



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 328–337

*Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 328–337

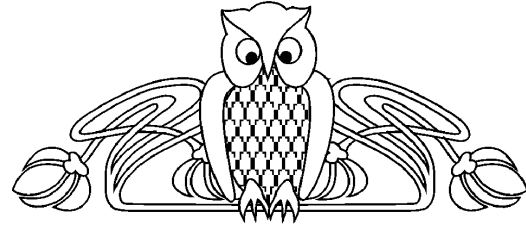
<https://fizika.sgu.ru>


<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-4-328-337>, EDN: RJJBAP

Научная статья

УДК 517.9

## Высокоразмерное дискретное отображение на базе связанных квазипериодических генераторов



А. П. Кузнецов, Ю. В. Седова 

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Россия, 410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Кузнецов Александр Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, [kuzalexp@yandex.ru](mailto:kuzalexp@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>

Седова Юлия Викторовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [sedovayv@yandex.ru](mailto:sedovayv@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7843-646X>

**Аннотация.** Методом дискретизации уравнений связанных квазипериодических генераторов получено новое высокоразмерное отображение. Для этого отображения построены карты ляпуновских показателей на плоскости частотная расстройка генераторов – величина связи. Продемонстрировано существование инвариантных торов разной размерности. Представлены графики ляпуновских показателей и фурье-спектры. Наблюдаются бифуркации инвариантных торов и резонансная паутина Арнольда. Исследована эволюция карт с ростом параметра дискретизации, продемонстрировано разрушение высокоразмерных торов. Изучается влияние шума разной интенсивности.

**Ключевые слова:** квазипериодичность, инвариантные торы, ляпуновские показатели


**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН.

**Для цитирования:** Кузнецов А. П., Седова Ю. В. Высокоразмерное дискретное отображение на базе связанных квазипериодических генераторов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 328–337. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-4-328-337>, EDN: RJJBAP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

### High-dimensional discrete map based on coupled quasi-periodic generators

A. P. Kuznetsov, Yu. V. Sedova 

Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, 38 Zelyonaya St., Saratov 410019, Russia

Alexander P. Kuznetsov, [kuzalexp@yandex.ru](mailto:kuzalexp@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>

Yuliya V. Sedova, [sedovayv@yandex.ru](mailto:sedovayv@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7843-646X>

**Abstract. Background and Objectives:** Quasi-periodic oscillations are widespread in nature and technology. In the phase space, quasi-periodic oscillations with a different number of incommensurable frequencies correspond to invariant tori of different dimensions. Multiparametric analysis of high-dimensional systems is quite difficult. The way out of this situation can be the transition from systems with continuous time to discrete maps. **Materials and Methods:** In the paper we use a discretization method for the transition from a continuous-time system (two coupled quasi-periodic generators) to a new high-dimensional map. The time derivatives are replaced by finite differences. There is a new additional parameter corresponding to the discretization step, with the variation of which the system can demonstrate new interesting properties. **Results:** A new high-dimensional map has been obtained by the discretization method of differential equation system of coupled quasi-periodic generators. For this map, charts of Lyapunov exponents have been constructed in the plane of the frequency detuning of generators and the coupling magnitude. The existence of invariant tori of different dimensions has been demonstrated. Graphs of Lyapunov exponents and Fourier spectra have been presented. The evolution of maps with an increase of the discretization parameter has been investigated, the destruction of high-dimensional tori has been demonstrated. The influence of noise of different intensity has been studied. **Conclusion:** The two-parameter Lyapunov analysis of the new high-dimensional map made it possible to identify regions of invariant tori of different dimensions, up to five-frequency ones. The map demonstrates Fourier spectra characteristic of quasi-periodicity of increasing dimension. Quasi-periodic bifurcations of invariant tori and an Arnold resonance web based on invariant tori of different dimensions have been observed. With the growth of the discretization parameter, the destruction of high-dimensional tori occurs. An increase in the discretization parameter leads to the destruction of high-dimensional tori with an increase in the noise intensity.

**Keywords:** quasiperiodicity, invariant tori, Lyapunov exponents



**Acknowledgments:** This work was carried out in the framework of the State Task of Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences.

**For citation:** Kuznetsov A. P., Sedova Yu. V. High-dimensional discrete map based on coupled quasi-periodic generators. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 328–337 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-4-328-337>, EDN: RJJBAP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC0-BY 4.0)

## Введение

Квазипериодические колебания широко распространены в природе и технике [1–5]. Они могут наблюдаться как в неавтономных системах, так и в определенных типах автономных систем, своего рода генераторах квазипериодических колебаний [6–9]. Одной из интересных особенностей таких систем является возможность квазипериодических колебаний с разным числом несоизмеримых частот, чему в фазовом пространстве отвечают инвариантные торы разной размерности. Чем выше размерность исходной системы, тем более высокоразмерные торы могут наблюдаться. Однако многопараметрический анализ высокоразмерных систем достаточно трудоемок. Выходом из этой ситуации может служить переход от систем с непрерывным временем к дискретным отображениям. Одним из простых и в то же время эффективных приемов является дискретизация исходной системы, когда производные по времени заменяются конечными разностями. Этот прием восходит к первым исследованиям в области нелинейной динамики и его продолжают использовать [5, 10, 11]. Полученные таким способом отображения в чем-то наследуют динамику исходной системы, а в чем-то демонстрируют новые особенности. (Простейшие примеры – переход от одномерной потоковой системы с седло-узловой бифуркацией к логистическому отображению, построение отображения Заславского [5] и т. д.). Существенно и то, что появляется новый дополнительный параметр, отвечающий шагу дискретизации, при вариации которого система может демонстрировать новые свойства.

В настоящей работе мы применим такой подход для построения и исследования отображения, способного демонстрировать квазипериодичность высокой размерности (высокоразмерные инвариантные торы). Оно будет получено путем дискретизации уравнений двух связанных квазипериодических генераторов [9,12]. Отметим, что в [9] предложено целое семейство подобных генераторов, пригодное для анализа автономной квазипериодичности. Там же обсуж-

дается возможность экспериментальной реализации подобных генераторов.

В настоящей статье авторы используют наиболее физически мотивированную систему с единственным устойчивым состоянием равновесия.

## 1. Некоторые аспекты динамики системы с непрерывным временем и построение отображения

Будем использовать модель генератора квазипериодических колебаний, предложенную в [9]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\epsilon - z) - kx^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $x, z$  – динамические переменные,  $\omega_0$  – собственная частота генератора. Значения остальных параметров выбираем аналогично [9, 12]:  $\epsilon = 4, b = 1, k = 0.02, \beta = 1/18$ . На рис. 1 показана карта ляпуновских показателей отдельного генератора на плоскости параметров  $(\omega_0, \lambda)$ . На кар-

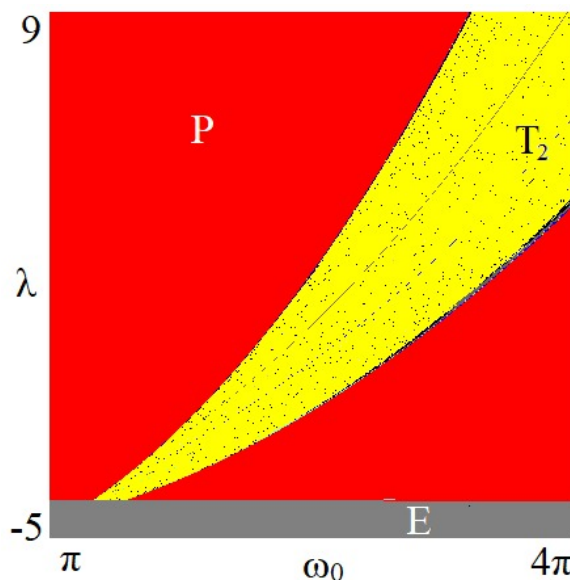


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей индивидуального генератора (цвет online)

Fig. 1. Chart of Lyapunov exponents of an individual generator (color online)



те P – периодический режим (один ляпуновский показатель нулевой, остальные отрицательные), T<sub>2</sub> – двухчастотный тор (два нулевых показателя). Область E – область устойчивого равновесия.

Можно видеть, что генератор демонстрирует квазипериодичность в широкой области собственных частот. Далее выберем значение  $\omega_0 = 2\pi$  в середине этой области.

Введем переменную  $y = \dot{x}$  и применим к полученной системе процедуру дискретизации, заменив производные конечными разностями. Получим тогда точечное отображение:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \cdot y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot ((\lambda_1 + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4) y_n - \omega_0^2 x_n - \mu(y_n - v_n)), \\ z_{n+1} &= z_n + h \cdot (b(\varepsilon - z_n) - k y_n^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $h$  – шаг дискретного времени, новый дополнительный параметр. Отметим, что для первого уравнения дискретизация выполнена по полуявной схеме Эйлера, т. е. используется значение переменной  $y$  в  $n + 1$ -й момент [6]. Отображение (2) в [13] названо тор-отображением. Его особенность – возможность не только двух-, но и трехчастотной квазипериодичности, а также квазипериодических бифуркаций, т. е. бифуркаций инвариантных торов [14–17].

Для построения системы с более высокоразмерными торами можно использовать систему двух связанных квазипериодических генераторов [12]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 + z + x^2 - \beta x^4) \dot{x} + \omega_0^2 x + \mu(\dot{x} - \dot{u}) &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - k \dot{x}^2, \\ \ddot{u} - (\lambda_2 + w + u^2 - \beta u^4) \dot{u} + (\omega_0 + \Delta)^2 u + \mu(\dot{u} - \dot{x}) &= 0, \\ \dot{w} &= b(\varepsilon - w) - k \dot{u}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Delta$  – частотная расстройка генераторов,  $\mu$  – параметр связи. Система (3) демонстрирует богатую динамику, но требует достаточно кропотливого численного исследования [12]. Для дальнейшего нам понадобится один из возможных вариантов ляпуновской карты связанных квазипериодических генераторов, показанный на рис. 2. На этой карте представлены основные возможные режимы, пояснения даны справа от рисунка (цветовая палитра) и в подписи к рисунку (детали см. в [12]). Отметим, что размерность инвариантных торов определяется по числу нулевых ляпуновских показателей.

Построим точечное отображение. Используя переменные  $y = \dot{x}$  и  $v = \dot{u}$  и проводя дискретизацию системы (3), получим:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \cdot y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot ((\lambda_1 + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4) y_n - \omega_0^2 x_n - \mu(y_n - v_n)), \\ z_{n+1} &= z_n + h \cdot (b(\varepsilon - z_n) - k y_n^2), \\ u_{n+1} &= u_n + h \cdot v_{n+1}, \\ v_{n+1} &= v_n + h \cdot ((\lambda_2 + w_n + u_n^2 - \beta u_n^4) v_n - (\omega_0 + \Delta)^2 u_n - \mu(v_n - y_n)), \\ w_{n+1} &= w_n + h \cdot (b(\varepsilon - w_n) - k v_n^2). \end{aligned} \quad (4)$$

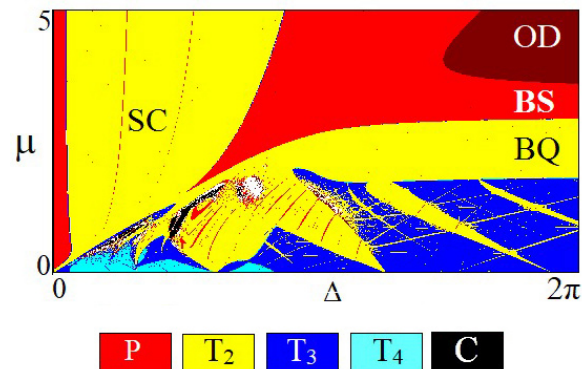


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей двух связанных генераторов, P – периодический режим, T<sub>2</sub> – двухчастотный тор, T<sub>3</sub> – трехчастотный тор, T<sub>4</sub> – четырехчастотный тор, C – хаос. SC – область синхронной квазипериодичности, OD – область гибели колебаний, BS – область широкополосной синхронизации, BQ – область широкополосной двухчастотной квазипериодичности. (Соответствующее обсуждение см. в [12].) Значения управляющих параметров  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -0.5$  (цвет online)

Fig. 2. Chart of Lyapunov exponents of two coupled generators, P – periodic mode, T<sub>2</sub> – two-frequency torus, T<sub>3</sub> – three-frequency torus, T<sub>4</sub> – four-frequency torus, C – chaos. SC is the region of synchronous quasi-periodicity, OD is the region of oscillation death, BS is the region of broadband synchronization, BQ is the region of broadband two-frequency quasi-periodicity. (For a corresponding discussion, see [12].) Values of the control parameters  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -0.5$  (color online)

## 2. Исследование отображения

Прежде всего построим ляпуновскую карту полученного отображения. Такая карта для малого значения параметра дискретизации  $h = 0.01$  показана в центре рис. 3. Остальные параметры те же, что и на рис. 2. Поскольку параметр дискретизации мал, то карта сохраняет некоторые черты системы с непрерывным временем, что видно из сопоставления рис. 2 и рис. 3. В то же время имеется и существенное отличие: происходит



изменение типов режимов. Так, вместо области гибели колебаний наблюдается периодический режим, вместо периодического – двухчастотная квазипериодичность, вместо трехчастотной квазипериодичности – четырехчастотная и т. д. Существенный момент – появление при малой связи пятичастотных торов  $T_5$ .

Разные типы динамики иллюстрируют фазовые портреты в проекции на плоскость  $(x, y)$  в выбранных точках плоскости параметров, расположенные по периферии рис. 3. Областям двухчастотной квазипериодичности при этом соответствует замкнутая инвариантная кривая. Мы будем, тем не менее, называть ее «двухчастотным тором» в соответствии с динамикой непрерывной системы, что сейчас является достаточно общепринятым. Добавление новой несоизмеримой частоты приводит к размыванию кривой. Отметим, что внутри языков двухчастотных торов можно наблюдать удвоения инвариантных кривых (торов).

Еще одной иллюстрацией высокочастотных торов являются соответствующие фурье-спек-

тры, показанные на рис. 4. Можно видеть характерную для квазипериодических колебаний структуру, обогащающуюся с ростом размерности торов.

На рис. 5 показаны графики всех шести ляпуновских показателей системы (4) в зависимости от величины связи вдоль правого обреза карты на рис. 3. При большой связи все показатели отрицательные, соответственно, наблюдается периодический режим (цикл). При уменьшении связи два показателя  $\Lambda_1 = \Lambda_2$  растут и в некоторой точке достигают нуля. Затем первый остается нулевым  $\Lambda_1 = 0$ , а второй снова уходит в отрицательную область. Наблюдается бифуркация Неймарка – Сакера – из периодического цикла рождается замкнутая инвариантная кривая, соответствующая двухчастотному тору [14–17]. Затем растет показатель  $\Lambda_2$  и в некоторой точке обращается в ноль. Теперь  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ , и в результате квазипериодической бифуркации Хопфа возникает трехчастотный тор [14–17]. Затем аналогичным образом ведет себя показатель  $\Lambda_3$ , и в ноль обращаются уже три показателя:

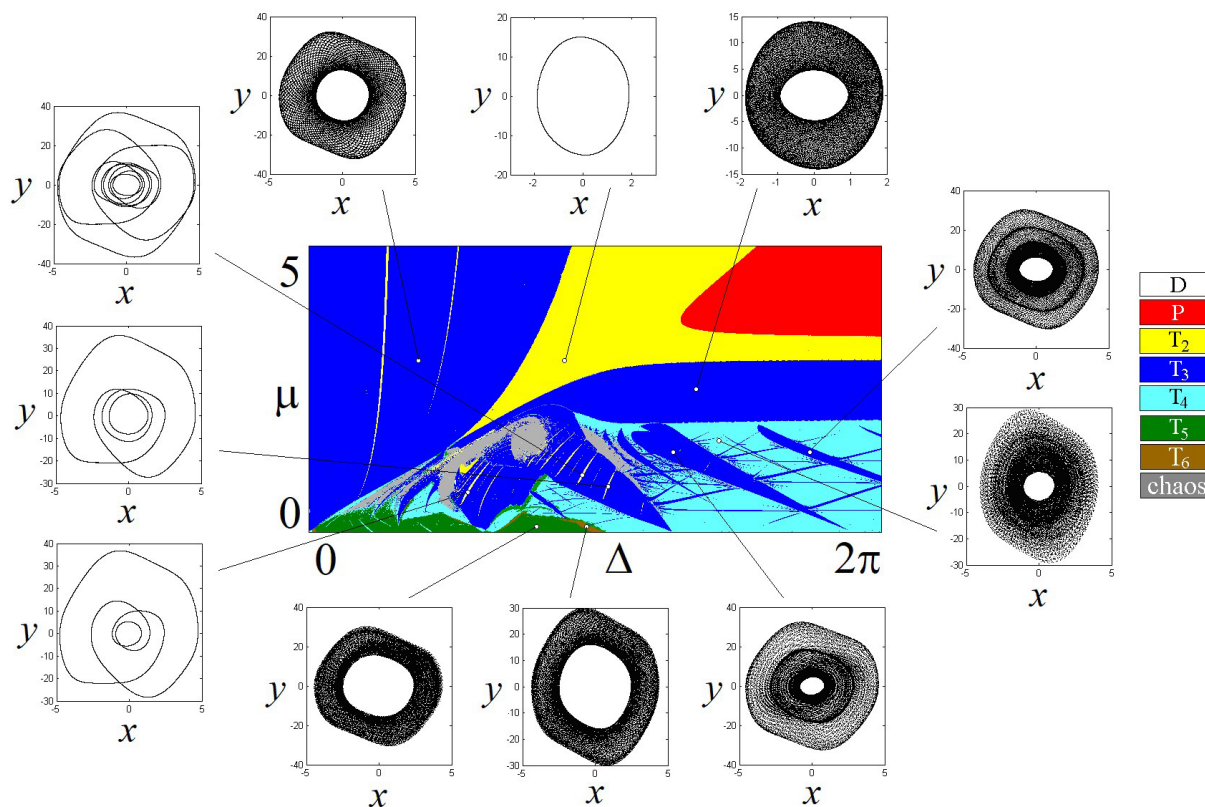


Рис. 3. Карта ляпуновских показателей двух связанных тор-отображений при малом значении параметра дискретизации  $h = 0.01$  и фазовые портреты в характерных точках плоскости параметров,  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -0.5$  (цвет online)

Fig. 3. Chart of Lyapunov exponents of two coupled torus maps with a small value of the discretization parameter  $h = 0.01$  and phase portraits at characteristic points of the parameter plane,  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -0.5$  (color online)

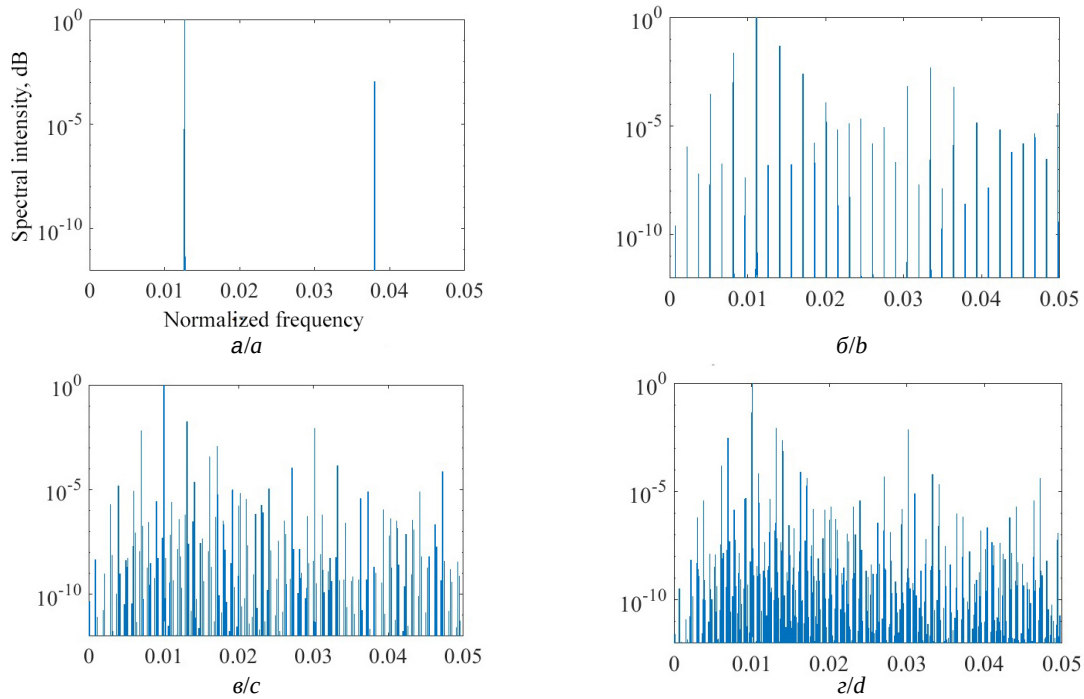


Рис. 4. Фурье-спектры для двух- (а), трех- (б), четырех- (в), пятичастотных (г) торов. Значения параметров:  $a - \Delta = 2.8, \mu = 3$ ;  $b - \Delta = 1.2, \mu = 3$ ;  $c - \Delta = 4.5, \mu = 0.2$ ;  $d - \Delta = 2.5, \mu = 0.1$  (цвет online)

Fig. 4. Fourier spectra for two- (a), three- (b), four- (c), five-frequency (d) tori. Parameter values:  $a - \Delta = 2.8, \mu = 3$ ;  $b - \Delta = 1.2, \mu = 3$ ;  $c - \Delta = 4.5, \mu = 0.2$ ;  $d - \Delta = 2.5, \mu = 0.1$  (color online)

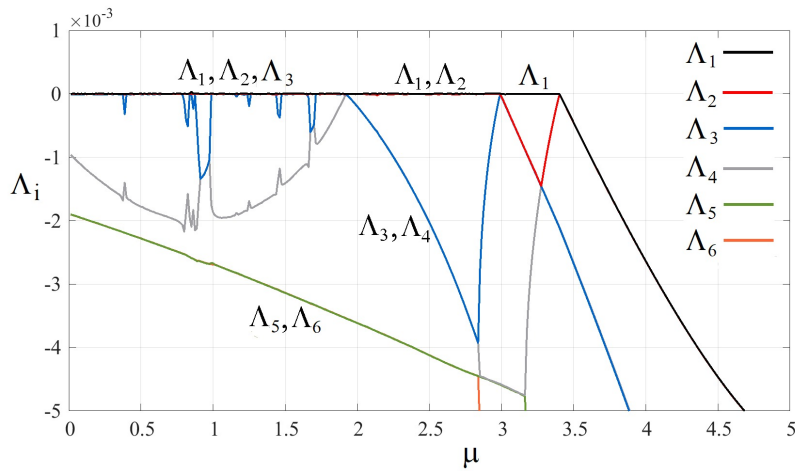


Рис. 5. Графики ляпуновских показателей в зависимости от величины связи вдоль правого обреза карты на рис. 3 (цвет online)

Fig. 5. Graphs of Lyapunov exponents depending on the coupling magnitude along the right edge of the chart in Fig. 3 (color online)

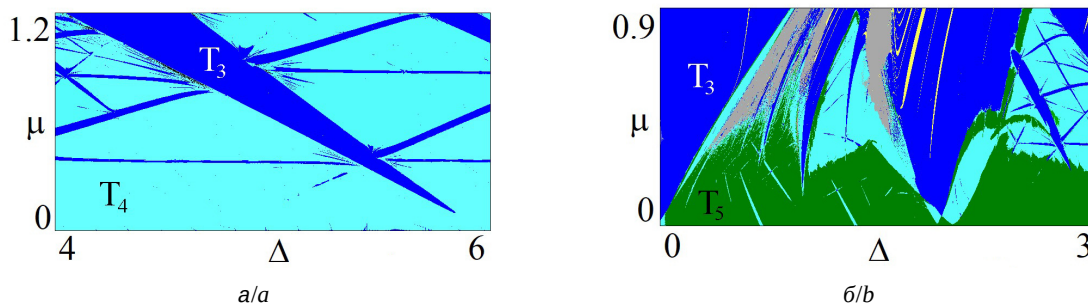


Рис. 6. Увеличенные фрагменты карты ляпуновских показателей, приведенных на рис. 3 (цвет online)

Fig. 6. Enlarged fragments of the chart of Lyapunov exponents in Fig. 3 (color online)





$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$ . В результате новой квазипериодической бифуркации Хопфа из трехчастотного тора рождается уже четырехчастотный тор.

Некоторые особенности устройства плоскости параметров иллюстрирует рис. 6, на котором показаны увеличенные фрагменты карты. Рис. 6, а демонстрирует резонансную паутину Арнольда [14–17) – систему узких пересекающихся областей трехчастотных торов, погруженную в область четырехчастотных. На рис. 6, б можно видеть достаточно обширную область пятичастотных торов при малых связях и языки трехчастотных и четырехчастотных торов.

### 3. Зависимость от параметра дискретизации

Таким образом, дискретное отображение существенно проще для численного исследования, но демонстрирует интересную динамику, в частности высокоразмерные торы. Кроме того, оно характеризуется еще одним новым управляющим параметром – шагом дискретизации  $h$ . Мы обсудили случай малого значения  $h = 0.01$ , что отвечает ситуации, близкой к системе с непрерывным временем. Зависимость картины режимов от параметра дискретизации иллюстрирует рис. 7. Можно видеть, что с ростом  $h$  сначала в основной области трехчастотной квазиперио-

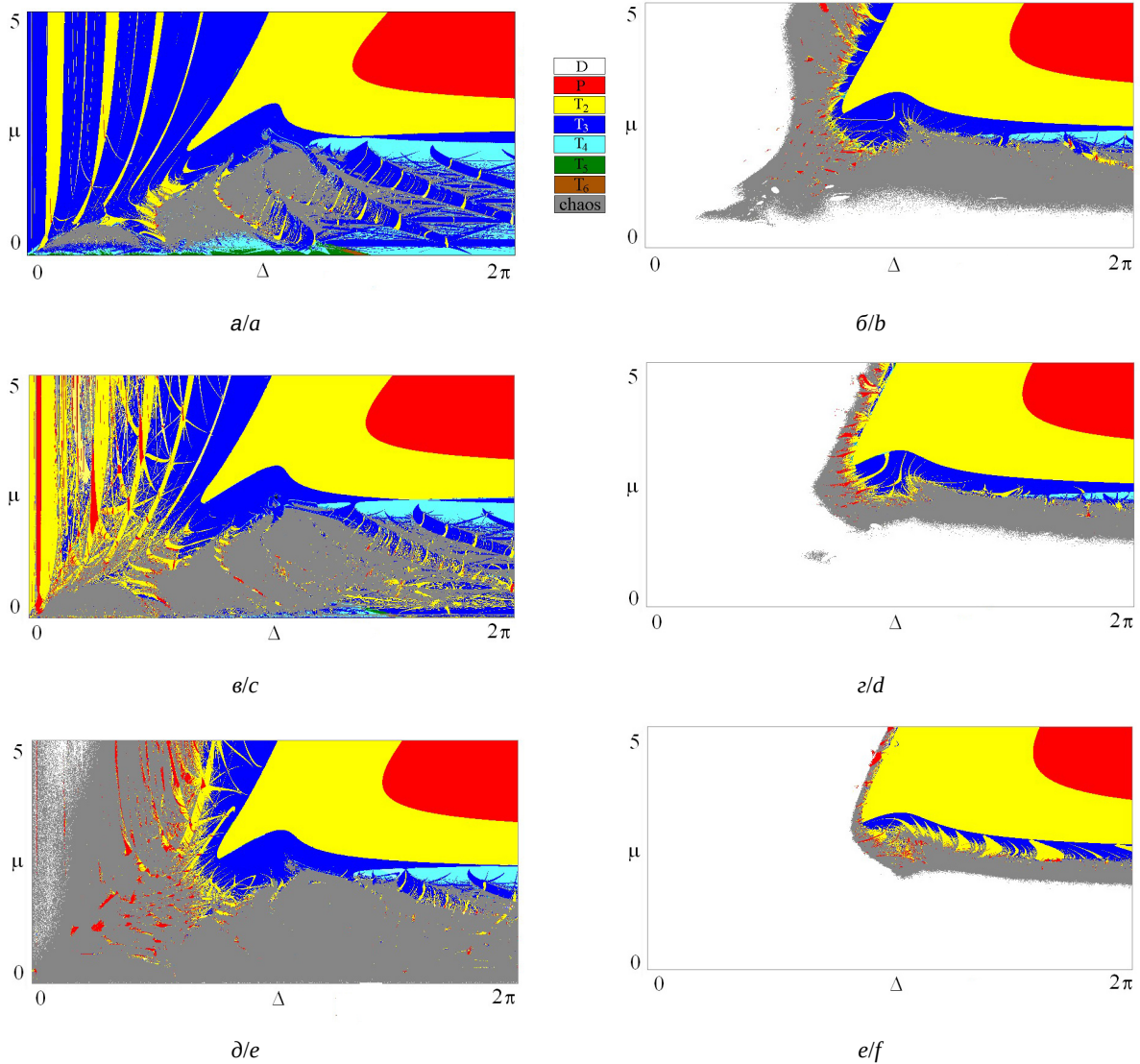


Рис. 7. Эволюция карт ляпуновских показателей связанных тор-отображений в зависимости от параметра дискретизации  $h$ : а –  $h = 0.05$ , б –  $h = 0.06$ , в –  $h = 0.07$ , г –  $h = 0.08$ , д –  $h = 0.09$ , е –  $h = 1.00$ . Значения управляющих параметров одинаковы  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  (цвет online)

Fig. 7. Evolution of charts of Lyapunov exponents of coupled torus maps depending on the discretization parameter  $h$ : а –  $h = 0.05$ , б –  $h = 0.06$ , в –  $h = 0.07$ , г –  $h = 0.08$ , д –  $h = 0.09$ , е –  $h = 1.00$ . Values of the control parameters are the same  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  (color online)



дичности (отвечающей в непрерывной модели синхронной квазипериодичности SC, см. рис. 2) появляются окна двухчастотной (рис. 7, а). Затем эти области расширяются, и внутри них появляются периодические режимы (рис. 7, б). Отметим, что вид карты сильно меняется при увеличении параметра всего на одну сотую. Далее эти области разрушаются с образованием хаоса (рис. 7, в). Хаос начинает доминировать и при малой связи, полностью вытесняя торы разной размерности. Далее, на рис. 7, г, область хаоса граничит с областью разбегания траекторий (белый цвет на рис. 7, г). С ростом  $h$  области существования аттракторов уменьшаются (рис. 7 д, е).

Интересно, что при больших  $h$  внутри области трехчастотных торов при большой связи видна система встроженных языков двухчастотных торов (рис. 7, е).

Таким образом, с ростом параметра дискретизации наблюдается разрушение торов.

#### 4. Влияние шума

Интересно проследить, как меняется картина при добавлении в систему внешнего шума. Случай отдельного отображения (2) обсуждается

авторами данной статьи в [18]. По аналогии с [18] добавим шум в одно из тор-отображений (в первый генератор):

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + h \cdot y_{n+1}, \\
 y_{n+1} &= y_n + h \cdot ((\lambda_1 + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4) y_n - \omega_0^2 x_n - \mu(y_n - v_n)), \\
 z_{n+1} &= z_n + h \cdot (b(\varepsilon - z_n) - k y_n^2) + \varepsilon \xi_n, \\
 u_{n+1} &= u_n + h \cdot v_{n+1}, \\
 v_{n+1} &= v_n + h \cdot ((\lambda_2 + w_n + u_n^2 - \beta u_n^4) v_n - (\omega_0 + \Delta)^2 u_n - \mu(v_n - y_n)), \\
 w_{n+1} &= w_n + h \cdot (b(\varepsilon - w_n) - k v_n^2).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Здесь  $\varepsilon$  – интенсивность шума, а  $\xi_n$  – случайная последовательность значений, равномерно распределенных на интервале  $[-0.5; 0.5]$  с нулевым средним  $\langle \xi_n \rangle = 0$  и постоянным значением дисперсии  $\sigma = \sqrt{\langle \xi_n^2 \rangle} = 1/\sqrt{12}$ .

Ляпуновские карты системы (5) показаны на рис. 8, 9 при двух значениях параметра дискретизации  $h = 0.05$  и  $h = 0.08$ . Сравнивая их с рис. 7, а, г, можно видеть, что при малом значении параметра дискретизации отдельные области на рисунке немного размываются, но все характерные области, включая «зашумленные»

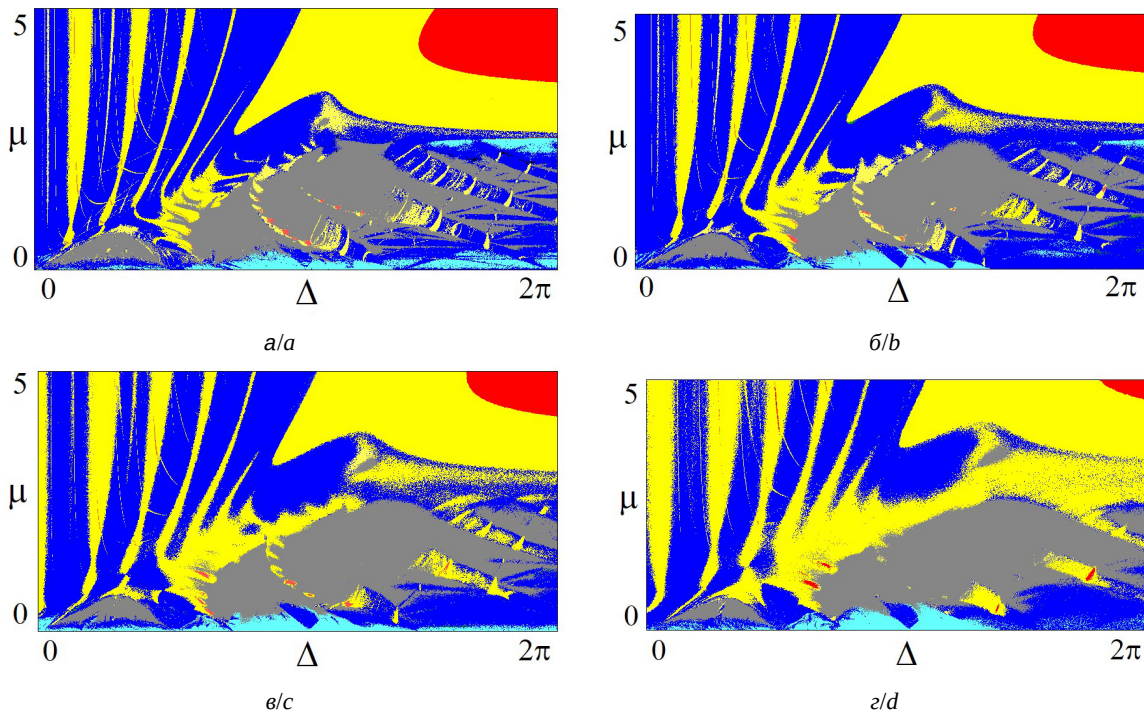


Рис. 8. Карты ляпуновских показателей в связанных тор-отображениях с шумом при увеличении амплитуды шума  $\varepsilon$  при малом значении параметра дискретизации  $h = 0.05$ : а –  $\varepsilon = 0.03$ , б –  $\varepsilon = 0.05$ , в –  $\varepsilon = 0.08$ , г –  $\varepsilon = 0.1$  (цвет online)

Fig. 8. Charts of Lyapunov exponents in coupled torus maps with noise at the increase of the noise amplitude  $\varepsilon$  at a small value of the discretization parameter  $h = 0.05$ . The noise amplitude  $\varepsilon$  is: 0.03 (a), 0.05 (b), 0.08 (c), 0.1 (d) (color online)

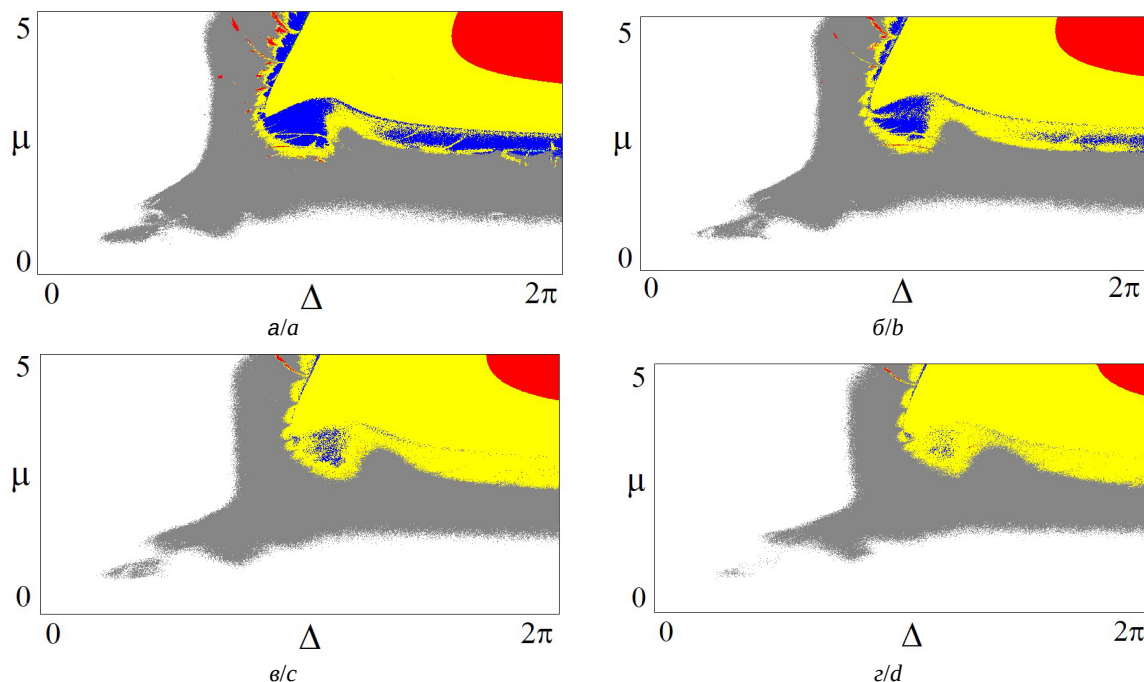


Рис. 9. Карты ляпуновских показателей в связанных тор-отображениях с шумом при увеличении амплитуды шума  $\epsilon$  при большем значении параметра дискретизации  $h = 0.08$ . Величины амплитуд шума см. рис. 8 (цвет online)

Fig. 9. Charts of Lyapunov exponents in coupled torus maps with noise at increasing noise amplitude  $\epsilon$  for a larger value of the discretization parameter  $h = 0.08$ . Values of the noise amplitudes are similar to Fig. 8 (color online)

четырёхчастотные торы, сохраняются. При большем значении параметра дискретизации с ростом уровня шума сначала исчезают области шумовых четырёхчастотных торов, а затем – и трёхчастотных. При  $\epsilon = 0.1$  сохраняются области хаоса и двухчастотных торов.

### Заключение

Методом дискретизации уравнений связанных квазипериодических генераторов получено новое высокомерное отображение. Его двухпараметрический ляпуновский анализ выявляет области инвариантных торов разной размерности, вплоть до пятичастотных. Отображение демонстрирует характерные для квазипериодичности возрастающей размерности фурье-спектры. Наблюдаются квазипериодические бифуркации инвариантных торов и резонансная паутина Арнольда на базе инвариантных торов разной размерности. С ростом параметра дискретизации происходит разрушение высокомерных торов. Шум при малых параметрах дискретизации мало влияет на вид ляпуновских карт. Увеличение параметра дискретизации приводит к разрушению высокомерных торов с ростом интенсивности шума.

### Список литературы

1. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Ижевск : РХД, 2002. 560 с.
2. Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. М. : Физматлит, 2006. 356 с.
3. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М. : ЛИБРОКОМ, 2009. 320 с.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос. М. : Мир, 1988. 253 с.
5. Заславский Г. М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.
6. Анищенко В. С., Николаев С. М. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 19. С. 88–94.
7. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73, № 5. Article number 056202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.056202>
8. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, № 4. Article number 046216. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.046216>





9. Кузнецов А. П., Станкевич Н. В. Автономные системы с квазипериодической динамикой. Примеры и свойства: Обзор // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23, № 3. С. 71–93. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-3-71-93>
10. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
11. Arrowsmith D. K., Cartwright J. H. E., Lansbury A. N., Place C. M. The Bogdanov map: Bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3, № 4. P. 803–842. <https://doi.org/10.1142/S021812749300074X>
12. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Shchegoleva N. A., Stankevich N. V. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // *Physica D : Nonlinear Phenomena*. 2019. Vol. 398. P. 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.05.014>
13. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V. The simplest map with three-frequency quasi-periodicity and quasi-periodic bifurcations // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26, № 8. P. 1630019. <https://doi.org/10.1142/S0218127416300196>
14. Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regul. Chaotic Dyn.* 2011. Vol. 16, № 1–2. P. 154–184. <https://doi.org/10.1134/S1560354711010060>
15. Broer H., Simó C., Vitolo R. Hopf saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: Analysis of a resonance “bubble” // *Physica D : Nonlinear Phenomena*. 2008. Vol. 237, № 13. P. 1773–1799. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.01.026>
16. Vitolo R., Broer H., Simó C. Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // *Nonlinearity*. 2010. Vol. 23, № 8. P. 1919–1947. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/23/8/007>
17. Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol’d resonance web // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*. 2008. Vol.15, № 5. P. 769–787. <https://doi.org/10.36045/bbms/1228486406>
18. Кузнецов А. П., Седова Ю. В. О влиянии шума на квазипериодичность разной размерности, включая квазипериодическую бифуркацию Хопфа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Физика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 29–35. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-29-35>
19. *svojstva dinamičeskogo khaosa v radiofizičeskikh sistemakh* [Complex oscillations in simple systems: Mechanisms of occurrence, structure and properties of dynamical chaos in radiophysical systems]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2009. 320 p. (in Russian).
20. Schuster H. G. *Deterministic Chaos*. VCH-Verlagsgesellschaft m.b.H, Weinheim, 1988. 270 p.
21. Zaslavsky G. M. *The physics of chaos in Hamiltonian systems*. Imperial college Press, 2007. 328 p.
22. Anishchenko V. S., Nikolaev S. M. Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations. *Tech. Phys. Lett.*, 2005, vol. 31, pp. 853–855. <https://doi.org/10.1134/1.2121837>
23. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 73, no. 5, article no. 056202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.056202>
24. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, no. 4, article no. 046216. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.046216>
25. Kuznetsov A. P., Stankevich N. V. Autonomous systems with quasiperiodic dynamics. Examples and their properties: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 23, no. 3, pp. 71–93 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-3-71-93>
26. Morozov A. D. *Rezonansy, tsikly i khaos v kvazikonserвативных системakh* [Resonances, cycles and chaos in quasi-conservative systems]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Sciences, 2005. 424 p. (in Russian).
27. Arrowsmith D. K., Cartwright J. H. E., Lansbury A. N., Place C. M. The Bogdanov map: Bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 803–842. <https://doi.org/10.1142/S021812749300074X>
28. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Shchegoleva N. A., Stankevich N. V. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2019, vol. 398, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.05.014>
29. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V. The simplest map with three-frequency quasi-periodicity and quasi-periodic bifurcations. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 8, pp. 1630019. <https://doi.org/10.1142/S0218127416300196>
30. Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, no. 1–2, pp. 154–184. <https://doi.org/10.1134/S1560354711010060>
31. Broer H., Simó C., Vitolo R. Hopf saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: Analysis of a resonance “bubble”. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 2008, vol. 237, no. 13, pp. 1773–1799. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.01.026>
32. Vitolo R., Broer H., Simó C. Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-

## References

1. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer, New York, NY, 1983. 462 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2>
2. Kuznetsov S. P. *Dinamičeskij khaos* [Dynamical Chaos. 2<sup>nd</sup> ed.]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 356 p. (in Russian).
3. Anishchenko V. S. *Slozhnye kolebanija v prostykh sistemakh: Mehanizmy voznikovenija, struktura i*



- diffeomorphisms. *Nonlinearity*, 2010, vol. 23, no. 8, pp. 1919–1947. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/23/8/007>
17. Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 769–787. <https://doi.org/10.36045/bbms/1228486406>
18. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V. On the effect of noise on quasiperiodicity of different dimensions, including the quasiperiodic Hopf bifurcation. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 29–35. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-29-35>

Поступила в редакцию 30.06.2022; одобрена после рецензирования 16.09.2022; принята к публикации 20.09.2022  
The article was submitted 30.06.2022; approved after reviewing 16.09.2022; accepted for publication 20.09.2022