid2018.02.034>
12. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л. : Гидрометеиздат, 1975. 351 с.
13. Галкин В. А. Уравнение Смолуховского. М. : Физматлит, 2001. 336 с.
14. Анисимов М. П. Нуклеация: теория и эксперимент // *Успехи химии*. 2003. Т. 72, № 7. С. 664–705. <https://doi.org/10.1070/RC2003v072n07ABE H000761>
15. Karthika S., Radhakrishnan T. K., Kalaichelvi P. A review of classical and nonclassical nucleation theories // *Crist. Growth Des*. 2016. Vol. 16, № 11. P. 6663–6681. <https://doi.org/10.1021/acs.cgd.6b00794>
16. Боровкова О. В., Восель С. В., Онищук А. А., Бакланов А. М., Фомин В. М. Экспериментальное изучение гомогенной нуклеации пересыщенного пара висмута. Оценка поверхностного натяжения критических зародышей // *Доклады РАН. Физическая химия*. 2013. Т. 449, № 1. С. 1–5. <https://doi.org/10.7868/S0869565213070141>
17. Левашов В. Ю., Майоров В. О., Крюков А. П. Влияние гомогенной нуклеации на параметры пара вблизи поверхности испарения: упрощенный подход // *Письма в ЖТФ*. 2022. Т. 48, вып. 21. С. 6–9. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2022.21.53703.19342>
18. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М. : Наука, 1985. 365 с.
19. Нигматулин Р. И., Ивандяев А. И., Губайдуллин А. А. Модифицированный метод «крупных частиц» для расчета нестационарных волновых процессов в многофазных дисперсных средах // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1977. Т. 17, № 6. С. 1531–1544.
20. Вукалович М. П., Ривкин С. Л., Александров А. А. Таблицы теплофизических свойств воды и водяного пара. М. : Изд-во стандартов, 1969. 654 с.
21. Yamada H., Matsui T. Preliminary study of mutual slip-through of a pair of vortices // *Phys. Fluids*. 1978. Vol. 21. P. 292–294. <https://doi.org/10.1063/1.862206>
22. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М. : Мир, 1986. 184 с.

References

1. Nigmatulin R. I. *Dynamics of multiphase media*. New York, Hemisphere, 1991. 507 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1987. 456 p.).
2. Zhang Y., Erkey C. Preparation of supported metallic nanoparticles using supercritical fluids: A review. *J. Supercrit. Fluids*, 2006, vol. 38, iss. 2, pp. 252–267. <https://doi.org/10.1016/j.supflu.2006.03.021>
3. Weber M., Russell L. M., Debenedetti P. G. Mathematical modeling of nucleation growth formed by the rapid expansion of supercritical solution under subsonic conditions. *J. Supercrit. Fluids*, 2002, vol. 23,



- iss. 1, pp. 65–80. [https://doi.org/10.1016/S0896-8446\(01\)00134-6](https://doi.org/10.1016/S0896-8446(01)00134-6)
4. Jun Li, Matos H. A., Gomes de Azevedo E. Two-phase homogenous model for particle formation gas saturated solution process. *J. Supercrit. Fluids*, 2004, vol. 32, iss. 1–3, pp. 275–286. <https://doi.org/10.1016/j.supflu.2004.01.004>
 5. Volkov V. A., Muslaev A. V., Pirumov U. G., Rozovskii P. Nonequilibrium condensation of metal vapor mixed with an inert gas in nozzle expansion in cluster beam generators. *Fluid Dyn.*, 1995, vol. 30, iss. 3, pp. 399–408. <https://doi.org/10.1007/BF02282452>
 6. Volkov V. A., Muslaev A. V., Rozovskii P. V. Numerical simulation of nonequilibrium condensation of metal vapor in supersonic nozzle. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 1990, vol. 2, no. 11, pp. 56–63 (in Russian).
 7. Pirumov U. G. Promising methods for obtaining ultrafine particles in high-speed flows. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 1996, no. 1, pp. 94–116 (in Russian).
 8. Anikeev V. I., Stepanov D. A., Ermakova A. Modeling and calculation of the process of rapid expansion of supercritical fluid yielding nanoparticles. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2011, vol. 45, iss. 2, pp. 141–155. <https://doi.org/10.1134/S0040579511020035>
 9. Jung J., Perrut M. Particle design using supercritical fluids: Literature and patent survey. *J. Supercrit. Fluids*, 2001, vol. 20, iss. 3, pp. 179–219. [https://doi.org/10.1016/S0896-8446\(01\)00064-X](https://doi.org/10.1016/S0896-8446(01)00064-X)
 10. Amanbaev T. R., Tilleuov G. E., Zuparbekova A. Mathematical modeling of dispersed media flows in the presence of nucleation, coagulation and phase transitions. *Bulletin of the Karaganda University. Physics Series*, 2021, no. 2, pp. 14–24. <https://doi.org/10.31489/2021ph2/14-24>
 11. Timoshenko V. I. Quasihomogeneous model of gas-dispersed flows with chemical reactions and phase transitions. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2018, no. 2, pp. 34–42 (in Russian). <https://doi.org/10.15407/dopovid2018.02.034>
 12. Voloshchuk V. M., Sedunov Iu. S. *Protsessy koagulyatsii v dispersnykh sistemakh* [The coagulation processes in dispersed systems]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1975. 351 p. (in Russian).
 13. Galkin V. A. *Uravnenie Smolukhovskogo* [Smoluchowski's equation]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 336 p (in Russian).
 14. Anisimov M. P. Nucleation: Theory and experiment. *Russ. Chem. Rev.*, 2003, vol. 72, iss. 7, pp. 591–628. <https://doi.org/10.1070/RC2003v072n07ABEH000761>
 15. Karthika S., Radhakrishnan T. K., Kalaichelvi P. A review of classical and nonclassical nucleation theories. *Crist. Growth Des.*, 2016, vol. 16, no. 11, pp. 6663–6681. <https://doi.org/10.1021/acs.cgd.6b00794>
 16. Borovkova O. V., Vosel' S. V., Onischuk A. A., Baklanov A. M., Fomin V. M. Experimental investigation of the homogeneous nucleation of a supersaturated bismuth vapor: Estimation of the surface tension of critical nuclei. *Dokl. Phys. Chem.*, 2013, vol. 449, no. 1, pp. 29–33. <https://doi.org/10.1134/S0012501613030019>
 17. Levashov V. Yu., Mayorov V. O., Kryukov A. P. Influence of homogeneous nucleation on vapor parameters near the evaporation surface: A simplified approach. *Technical Physics Letters*, 2022, vol. 48, iss. 11, pp. 4–6. <https://doi.org/10.21883/TPL.2022.11.54877.19342>
 18. Belotserkovskii O. M., Davydov Yu. M. *Metod krupnykh chastits v gazovoi dinamike* [Large particles method in gas dynamics]. Moscow, Nauka, 1985. 365 p (in Russian).
 19. Nigmatulin R. I., Ivandaev A. I., Gubaidullin A. A. Modified method of large particles for calculation of non-stationary wave processes in multiphase dispersed media. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1977, vol. 17, no. 6, pp. 1531–1544 (in Russian).
 20. Vukalovich M. P., Rivkin S. L., Aleksandrov A. A. *Tablitsy teplofizicheskikh svoystv vody i vodianogo para* [Tables of thermophysical properties of water and steam]. Moscow, Izdatelstvo standartov, 1969. 654 p (in Russian).
 21. Yamada H., Matsui T. Preliminary study of mutual slip-through of a pair of vortices. *Phys. Fluids*, 1978, vol. 21, pp. 292–294. <https://doi.org/10.1063/1.862206>
 22. Dyke M. Van *An album of fluid motion*. Stanford, The Parabolic Press, 1982. 184 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 184 p.).

Поступила в редакцию 12.02.2024; одобрена после рецензирования 27.03.2024; принята к публикации 02.04.2024
The article was submitted 12.02.2024; approved after reviewing 27.03.2024; accepted for publication 02.04.2024