



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 310–319

*Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 310–319

<https://fizika.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-4-310-319>, EDN: OARRCC

Научная статья  
УДК 537.86

## Управление коллективной динамикой в многослойных сетях бистабильных генераторов с задержкой с переключаемыми связями



Д. Д. Кульминский<sup>1,2</sup>, В. И. Пономаренко<sup>1,3</sup>✉, М. Д. Прохоров<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Россия, 410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

<sup>2</sup>Научно-технологический университет «Сириус», Россия, 354340, пгт. Сириус, Олимпийский пр., д. 1

<sup>3</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кульминский Данил Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, <sup>1</sup>научный сотрудник лаборатории моделирования в нелинейной динамике; <sup>2</sup>научный сотрудник Научного центра информационных технологий и искусственного интеллекта, [kulminskydd@gmail.com](mailto:kulminskydd@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-3936-2813>, Author ID: 721334

Пonomаренко Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, <sup>1</sup>ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в нелинейной динамике; <sup>3</sup>профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, [ponomarenkovi@gmail.com](mailto:ponomarenkovi@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-1579-6465>, Author ID: 39986

Прохоров Михаил Дмитриевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике, [mdprokhorov@yandex.ru](mailto:mdprokhorov@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4069-9410>, Author ID: 39985

**Аннотация.** Исследование сложной коллективной динамики в сетях связанных осцилляторов и управление ею является актуальной задачей для многих научных дисциплин. Объектом исследования в работе являются мультиплексные сети, содержащие три связанных между собой кольца, каждое из которых состоит из связанных идентичных бистабильных осцилляторов с запаздыванием. Рассмотрены случаи однонаправленных и взаимных, изменяющихся во времени связей между кольцами (слоями) сети. Управление коллективной динамикой в трехслойных сетях проведено в радиофизическом эксперименте, где в качестве узловых элементов сети использованы радиотехнические генераторы с запаздывающей обратной связью. Для реализации связей между генераторами сети использован подход, при котором связи в экспериментальной установке задаются программным образом. Управление химерными состояниями в сети реализовано за счет соответствующего выбора начальных условий для бистабильных генераторов и изменения топологии связей между слоями сети. Показано, что при сильной однонаправленной связи между слоями сети химерное состояние копируется из слоя в слой за счет явления вынужденной синхронизации. При двунаправленной связи между слоями сети можно наблюдать как явление клонирования химерного состояния, так и разрушение химерных состояний в зависимости от выбора начальных условий бистабильных генераторов.

**Ключевые слова:** мультиплексные сети, переключаемые связи, бистабильные осцилляторы, генераторы с запаздыванием, химерные состояния

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-22-00150, <https://rscf.ru/project/22-22-00150/>).

**Для цитирования:** Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Управление коллективной динамикой в многослойных сетях бистабильных генераторов с задержкой с переключаемыми связями // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 310–319. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-4-310-319>, EDN: OARRCC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

### Control of collective dynamics in multiplex networks of bistable time-delayed feedback oscillators with switched couplings

D. D. Kulminskiy<sup>1,2</sup>, V. I. Ponomarenko<sup>1,3</sup>✉, M. D. Prokhorov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, 38 Zelyonaya St., Saratov 410019, Russia

<sup>2</sup>Sirius University of Science and Technology, 1 Olympic Ave., Bolshoy Sochi 354340, Russia

<sup>3</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Danil D. Kulminskiy<sup>1,2</sup>, [kulminskydd@gmail.com](mailto:kulminskydd@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-3936-2813>, Author ID: 721334

Vladimir I. Ponomarenko<sup>1,3</sup>, [ponomarenkovi@gmail.com](mailto:ponomarenkovi@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-1579-6465>, Author ID: 39986

Mikhail D. Prokhorov<sup>1</sup>, [mdprokhorov@yandex.ru](mailto:mdprokhorov@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-4069-9410>, Author ID: 39985

© Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., 2022



**Abstract. Background and Objectives:** The study of complex collective dynamics in networks of coupled oscillators and its control is an important task for many scientific disciplines. Networks of nonlinear oscillators are capable of demonstrating a wide variety of spatiotemporal regimes of collective dynamics. One of these regimes is a chimera state that occurs in networks of identical oscillators and is characterized by the simultaneous existence in the network of both oscillators performing synchronous oscillations and oscillators with asynchronous behavior. The object of study in this paper is chimera states in multiplex networks consisting of three coupled rings, each of which consists of coupled identical bistable time-delay oscillators. **Materials and Methods:** The cases of unidirectional and mutual, time-varying couplings between rings (layers) of the network are considered. The control of collective dynamics, including chimera states in three-layer networks, was carried out by us in a radio physical experiment, in which radio engineering generators with time-delayed feedback were used as the node elements of the network. Each generator was a ring system consisting of a delay line, a nonlinear element, and a first-order low-frequency RC-filter. To implement the couplings between the network generators, an approach was used in which the couplings in the experimental setup are set programmatically. The control of chimera states in the network is implemented by an appropriate choice of initial conditions for bistable generators and by changing the topology of couplings between network layers. **Results:** It has been shown that at strong unidirectional coupling between the layers of the network, the chimera state is copied from layer to layer due to the synchronization of driven generators. At bidirectional coupling between the layers of the network, one can observe both the phenomenon of cloning of chimera states and the destruction of chimera states, depending on the choice of initial conditions for bistable generators. **Conclusion:** The obtained results are useful for better understanding the mechanisms of emergence of complex regimes of collective dynamics in multiplex networks with switched couplings.

**Keywords:** multiplex networks, adaptive couplings, bistable oscillators, time-delay generators, chimera states

**Acknowledgments:** This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-22-00150, <https://rscf.ru/en/project/22-22-00150/>).

**For citation:** Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Control of collective dynamics in multiplex networks of bistable time-delayed feedback oscillators with switched couplings. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 310–319 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-4-310-319>, EDN: OARRCC

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC0-BY 4.0)

## Введение

Исследование сложной коллективной динамики в сетях связанных осцилляторов и управление ею является актуальной задачей для многих научных дисциплин [1–4]. Было обнаружено, что сети связанных нелинейных осцилляторов способны демонстрировать большое разнообразие пространственно-временных режимов коллективной динамики. Одним из таких режимов являются химерные состояния, возникающие в сетях идентичных осцилляторов и характеризующиеся одновременным существованием в сети как осцилляторов, совершающих синхронные колебания, так и осцилляторов, колеблющихся несинхронно [5]. Теоретическому и численному исследованию химерных состояний было посвящено очень большое количество публикаций, обзор которых приведен в [6].

В последние годы все больший интерес привлекает изучение не только самого факта существования химерных состояний в различных системах, но и изучение взаимодействия химерных состояний между собой. Например, были обнаружены эффекты синхронизации химерных состояний в модульных сетях [7] и в многослойных сетях [8–15]. Многослойные сети широко используются при моделировании различных систем, особенно при моделировании нейронных сетей головного мозга, которые имеют многослойную структуру [16].

Помимо сетей с неизменной архитектурой и силой связей между элементами большое внимание исследователей привлекают сети с динамическими, изменяющимися во времени связями [17]. Такие адаптивные сети, топология связей в которых может перестраиваться, а интенсивности связей имеют собственную динамику, широко распространены в реальном мире. Для адаптивных сетей характерны такие нелинейные эффекты, как кластерная синхронизация, мультистабильность и переключательная динамика [18–20]. Процессы синхронизации, в том числе химерных состояний, в многослойных адаптивных сетях были исследованы недавно в работах [21–23].

В мультиплексных сетях, состоящих из двух кольцевых ансамблей линейно локально связанных бистабильных осцилляторов с переключаемыми связями между кольцами, был обнаружен и численно исследован эффект клонирования химерных состояний [24, 25]. Этот эффект состоит в том, что в результате взаимодействия слоев сети в кольце с изначально беспорядочным распределением фаз формируется копия химерного состояния, наблюдаемого в другом кольце, с точностью до значений фаз в некогерентной части. Явление клонирования химерных состояний в двухслойной сети генераторов с запаздывающей обратной связью было исследовано нами в радиофизическом эксперименте [26].



В данной работе эффект клонирования химерных состояний впервые исследован, в том числе экспериментально, в трехслойной сети осцилляторов с переключаемыми связями. В качестве узловых элементов трехслойной сети использованы идентичные бистабильные радиотехнические генераторы с запаздывающей обратной связью. Управление коллективной динамикой в исследуемой мультиплексной сети реализуется за счет изменения топологии связей между слоями сети.

### 1. Объект исследования

Рассмотрим мультиплексную сеть, содержащую три связанных между собой кольца, каждое из которых состоит из однонаправленно связанных идентичных бистабильных осцилляторов с запаздыванием. Структура исследуемой сети схематически изображена на рис. 1.

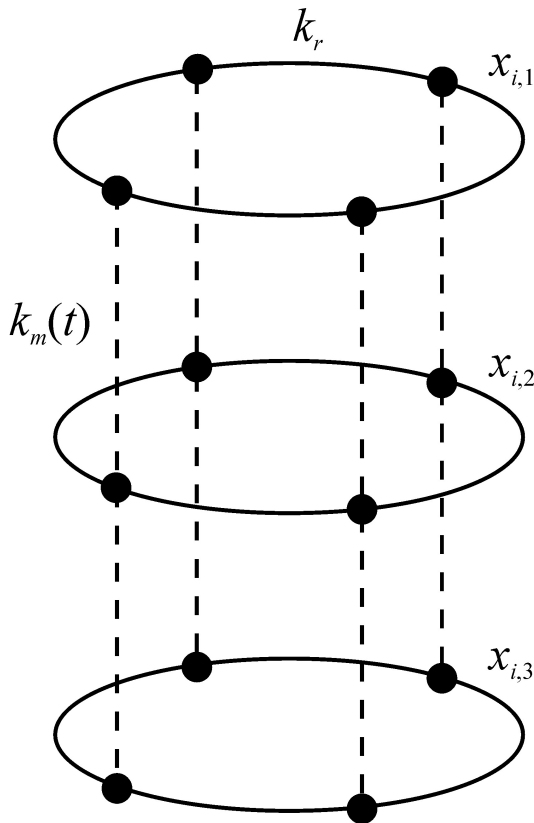


Рис. 1. Архитектура мультиплексной сети  
Fig. 1. Architecture of a multiplex network

В отсутствие связи между слоями сети осцилляторы в каждом из колец описываются следующим модельным уравнением:

$$\varepsilon \dot{x}_{i,j}(t) = -x_{i,j}(t) + f(x_{i,j}(t - \tau)) + k_r(x_{i+1,j}(t) - x_{i,j}(t)), \quad (1)$$

где  $x(t)$  – динамическая переменная,  $i = 1, \dots, N$  – номер осциллятора внутри кольца,  $N$  – количество осцилляторов в кольце,  $j = 1, 2, 3$  – номер слоя (кольца), граничные условия  $x_{N+1,j} = x_{1,j}$ ,  $\varepsilon$  – параметр инерционности,  $\tau$  – время запаздывания,  $f$  – нелинейная функция,  $k_r$  – коэффициент связи между осцилляторами внутри кольца. Нелинейная функция осцилляторов имеет следующий вид:

$$f(x) = a + b(x - d) - c(x - d)^3. \quad (2)$$

При  $a = 1.5$ ,  $b = 2.3$ ,  $c = 1.78$ ,  $d = 1.57$  осцилляторы являются бистабильными. В отсутствие связей внутри кольца ( $k_r = 0$ ) в зависимости от начальных условий осцилляторы могут совершать либо периодические колебания с частотой  $\nu_1 \approx 1/(2\tau)$ , либо хаотические колебания с основной частотой  $\nu_2 \approx 3/(2\tau)$  [27].

Введем теперь связь между кольцами, составляющими трехслойную сеть. Будем рассматривать два типа связей между слоями сети – однонаправленные связи и двунаправленные (взаимные) связи. Для краткости обозначим правую часть уравнения (1) как  $F(x_{i,j}(t), x_{i,j}(t - \tau), x_{i+1,j}(t))$ . Тогда, в случае однонаправленных диффузионных связей от первого кольца ко второму и от второго кольца к третьему, модельные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_{i,1}(t) &= F(x_{i,1}(t), x_{i,1}(t - \tau), x_{i+1,1}(t)), \\ \varepsilon \dot{x}_{i,2}(t) &= F(x_{i,2}(t), x_{i,2}(t - \tau), x_{i+1,2}(t)) + \\ &\quad + k_m(t)(x_{i,1}(t) - x_{i,2}(t)), \\ \varepsilon \dot{x}_{i,3}(t) &= F(x_{i,3}(t), x_{i,3}(t - \tau), x_{i+1,3}(t)) + \\ &\quad + k_m(t)(x_{i,2}(t) - x_{i,3}(t)), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k_m(t)$  – коэффициент связи между осцилляторами из соседних слоев сети. В отличие от постоянного коэффициента связи  $k_r$  между осцилляторами внутри кольца, коэффициент  $k_m(t)$  зависит от времени:

$$k_m(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ k, & t_1 \leq t < t_2 \\ 0, & t \geq t_2, \end{cases} \quad (4)$$

где параметр  $k$  определяет силу связи между слоями сети, а  $t_1$  и  $t_2$  – моменты времени, когда  $k_m(t)$  переключается между 0 и  $k$  и между  $k$  и 0 соответственно, меняя топологию связей в сети.



В случае двунаправленных диффузионных связей между первым и вторым кольцами и между вторым и третьим кольцами динамика осцилляторов описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_{i,1}(t) &= F(x_{i,1}(t), x_{i,1}(t - \tau), x_{i+1,1}(t)) + \\ &\quad + k_m(t)(x_{i,2}(t) - x_{i,1}(t)), \\ \varepsilon \dot{x}_{i,2}(t) &= F(x_{i,2}(t), x_{i,2}(t - \tau), x_{i+1,2}(t)) + \\ &\quad + k_m(t)(x_{i,3}(t) - 2x_{i,2}(t) + x_{i,1}(t)), \\ \varepsilon \dot{x}_{i,3}(t) &= F(x_{i,3}(t), x_{i,3}(t - \tau), x_{i+1,3}(t)) + \\ &\quad + k_m(t)(x_{i,2}(t) - x_{i,3}(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

Мы исследовали трехслойные сети (3) и (5) в радиофизическом эксперименте, выбрав в ка-

честве узловых элементов идентичные бистабильные радиотехнические генераторы с запаздывающей обратной связью. Каждый генератор представлял собой кольцевую систему, состоящую из линии задержки, нелинейного элемента и низкочастотного RC-фильтра первого порядка. Блок-схема такого генератора представлена на рис. 2, а.

Для таких генераторов переменные  $x_{i,j}(t)$  и  $x_{i,j}(t - \tau)$  в модельных уравнениях представляют собой напряжение на входе и выходе линии задержки соответственно, а  $\varepsilon = RC$ . Линии задержки и нелинейные элементы генераторов были реализованы в цифровом виде на базе программируемых микроконтроллеров, а RC-

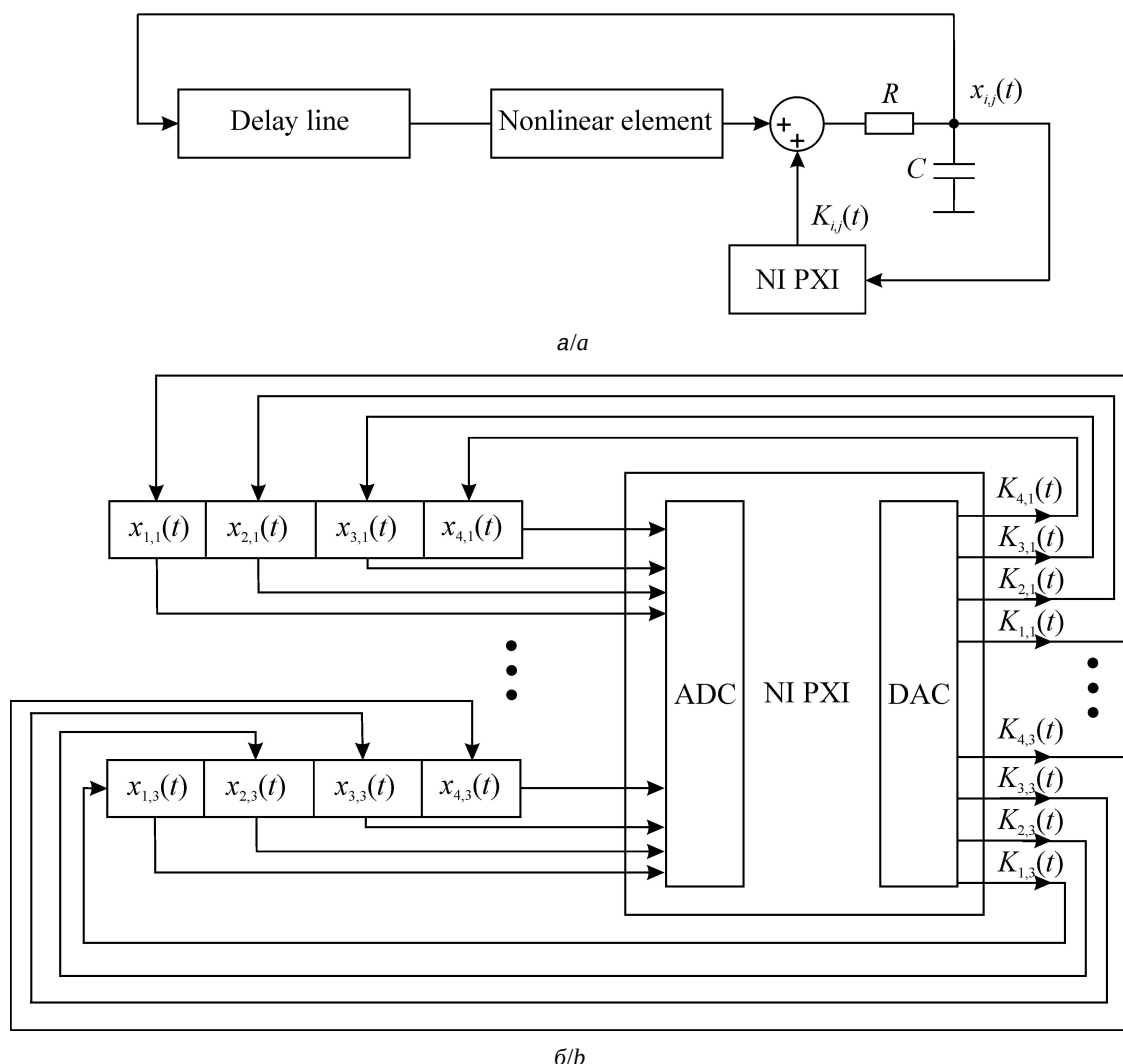


Рис. 2. Блок-схемы базового генератора (а) и всей экспериментальной установки (б). Показаны только генераторы первого и третьего слоя. NI PXI – система ввода-вывода многоканальных данных, ADC – АЦП, DAC – ЦАП

Fig. 2. Block diagrams of the basic generator (a) and the entire experimental setup (b). Only generators of the first and the third layers are shown. NI PXI is a multichannel input-output system, ADC is an analog-to-digital converter and DAC is a digital-to-analog converter



фильтры представляли собой аналоговые элементы. Аналоговые и цифровые элементы схемы сопрягались с помощью аналого-цифровых преобразователей (АЦП) и цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП).

Параметры бистабильных генераторов имели значения  $\tau = 1$  мс и  $\epsilon = 0.08$  мс. Реализация требуемого режима колебаний обеспечивалась выбором начальных условий (2 В либо 0.5 В), которые задавались при программировании микроконтроллеров как постоянная величина на интервале времени, равном времени запаздывания генераторов. В отсутствие связей внутри сети ( $k_r = k = 0$ ) при начальных условиях, равных 2 В, в генераторе устанавливался периодический режим колебаний, а начальные условия, равные 0.5 В, принадлежали бассейну притяжения хаотического аттрактора.

Каждый из трех слоев построенной нами сети состоял из 4 радиотехнических генераторов, представленных на рис. 2, а, а вся сеть состояла из 12 генераторов. Для реализации связей между генераторами сети был использован подход, при котором связи в экспериментальной установке задаются программным образом [28]. Суть подхода состоит в том, что сигналы  $x_{i,j}(t)$  с выхода каждого генератора подаются на входы многоканального АЦП системы ввода-вывода данных National Instruments PCI eXtensions for Instrumentation (PXI) (National Instruments, США) и оцифровываются для дальнейшей обработки (рис. 2, б). Затем с помощью программы на LabView (National Instruments, США) проводится преобразование этих сигналов, и формируются сигналы  $K_{i,j}(t)$ , отвечающие за связь генераторов, которые с помощью многоканального ЦАП подаются на вход каждого генератора (рис. 2, б). Такой подход позволяет задать любую архитектуру и тип связей между генераторами и изменять связи в ходе эксперимента.

Также как и в других работах, посвященных клонированию химерных состояний [24–26], в наших исследованиях выполнялось условие  $k_r \ll k$ , т. е. сила связей между генераторами внутри кольца была намного меньше, чем сила связей между слоями сети:  $k_r = 0.01$  и  $k = 0.5$ . Управлять коллективной динамикой в исследуемых многослойных сетях можно и при более высоких значениях коэффициента  $k_r$ , сопоставимых со значением  $k$ , однако при высоких значениях  $k_r$  не удается реализовать химерные состояния в исследуемых кольцах, состоящих лишь из четырех генераторов.

## 2. Результаты

Рассмотрим сначала случай однонаправленной связи между слоями сети, при котором сеть описывается уравнениями (3). Начальные условия генераторов первого слоя мы выбрали так, что генераторы с номерами  $i = 1, 2$  совершали синхронные периодические колебания с частотой вблизи  $\nu_1$ , а генераторы с номерами  $i = 3, 4$  совершали несинхронные хаотические колебания с основной частотой вблизи  $\nu_2$ , т. е. в первом кольце сети наблюдалось химерное состояние. Временные реализации всех динамических переменных  $x_{i,1}(t)$  приведены на рис. 3, а.

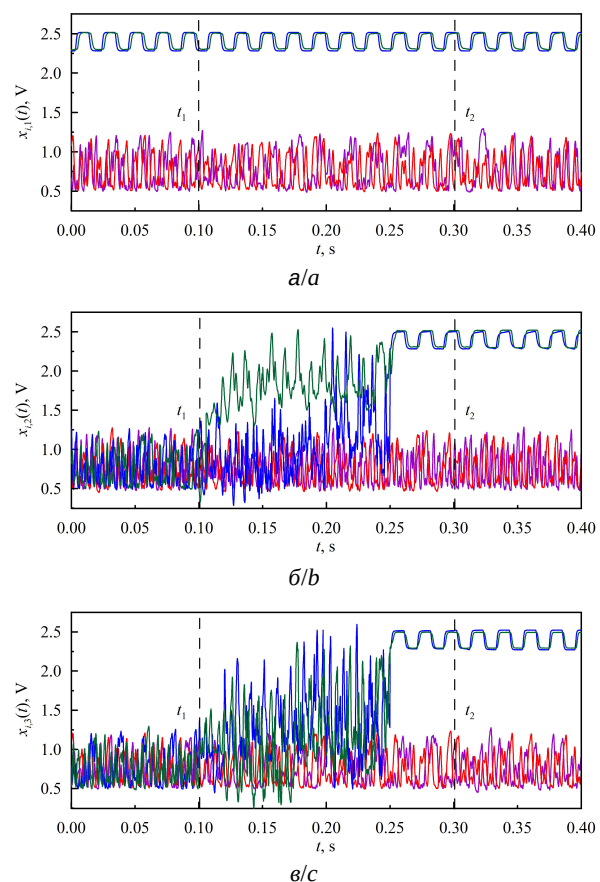


Рис. 3. Экспериментальные временные реализации колебаний напряжения  $x_{i,j}(t)$  генераторов первого слоя (а), второго слоя (б) и третьего слоя (в), демонстрирующие копирование химерного состояния при однонаправленной связи между слоями. Временные реализации  $x_{i,1}(t)$ ,  $x_{i,2}(t)$  и  $x_{i,3}(t)$  показаны одинаковым цветом

Fig. 3. Experimental time series of voltage oscillations  $x_{i,j}(t)$  in the generators of the first layer (a), the second layer (b), and the third layer (c), demonstrating the copying of the chimera state at the unidirectional coupling between the layers. Time series of  $x_{i,1}(t)$ ,  $x_{i,2}(t)$ , and  $x_{i,3}(t)$  are shown in the same color

Отметим, что в радиофизическом эксперименте практически невозможно добиться полной



идентичности аналоговых RC-фильтров в генераторах. Поэтому периодические колебания экспериментальных генераторов немного отличаются. При численном моделировании аналогичной ситуации временные реализации периодических осцилляторов полностью совпадают и неразличимы между собой, поскольку модельные осцилляторы абсолютно идентичны.

Начальные условия генераторов второго и третьего слоев сети были выбраны так, что при  $k = 0$  все эти генераторы совершали несинхронные хаотические колебания с основной частотой вблизи  $\nu_2$ . Временные реализации переменных  $x_{i,2}(t)$  и  $x_{i,3}(t)$  приведены на рис. 3, б и 3, в соответственно.

После включения однонаправленной связи между слоями сети в момент времени  $t_1 = 0.1$  с наблюдается качественное изменение динамики хаотических генераторов второго слоя  $x_{1,2}$  и  $x_{2,2}$ , связанных с периодическими генераторами первого слоя  $x_{1,1}$  и  $x_{2,1}$ , соответственно (см. рис. 3, б). Кроме того, происходит качественное изменение динамики хаотических генераторов третьего слоя  $x_{1,3}$  и  $x_{2,3}$ , связанных с генераторами второго слоя  $x_{1,2}$  и  $x_{2,2}$  соответственно (см. рис. 3, в). Взаимодействие между слоями сети приводит к переключению бистабильных режимов в первом и втором генераторах второго и третьего слоев с высокочастотного хаотического на низкочастотный периодический. То есть в результате вынужденной синхронизации генераторов второго и третьего слоев в этих слоях возникает копия химерного состояния, существующего в первом слое. После отключения связи между слоями сети при  $t_2 = 0.3$  с химерные состояния во втором и третьем слоях сохраняются. Описанный эффект наблюдается при любых начальных условиях в генераторах второго и третьего слоев сети.

По сравнению со случаем двухслойной сети, рассмотренным нами в работе [26], увеличение числа слоев в сети практически не повлияло на процесс копирования химерных состояний. В третьем слое химерное состояние устанавливается за то же время, что и во втором слое. Немного отличается лишь вид переходного процесса во втором и третьем слоях.

Рассмотрим теперь случай двунаправленной связи между слоями сети, при котором сеть описывается уравнениями (5). Начальные условия генераторов первого слоя выберем такими же, как в рассмотренном выше случае однонаправленной связи, при котором в первом кольце

существует химерное состояние (рис. 4, а). Начальные условия генераторов в других слоях выберем так, что при  $k = 0$  все генераторы второго слоя совершают несинхронные хаотические колебания, а все генераторы третьего слоя совершают несинхронные периодические колебания (рис. 4, б и 4, в соответственно).

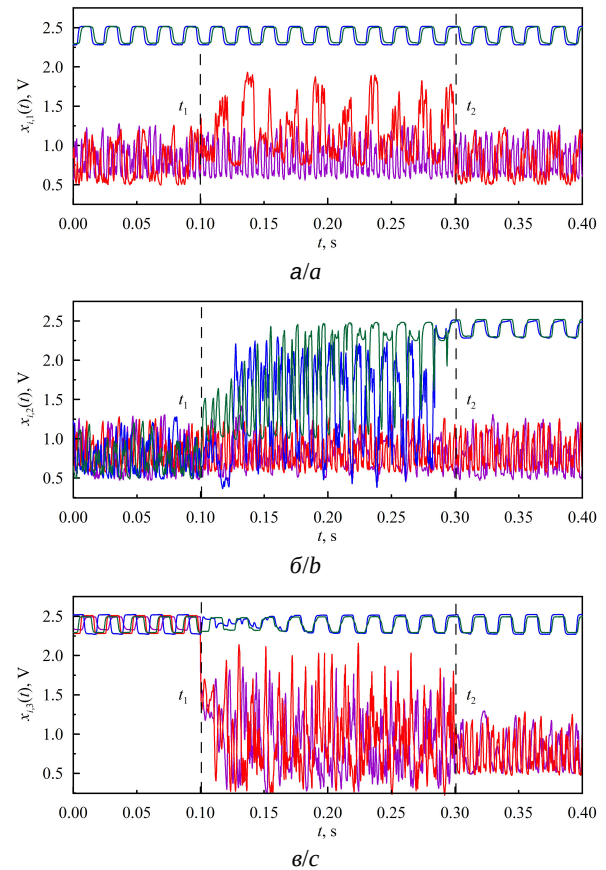


Рис. 4. Экспериментальные временные реализации колебаний напряжения  $x_{i,j}(t)$  генераторов первого слоя (а), второго слоя (б) и третьего слоя (в), демонстрирующие клонирование химерного состояния при двунаправленной связи между слоями. Временные реализации  $x_{i,1}(t)$ ,  $x_{i,2}(t)$  и  $x_{i,3}(t)$  показаны одинаковым цветом

Fig. 4. Experimental time series of voltage oscillations  $x_{i,j}(t)$  in the generators of the first layer (a), the second layer (b), and the third layer (c), demonstrating the cloning of the chimera state at the bidirectional coupling between the layers. Time series of  $x_{i,1}(t)$ ,  $x_{i,2}(t)$  and  $x_{i,3}(t)$  are shown in the same color

При включении двунаправленной связи между слоями сети генераторы разных слоев начинают взаимодействовать. В результате этого взаимодействия бистабильные генераторы второго слоя  $x_{1,2}$  и  $x_{2,2}$  переходят из хаотического режима колебаний в периодический режим, а бистабильные генераторы третьего слоя  $x_{3,3}$  и  $x_{4,3}$  переходят из периодического режима в хаотический. Таким образом, происходит клонирование химерного состояния из первого слоя во второй



и в третий слой. При этом аналогично работам по клонированию химерных состояний в двухслойной сети [24–26] колебания хаотических генераторов из разных слоев не демонстрируют фазовую синхронизацию.

В рассмотренном случае трехслойной сети добиться клонирования химерного состояния оказывается труднее, чем в двухслойной сети [26]. Во-первых, увеличивается длительность переходных процессов и во втором, и в третьем слоях по сравнению со случаем двухслойной сети. Причем, в третьем слое для установления химерного состояния требуется больше времени, чем во втором слое (см. рис. 4). Во-вторых, клонировать химерное состояние из первого слоя во второй и в третий слои можно лишь в том случае, когда до включения межслойной связи колебания генераторов второго слоя отличаются от колебаний генераторов третьего слоя. Если и во втором, и в третьем слоях все генераторы при  $k = 0$  находятся в периодическом режиме или, наоборот, все генераторы находятся в хаотическом режиме, то при включении межслойной связи химерное состояние в этих слоях не возникает.

Таким образом, для управления коллективной динамикой бистабильных генераторов в многослойной сети важны не только характеристики связей, такие как топология, направленность, тип, сила, но и выбор начальных условий для генераторов. Например, можно задать начальные условия элементов сети таким образом, что вместо эффекта клонирования химерного состояния будет наблюдаться разрушение химерного состояния. Такой эффект проиллюстрирован на рис. 5, на котором приведены временные реализации всех динамических переменных  $x_{i,j}(t)$  для случая переключаемых двунаправленных диффузионных связей между слоями сети (5).

Начальные условия на рис. 5 выбраны так, что при  $k = 0$  генераторы  $x_{1,1}$  и  $x_{2,1}$  в первом слое и генераторы  $x_{1,3}$  и  $x_{2,3}$  в третьем слое совершают синхронные низкочастотные периодические колебания, а генераторы  $x_{3,1}$  и  $x_{4,1}$  в первом слое и  $x_{3,3}$  и  $x_{4,3}$  в третьем слое совершают несинхронные высокочастотные хаотические колебания, т. е. в первом и третьем слоях сети наблюдаются химерные состояния. Начальные условия генераторов второго слоя таковы, что все они совершают несинхронные высокочастотные хаотические колебания при  $k = 0$ .

После включения взаимной связи между слоями периодические генераторы первого и третьего слоев переходят в хаотический режим,

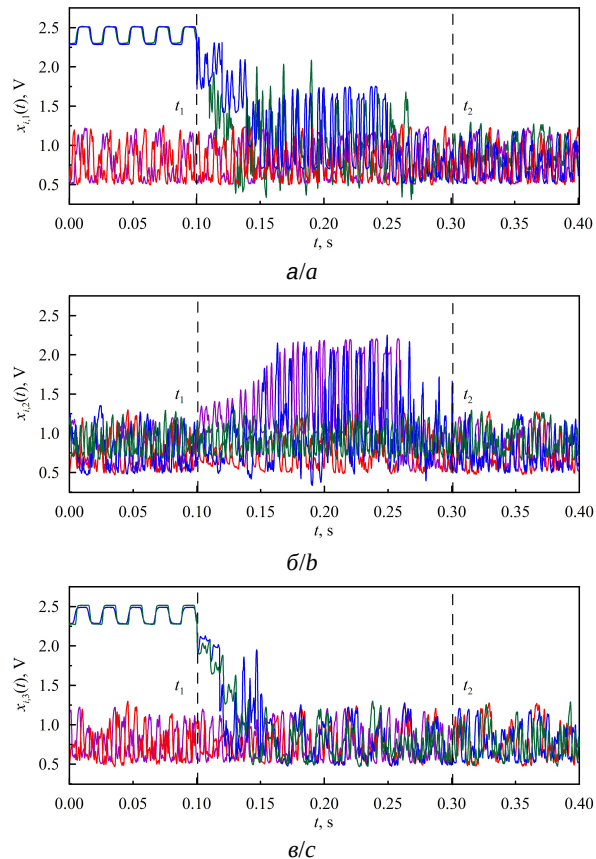


Рис. 5. Экспериментальные временные реализации колебаний напряжения  $x_{i,j}(t)$  генераторов первого слоя (а), второго слоя (б) и третьего слоя (в), демонстрирующие разрушение химерных состояний при двунаправленной связи между слоями. Временные реализации  $x_{i,1}(t)$ ,  $x_{i,2}(t)$  и  $x_{i,3}(t)$  показаны одинаковым цветом

Fig. 5. Experimental time series of voltage oscillations  $x_{i,j}(t)$  in the generators of the first layer (a), the second layer (b), and the third layer (c), demonstrating the destruction of the chimera states at the bidirectional coupling between the layers. Time series of  $x_{i,1}(t)$ ,  $x_{i,2}(t)$ , and  $x_{i,3}(t)$  are shown in the same color

и химерные состояния в первом и третьем слоях сети разрушаются (см. рис. 5), причем хаотические колебания генераторов оказываются не синхронизованы между слоями.

Следует отметить, что представленные в этом разделе результаты, иллюстрирующие управление в радиофизическом эксперименте коллективной динамикой в трехслойных сетях, находятся в хорошем соответствии с результатами проведенных нами численных исследований модельных уравнений (3) и (5).

## Заключение

Экспериментально исследованы различные пространственно-временные режимы коллективной динамики в многослойных сетях бистабильных радиотехнических генераторов с запаздыва-



нием, связанных переключаемыми связями. Показано, что при сильной однонаправленной связи между слоями сети химерное состояние копируется из слоя в слой за счет явления вынужденной синхронизации. Этот эффект наблюдается независимо от начальных условий бистабильных генераторов в тех слоях сети, в которых химерное состояние отсутствовало до включения связей.

При двунаправленной связи между слоями сети можно наблюдать как явление клонирования, так и разрушение химерного состояния в зависимости от выбора начальных условий бистабильных генераторов. Установление того или иного режима коллективной динамики в этом случае определяется конкуренцией колебательных режимов в тех генераторах мультиплексной сети, которые связаны между собой межслойной связью. Таким образом, для управления коллективной динамикой бистабильных генераторов в многослойной сети при наличии взаимных связей важны как характеристики переключаемых связей, так и выбор начальных условий для генераторов.

#### Список литературы

1. Watts D. J. Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness. Princeton : Princeton University Press, 1999. 280 p.
2. Strogatz S. H. Exploring complex networks // Nature. 2001. Vol. 410. P. 268–276. <https://doi.org/10.1038/35065725>
3. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D. Complex networks: Structure and dynamics // Phys. Rep. 2006. Vol. 424. P. 175–308. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>
4. Osipov G. V., Kurths J., Zhou C. Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin : Springer, 2007. 370 p.
5. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. Article number 174102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.174102>
6. Parastesh F., Jafari S., Azarnoush H., Shahriari Z., Wang Z., Boccaletti S., Perc M. Chimeras // Phys. Rep. 2021. Vol. 898. P. 1–114. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.10.003>
7. Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Díaz-Guilera A., Antonopoulos C. G. Chimera-like states in modular neural networks // Sci. Rep. 2016. Vol. 6. Article number 19845. <https://doi.org/10.1038/srep19845>
8. Maksimenko V. A., Makarov V. V., Bera B. K., Ghosh D., Dana S. K., Goremyko M. V., Frolov N. S., Koronovskii A. A., Hramov A. E. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94. Article number 052205. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052205>
9. Andrzejak R. G., Ruzzene G., Malvestio I. Generalized synchronization between chimera states // Chaos. 2017. Vol. 27. Article number 053114. <https://doi.org/10.1063/1.4983841>
10. Majhi S., Perc M., Ghosh D. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons // Chaos. 2017. Vol. 27. Article number 073109. <https://doi.org/10.1063/1.4993836>
11. Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in a network of many unidirectionally coupled layers of discrete maps // Regul. Chaotic Dyn. 2018. Vol. 23. P. 948–960. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070092>
12. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Synchronization scenarios of chimeras in multiplex networks // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2018. Vol. 227. P. 1161–1171. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2018-800039-y>
13. Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in coupled networks of nonlinear chaotic oscillators // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2018. Vol. 14, № 4. P. 419–433.
14. Rybalova E. V., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Anishchenko V. S., Zakharova A. S. Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode // Chaos. 2019. Vol. 29. Article number 033134. <https://doi.org/10.1063/1.5090184>
15. Богатенко Т. Р., Бух А. В., Анищенко В. С., Стрелкова Г. И. Эффекты синхронизации двухслойной сети нелокально связанных хаотических отображений с диссипативной и инерционной связью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Физика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 42–54. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-1-42-54>
16. Shepherd G. M. The Synaptic Organization of the Brain. Oxford : Oxford University Press, 2004. 719 p.
17. Масленников О. В., Некоркин В. И. Адаптивные динамические сети // УФН. 2017. Т. 187, № 7. С. 745–756. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.10.037902>
18. Касаткин Д. В., Емельянова А. А., Некоркин В. И. Нелинейные явления в осцилляторных сетях Курамото с динамическими связями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4. С. 635–675. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675>
19. Пономаренко В. И., Кульминский Д. Д., Прохоров М. Д. Экспериментальное исследование синхронизации неидентичных нейроподобных осцилляторов с адаптивной запаздывающей связью // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44, вып. 17, С. 11–18. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2018.17.46565.17366>
20. Некоркин В. И., Касаткин Д. В., Дмитричев А. С. Переходная динамика в малом ансамбле синхронизации связанных нейронов Морриса – Лекара // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 1. С. 51–59.
21. Kasatkin D. V., Nekorkin V. I. Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings // Chaos. 2018. Vol. 28. Article number 093115. <https://doi.org/10.1063/1.5031681>





22. Eser M. C., Medeiros E. S., Riza M., Zakharova A. Edges of inter-layer synchronization in multilayer networks with time-switching links // *Chaos*. 2021. Vol. 31. Article number 103119. <https://doi.org/10.1063/5.0065310>
23. Anwar M. S., Rakshit S., Ghosh D., Bollt E. M. Stability analysis of intralayer synchronization in time-varying multilayer networks with generic coupling functions // *Phys. Rev. E*. 2022. Vol. 105. Article number 024303. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.024303>
24. Дмитричев А. С., Щапин Д. С., Некоркин В. И. Клонирование химерных состояний в мультиплексной сети двухчастотных осцилляторов с линейными локальными связями // *Письма в ЖЭТФ*. 2018. Т. 108, вып. 8. С. 574–579. <https://doi.org/10.1134/S0370274X18200109>
25. Dmitrichev A., Shchapin D., Nekorkin V. Cloning of chimera states in a large short-term coupled multiplex network of relaxation oscillators // *Front. Appl. Math. Stat.* 2019. Vol. 5. Article number 9. <https://doi.org/10.3389/fams.2019.00009>
26. Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Клонирование химерных состояний в двухслойной сети бистабильных генераторов с запаздывающей обратной связью // *Письма в ЖТФ*. 2021. Т. 47, вып. 2. С. 32–35. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2021.02.50543.18543>
27. Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Prokhorov M. D. Chimeralike states in networks of bistable time-delayed feedback oscillators coupled via the mean field // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 96. Article number 022209. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.022209>
28. Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Сысоев И. В., Прохоров М. Д. Новый подход к экспериментальному исследованию больших ансамблей радиотехнических генераторов со сложными связями // *Письма в ЖТФ*. 2020. Т. 46, вып. 4. С. 26–29. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2020.04.49046.18018>
- neural networks. *Sci. Rep.*, 2016, vol. 6, article no. 19845. <https://doi.org/10.1038/srep19845>
8. Maksimenko V. A., Makarov V. V., Bera B. K., Ghosh D., Dana S. K., Goremyko M. V., Frolov N. S., Koronovskii A. A., Hramov A. E. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, article no. 052205. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052205>
9. Andrzejak R. G., Ruzzene G., Malvestio I. Generalized synchronization between chimera states. *Chaos*, 2017, vol. 27, article no. 053114. <https://doi.org/10.1063/1.4983841>
10. Majhi S., Perc M., Ghosh D. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons. *Chaos*, 2017, vol. 27, article no. 073109. <https://doi.org/10.1063/1.4993836>
11. Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in a network of many unidirectionally coupled layers of discrete maps. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2018, vol. 23, pp. 948–960. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070092>
12. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Synchronization scenarios of chimeras in multiplex networks. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2018, vol. 227, pp. 1161–1171. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2018-800039-y>
13. Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in coupled networks of nonlinear chaotic oscillators. *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, 2018, vol. 14, iss. 4, pp. 419–433 (in Russian).
14. Rybalova E. V., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Anishchenko V. S., Zakharova A. S. Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode. *Chaos*, 2019, vol. 29, article no. 033134. <https://doi.org/10.1063/1.5090184>
15. Bogatenko T. R., Bukh A. V., Anishchenko V. S., Strelkova G. I. Synchronization effects in a two-layer network of nonlocally coupled chaotic maps with dissipative and inertial intercoupling. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 42–54 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-1-42-54>
16. Shepherd G. M. *The Synaptic Organization of the Brain*. Oxford, Oxford University Press, 2004. 719 p.
17. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Adaptive dynamical networks. *Physics-Uspokhi*, 2017, vol. 60, pp. 694–704. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2016.10.037902>
18. Kasatkin D. V., Emelianova A. A., Nekorkin V. I. Nonlinear phenomena in Kuramoto networks with dynamical couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 29, no. 4, pp. 635–675 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-4-635-675>
19. Ponomarenko V. I., Kul'minskii D. D., Prokhorov M. D. An experimental study of synchronization of nonidentical neuronlike oscillators with an adaptive delayed coupling. *Tech. Phys. Lett.*, 2018, vol. 44, pp. 761–764. <https://doi.org/10.1134/S1063785018090109>
20. Nekorkin V. I., Kasatkin D. V., Dmitrichev A. S. Transient dynamics in a small ensemble of synaptically coupled Morris-Lecar neurons. *Radiophys. Quantum Electron.*, 2010, vol. 53, pp. 45–52. <https://doi.org/10.1007/s11141-010-9203-2>

## References

1. Watts D. J. *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton, Princeton University Press, 1999. 280 p.
2. Strogatz S. H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, vol. 410, pp. 268–276. <https://doi.org/10.1038/35065725>
3. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.*, 2006, vol. 424, pp. 175–308. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>
4. Osipov G. V., Kurths J., Zhou C. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Berlin, Springer, 2007. 370 p.
5. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, article no. 174102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.174102>
6. Parastesh F., Jafari S., Azamouh H., Shahriari Z., Wang Z., Boccaletti S., Perc M. Chimeras. *Phys. Rep.*, 2021, vol. 898, pp. 1–114. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.10.003>
7. Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Díaz-Guilera A., Antonopoulos C. G. Chimera-like states in modular



21. Kasatkin D. V., Nekorkin V. I. Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings. *Chaos*, 2018, vol. 28, article no. 093115. <https://doi.org/10.1063/1.5031681>
22. Eser M. C., Medeiros E. S., Riza M., Zakharova A. Edges of inter-layer synchronization in multilayer networks with time-switching links. *Chaos*, 2021, vol. 31, article no. 103119. <https://doi.org/10.1063/5.0065310>
23. Anwar M. S., Rakshit S., Ghosh D., Bollt E. M. Stability analysis of intralayer synchronization in time-varying multilayer networks with generic coupling functions. *Phys. Rev. E*, 2022, vol. 105, article no. 024303. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.024303>
24. Dmitrichev A. S., Shchapin D. S., Nekorkin V. I. Cloning of chimera states in a multiplex network of two-frequency oscillators with linear local couplings. *JETP Lett.*, 2018, vol. 108, pp. 543–547. <https://doi.org/10.1134/S0021364018200079>
25. Dmitrichev A., Shchapin D., Nekorkin V. Cloning of chimera states in a large short-term coupled multiplex network of relaxation oscillators. *Front. Appl. Math. Stat.*, 2019, vol. 5, article no. 9. <https://doi.org/10.3389/fams.2019.00009>
26. Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Cloning of chimera states in a two-layer network of bistable time-delayed feedback oscillators. *Tech. Phys. Lett.*, 2021, vol. 47, pp. 79–82. <https://doi.org/10.1134/S1063785021010235>
27. Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Prokhorov M. D. Chimeralike states in networks of bistable time-delayed feedback oscillators coupled via the mean field. *Phys. Rev. E*, 2017, vol. 96, article no. 022209. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.022209>
28. Kul'minskii D. D., Ponomarenko V. I., Sysoev I. V., Prokhorov M. D. A new approach to the experimental study of large ensembles of radioengineering oscillators with complex couplings. *Tech. Phys. Lett.*, 2020, vol. 46, pp. 175–178. <https://doi.org/10.1134/S1063785020020236>

Поступила в редакцию 16.06.2022; одобрена после рецензирования 10.08.2022; принята к публикации 30.08.2022  
The article was submitted 16.06.2022; approved after reviewing 10.08.2022; accepted for publication 30.08.2022