

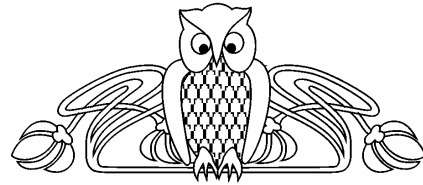


УДК 538.3

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА НЕЛИНЕЙНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

М.В. Давидович, С.В. Алексутова, И.В. Шилин, В.С. Борисов*

Саратовский государственный университет,
кафедра радиотехники и электродинамики
E-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru
* ОАО "ЦНИИИА", г. Саратов



Сформулированы интегродифференциальные уравнения и решена задача о дифракции плоской синусоидальной электромагнитной волны на слое нелинейного диэлектрика. Формулировки для кубической нелинейности даны как для общего нестационарного случая, так и в квазистационарном случае спустя большое время после того как фронт волны прошел через слой. Для последнего случая и для дробно-линейной зависимости проницаемости от квадрата амплитуды поля приведены численные результаты спектральной задачи.

Diffraction Of Flat Electromagnetic Wave On Non-Linear Dielectric Slab

M.V. Davidovich, S.V. Aleksutova, I.V. Shilin, V.S. Borisov

The integrodifferential equations for flat sinusoidal electromagnetic wave diffraction on nonlinear dielectric slab have been formulated both for stationary and nonstationary cases. The formulations for cubic nonlinearity have been presented explicitly for both cases and numerically solved for spectral problem. Also the numerical results for spectral problem with linear-fractional permittivity dependence on square field amplitude are presented.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возрос интерес к решению нелинейных и нестационарных задач электродинамики структур различной природы, начиная от низких радиочастот и кончая оптическим диапазоном. Нелинейные задачи дифракции электромагнитных волн возникают в электродинамике плазмы [1, 2], физике твердого тела и полупроводниковой плазме [3, 4], оптике [5]. Нелинейность, строго говоря, приводит к многочастотности и необходимости решать нестационарные задачи. Нестационарный подход наиболее универсален и не сопровождается существенным усложнением алгоритма при переходе от линейного случая к нелинейному. С вычислительной точки зрения он предпочтителен решению большого числа связанных спектральных уравнений для гармоник и комбинационных частот. Однако в ряде случаев нелинейная задача может быть сформулирована как одночастотная в спектральной области. Примером может служить нелиней-

ное проникновение плоской электромагнитной волны в плазму [3]. В такой задаче греющее поле приводит к зависимости диэлектрической проницаемости от усредненного за период квадрата электрического поля (или от его амплитуды).

Для решения нестационарных и стационарных линейных и нелинейных задач перспективным является метод интегральных уравнений. В настоящей работе сформулированы такие уравнения для простейшего случая дифракции плоской электромагнитной волны на слое и приведены численные результаты их решения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть плоская линейно поляризованная волна падает нормально на плоский бесконечный слой нелинейного диэлектрика, расположенный в области $0 \leq z \leq l$. Относительно диэлектрика предположим сначала, что дисперсия (временная) отсутствует, а диэлектрик однородный и изотропный. Это означает, что рассматривается связь индукции и поля в виде $\vec{D}(t, \vec{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\vec{E}(t, \vec{r}))$, где $\epsilon(\vec{E})$ – некоторая скалярная функция от вектора. В силу этого она не может содержать псевдоскалярные составляющие типа $\vec{E} \cdot \vec{H}$, $\vec{E} \cdot \vec{x}_0$, $\vec{E} \cdot \vec{y}_0$, $\vec{E} \cdot \vec{z}_0$, а также скалярную составляющую $\vec{E} \cdot \vec{r}$ (здесь орт-векторы осей обозначены индексом 0). Зависимость ϵ как от $(\vec{E} \cdot \vec{H})^2$, так и от $(\vec{E} \times \vec{H})^2$ также следует исключить, так как киральные нелинейные среды мы не рассматриваем. Следовательно, проницаемость является функцией $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$. Далее в качестве таковой возьмем простейшую зависимость $\epsilon(E^2) = \epsilon^{(0)} + \epsilon^{(2)} E^2$, ко-



торая в оптике соответствует керровской нелинейности и представляет два первых члена разложения Тейлора в нуле. Подобные среды часто называют кубическими по типу нелинейности в связи индукции и поля. Относительно поляризации предположим, что она линейная с направлением вдоль оси x , т.е. $\vec{E} = \vec{x}_0 E$. Строгое решение нелинейных задач требует нестационарной их постановки, поэтому падающую волну возьмем в виде

$$\vec{E}_{inc}(t, z) = \vec{x}_0 E_{i0} \chi(t - z/c) \sin(\omega_0(t - z/c)),$$

где $\chi(t)$ – функция Хевисайда, равная нулю и единице соответственно при отрицательных и положительных аргументах. Это означает, что в момент $t = 0$ фронт волны подошел к границе пластины. Уравнения Максвелла для данной задачи можно записать в той же форме, что и для вакуума, выделив в правую часть плотность тока поляризации диэлектрика

$$\vec{J}_p(t, \vec{r}) = \partial_t \vec{P}(t, \vec{r}) = \vec{x}_0 \varepsilon_0 \partial_t [(\varepsilon(E) - 1)E(t, z)].$$

Здесь введен вектор поляризации $\vec{P}(t, \vec{r})$ и обозначено $\partial_t = \partial / \partial t$. Используя одномерную скалярную пространственно-временную функцию Грина свободного пространства G , запишем интегродифференциальное уравнение в виде [6]

$$E(t, z) = E_{inc}(t, z) - \mu_0 \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dz' G(t - t', z - z') \partial_{t'} P(t', z'). \quad (1)$$

Здесь учтено, что поля не зависят от x и y . Спектральное представление ФГ G можно получить обычными методами [7], и оно имеет вид [8]

$$g(\omega, z) = -\frac{j c}{2\omega} \exp(-j\omega|z|/c). \quad (2)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье от (2), получим [9]

$$G(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, z) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{c}{2} \chi(t - |z|/c). \quad (3)$$

Поэтому (1) перепишем так:

$$E(t, z) = E_{inc}(t, z) - \frac{\partial_t}{2c\varepsilon_0} \int_0^{t-|z-z'|/c} dt' \int_0^l dz' \partial_{t'} P(t', z'), \quad (4)$$

где учтено, что поляризация имеется только в слое, в котором при $t \leq 0$ она отсутствует. Тогда после интегрирования по частям уравнение (4) приобретает вид

$$E(t, z) = E_{inc}(t, z) - \frac{\partial_t}{2c\varepsilon_0} \int_0^l P(t', z') dz'. \quad (5)$$

Здесь $P(t', z') = \varepsilon_0 (\varepsilon(E(t', z')) - 1)E(t', z')$ и $t' = t - |z - z'|/c$. Учитывая соотношение

$$\begin{aligned} \partial_{t'} [(\varepsilon(E(t', z')) - 1)E(t', z')] &= \\ &= \varepsilon'(E(t', z'))E(t', z')E'_t(t', z') + \\ &+ (\varepsilon(E(t', z')) - 1)E'_t(t', z') \end{aligned}$$

и внося оператор $\partial_{t'}$ под интеграл, будем иметь нелинейное интегродифференциальное уравнение для определения поля. В частном случае вышеприведенной проницаемости это:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{-1} \partial_{t'} P(t', z') &= \\ &= [\varepsilon^{(0)} - 1 + 3\varepsilon^{(2)} E^2(t', z')] E'_t(t', z'). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (5) записано в терминах запаздывающих функций поля в точке истока и является интегродифференциальным. Интегрируя его по времени точки наблюдения, получим интегральное уравнение

$$\partial_t^{-1} E(t, z) = \partial_t^{-1} E_{inc}(t, z) - \frac{1}{2c\varepsilon_0} \int_0^l P(t', z') dz'. \quad (7)$$

В нем обозначена первообразная по времени:

$$\partial_t^{-1} E(t, z) = \int_0^t E(\tau, z) d\tau.$$

Пусть теперь падение плоской волны осуществляется на диэлектрический слой с временной дисперсией. Это означает интегральную связь x -компонент векторов индукции и поля:



$$D(t, z) = \varepsilon_0 E(t, z) + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \kappa(t - \tau, E(\tau, z)) E(\tau, z) d\tau. \quad (8)$$

Соотношение (8) записано в общей форме, удовлетворяющей принципу причинности. Для рассмотренной задачи в качестве нижнего предела интегрирования можно взять нуль. В простейшем случае нелинейная диэлектрическая восприимчивость имеет вид

$$\kappa(t - \tau, E(\tau, z)) = \chi(t - \tau) [\kappa^{(0)}(t - \tau) + \kappa^{(2)}(t - \tau) E^2(\tau, z)].$$

Соотношение (8) можно переписать и с помощью интеграла с ядром в виде диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(t - \tau, E(\tau, z)) = \delta(t - \tau) + \kappa(t - \tau, E(\tau, z)) = \delta(t - \tau) + \kappa^{(0)} \chi(t - \tau) + \kappa^{(2)}(t - \tau) E^2(\tau, z).$$

Приведенные соотношения показывают, что в нелинейной задаче в принципе строго нельзя использовать спектральный подход (как при наличии дисперсии, так и при пренебрежении ей). Плотность тока поляризации в случае соотношения (8) имеет вид

$$J_{px}(t, z) = \partial_t [D(t, z) - \varepsilon_0 E(t, z)] = \varepsilon_0 [\kappa(0, E(t, z)) E(t, z) + \int_0^t \kappa'_t(t - \tau, E(\tau, z)) E(\tau, z) d\tau. \quad (9)$$

Следовательно, имеем уравнение (4) с подынтегральной функцией $\partial_t P(t, z) = J_{px}(t, z)$ из (9). Указанное уравнение – интегральное. Его можно записать и в форме (5):

$$E(t, z) = E_{inc}(t, z) - \frac{\partial_t}{2c} \int_0^t \int_0^{t'} \kappa_t(t' - \tau, E(\tau, z)) E(\tau, z) d\tau dz'. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь поля, изменяющиеся по гармоническому (точнее – квазигармоническому) закону. Такие поля образуются, например, спустя очень большое время после падения рассмотренной синусоидальной волны. В этом случае спектры падающего и возбужденного поля очень узкие (почти дельтообразные), и спектральный подход применим

приближенно. Введем комплексные поля, которые суть преобразование Фурье действительных полей, например,

$$E(\omega, t, z) = E^*(-\omega, t, z) = \int_0^t E(\tau, z) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (11)$$

Заметим, что мы рассматриваем поля в области $z > 0$, где все они при $t < 0$ равны нулю (функции финитны), а спектры типа (11) – мгновенные, т.е. зависят от текущего времени. При больших временах t модуль спектра (11) имеет максимумы $E_n(z)$ на частотах $n\omega_0$ и практически равен нулю вне этих частот. Спектрам (11) (т.е. комплексным полям) сопоставим их приближенные действительные значения:

$$E_\omega(t, z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(z) \exp(jn\omega_0 t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \delta_{n0}) E_n(z) \exp(jn\omega_0 t). \quad (12)$$

Поскольку $J_p(t, z) = \varepsilon_0 \partial_t [(\varepsilon(E(t, z)) - 1) E(t, z)]$, имеем бесконечную зацепляющуюся систему интегральных уравнений для гармоник поля E_n , вид которой определяется функцией $\varepsilon(E)$. Рассмотрим спектральную форму уравнения (1):

$$E(\omega, t, z) = E_{inc}(\omega, t, z) - j\omega c^{-2} \int_0^t g(\omega, z - z') J_p(\omega, t, z') dz'. \quad (13)$$

Спектральная функция (11) входит нелинейным образом в J_p . Спектр тока поляризации в (13) для рассмотренного вида проницаемости имеет вид

$$J_p(\omega, t, z) = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon^{(0)} E(\omega, t, z) + \frac{3j\varepsilon^{(2)}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega' - \omega'') E(\omega - \omega' - \omega'', t, z) \times E(\omega', t, z) E(\omega'', t, z) d\omega' d\omega'', \quad (14)$$

при этом согласно (12) приближенно можно считать, что



$$E(\omega, t, z) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + \delta_{n0}) \delta(\omega - n\omega_0) E_n(z). \quad (15)$$

Уравнение (13) с зависимостью (14) точное, но решать его необходимо на всех частотах, что нереально. Подставляя формально (15) в (13) и (14) и приравнявая члены при дельта-функциях с одинаковыми аргументами, можно получить указанную бесконечную систему уравнений. Используем другой способ [10]. Пусть в поле присутствует конечное число N гармоник, а остальными можно пренебречь. В токе поляризации тогда имеется $3N$ гармоник, но учесть необходимо только N , так как амплитуды отбрасываемых гармоник согласно нашему предположению малы. Каждой гармонике n соответствует гармоника $-n$ с комплексно сопряженной амплитудой. Система уравнений получается приравнованием членов при одинаковых экспонентах $\exp(j\omega_0 nt)$ и приведена в [10]. Предположим, что в спектре присутствуют только первая и третья гармоники, а амплитуды остальных малы, включая и нулевую гармонику, которая соответствует статическому полю. Тогда комплексный ток поляризации можно представить в виде

$$J_p(\omega_0, t, z) = \frac{j\omega_0 \epsilon_0}{2} \left\{ [\epsilon^{(0)} - 1 + \epsilon^{(2)} |E_1(z)|^2] \times \right. \\ \times E_1(z) \exp(j\omega_0 t) + \\ \left. + 3[\epsilon^{(2)} E_1^3(z) + (\epsilon^{(0)} - 1) E_3(z)] \exp(3j\omega_0 t) \right\}, \quad (16)$$

что приводит к двум связанным спектральным интегральным уравнениям (ИУ): нелинейному для определения E_1

$$E_1(z) = E_{i0} \exp(-j\omega_0 z/c) + \\ + \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 \int_0^l g(\omega_0, z - z') \times \\ \times (\epsilon^{(0)} - 1 + \epsilon^{(2)} |E_1(z')|^2) E_1(z') dz', \quad (17)$$

и линейному уравнению для нахождения E_3 через E_1 :

$$E_3(z) = \left(\frac{3\omega_0}{c} \right)^2 \int_0^l g(3\omega_0, z - z') \times \\ \times [\epsilon^{(2)} |E_1(z')|^2 E_1(z') + (\epsilon^{(0)} - 1) E_3(z')] dz'. \quad (18)$$

В линейном случае (при $\epsilon^{(2)} = 0$) из (18) следует $E_3 \equiv 0$, а уравнение (17) имеет известное решение [10]:

$$E_1(z) = E_{i0} A^+ \exp(-j\gamma z) + E_{i0} A^- \exp(j\gamma z), \quad (19)$$

в котором $\gamma = k_0 \sqrt{\epsilon^{(0)}} = \omega \sqrt{\epsilon^{(0)}} / c$,

$$A^+ = 2(\sqrt{\epsilon^{(0)}} - 1) / \{(\epsilon^{(0)} - 1)[1 - R_0^2 \exp(-2j\gamma l)]\},$$

$$A^- = A^+ R_0 \exp(-2j\gamma l),$$

а величина

$$R_0 = (k_0 - \gamma) / (k_0 + \gamma) = (1 - \sqrt{\epsilon^{(0)}}) / (1 + \sqrt{\epsilon^{(0)}})$$

представляет собой коэффициент отражения от границы раздела вакуум–диэлектрик. Это решение соответствует известной классической задаче о падении плоской волны на однородный слой диэлектрика и получается также из сшивания полей [11]. По указанному решению определяется коэффициент отражения от слоя

$$R = k_0^2 (\epsilon^{(0)} - 1) E_{i0}^{-1} \int_0^l g(\omega, -z') E_1(z') dz' = \\ = \frac{-j \tan(\gamma) (\epsilon^{(0)} - 1)}{2\sqrt{\epsilon^{(0)}} + j(\epsilon^{(0)} + 1) \tan(\gamma)}, \quad (20)$$

и коэффициент прохождения

$$T = \exp(-jk_0 l) + \\ + k_0^2 (\epsilon^{(0)} - 1) E_{i0}^{-1} \int_0^l g(\omega, l - z') E_1(z') dz' = \\ = \frac{2}{2 \cos(\gamma) + j(\sqrt{\epsilon^{(0)}} + 1/\sqrt{\epsilon^{(0)}}) \sin(\gamma)}. \quad (21)$$

В общем случае решение системы уравнений (17), (18) может быть получено последовательными приближениями, или с использованием других итерационных методов: прямой итерации, минимальных невязок, Ньютона–Рафсона, парабол, сопряженных градиентов и т.п. Возможно использование и прямых методов, например, метода Галеркина или коллокаций. При этом получается нелинейная система алгебраических уравнений, решать которую также целесообразно итерационными методами. Заметим, что часто нелинейность вводят как функцию



амплитуды $E(z)$ поля, считая, что она зависит от его усредненных значений за период основной гармоники. Тогда кубическая нелинейность приводит к появлению в спектре нечетных гармоник.

В случае уравнений (4) или (10) в них удобно из интеграла по времени выделить внеинтегральные члены, перенеся дифференцирование на ядро. Уравнение (5) для рассмотренной проницаемости приобретает вид

$$E(t, z) = E_{inc}(t, z) - \frac{1}{2c_0} \int_0^l \{ \epsilon^{(0)} - 1 + \epsilon^{(2)} E^2(t', z') \} E_t'(t', z') dz' \quad (22)$$

Для квазигармонических процессов в линейных членах следует положить $E(t, z) = \text{Re}(\exp(j\omega_0 t) E_1(z))$. При этом $E_t'(t', z') = \text{Re}(j\omega_0 \exp(j\omega_0 t - \omega_0 |z - z'|/c) E_1(z'))$.

Для квадратичного члена имеем $E^2(t', z') = |E_1(z')|^2$. Тогда из (22) следует ИУ (17).

Для решения полученных пространственно-временных уравнений произведем дискретизацию по времени $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Для каждого такого момента времени (22) представляет собой интегродифференциальное уравнение, которое можно решить. Тогда в последующие моменты времени в (22) неизвестны функции только в окрестности $z' = z$. Удобно произвести дискретизацию по z в виде $z_m = m\Delta z = ml/M$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, причем $\Delta z = c\Delta t$, вводя отсчеты $E_{km} = E(t_k, z_m)$, $E_{km}^0 = E_{inc}(t_k, z_m)$. Тогда производную в ИУ (22) можно заменить конечной разностью, а интеграл представить конечной суммой:

$$E_{km} = E_{km}^0 - \frac{1}{2} \sum_{m'=0}^M \{ \epsilon^{(0)} - 1 + \epsilon^{(2)} E_{k'm'}^2 \} (E_{k'm'} - E_{(k'-1)m'}), \quad (23)$$

в которой $k' = k - |m - m'|$. Выделим в этой сумме член $m' = m$ и запишем (23) в форме

$$(\epsilon^{(0)} + 1) E_{km} + \epsilon^{(2)} E_{km}^3 = 2 E_{km}^0 - \sum_{m'=0}^{\min(k, M)} \{ \epsilon^{(0)} - 1 + \epsilon^{(2)} E_{k'm'}^2 \} \times \left((1 - \delta_{mm'}) E_{k'm'} - E_{(k'-1)m'} \right), \quad (24)$$

В правой части (24) все отсчеты известны. Поэтому (24) есть кубическое уравнение для определения E_{km} по формулам Кардана для $k = 0, 1, \dots$, $m = 0, 1, \dots, k$. В силу того что $E_{km}^0 = 0$ при $k < m$, в (24) отличны от нуля члены с $m' < k$. Для моментов $k > M$ фронт волны пройдет через слой, и необходимо использовать все отсчеты. При $\epsilon^{(2)} > 0$ у уравнения (24) имеется один действительный корень, который и следует использовать. Можно формально рассматривать и случай $\epsilon^{(2)} < 0$. Тогда при наличии трех действительных корней следует брать ближайший к значению $E_{(k-1)m}$ корень.

Полученные уравнения введением функций $\epsilon^{(0)}(z)$ и $\epsilon^{(2)}(z)$ обобщаются на случай неоднородной пластины. Подобные кусочно-постоянные функции позволяют сформулировать задачу для многослойной пластины. Учет уравнений для магнитного поля с введением магнитного тока поляризации дает соответствующую формулировку для пластины из магнитодиэлектрика (в линейном случае это сделано, например, в [8]). Для диэлектрической пластины магнитное поле $\vec{H} = \vec{y}_0 H$ определяется соотношением

$$H(t, z) = H_{inc}(t, z) + \frac{c}{2} \nabla \times \int_0^l P(t', z') dz'$$

Обобщение уравнений на случай наличия потерь, связанных с проводимостью, т.е. с движением свободных носителей заряда, осуществляется заменой $\partial_t P(t', z') \rightarrow \partial_t P(t', z') + \sigma E(t', z')$ в уравнении (4). Введенная проводимость также может зависеть от поля. Так, известная феноменологическая модель для многодолинных полупроводниковых материалов в первом приближении дает $\sigma = \sigma^{(0)} - \sigma^{(2)} \vec{E}^2$. Заметим, что в случае временной дисперсии имеется дисси-



пация, обусловленная движением связанных зарядов в процессе поляризации. В стационарном случае уравнения (17)–(18) справедливы и для T -волны в плоскопараллельном волноводе с диэлектрическим слоем, а также для H_n -волн при замене $k_0 \rightarrow \sqrt{k_0^2 - (n\pi/a)^2}$, где a – расстояние между плоскостями. Это же относится и к H_{n0} -волнам прямоугольного волновода с пластиной, полностью заполняющей поперечное сечение.

Наклонное падение волны в нестационарном случае приводит к неизохронности процессов в плоскости $z = 0$, т.е. к зависимости от поперечной координаты, и к необходимости рассматривать задачу на всей временной оси, а также к появлению z -компоненты поля. Это существенно усложняет задачу. Дифракция на конечном диэлектрическом теле является более сложной задачей, поскольку она четырехмерная и векторная [12]. Для прямоугольного волновода в этом случае уравнения сформулированы в [13–15]. В нестационарном рассмотрении учет нелинейности, или введение тензорной диэлектрической проницаемости не приводят к существенному усложнению алгоритма решения по сравнению с линейным скалярным случаем.

На рис.1 приведены результаты вычисления поля в области $0 \leq z \leq l$ для уравнения (17) методом последовательных приближений (МПП) при $kl = 2$ и $\epsilon^{(0)} = 2$ для разных нелинейностей. Для $e_{i0} = 1$ МПП сходится в случае $-1.193002809... < \epsilon^{(2)} < 0$ и $0 < \epsilon^{(2)} < 0.087626...$. В приведенных результатах сходимость достигалась за несколько десятков итераций. На рис.2 представлены коэффициенты отражения и прохождения по мощности, а также баланс мощности $|R|^2 + |T|^2 \approx 1$. Указанные результаты сравнивались с решением уравнения (17) методами Рунге–Кутты 4-го порядка и Штермера 5-го порядка. Достигнуто совпадение результатов в четырех–пяти значащих цифрах после запятой. На рис.3 представлены вычисления для аналогичного слоя с зависимостью проницаемости от поля в виде $\epsilon(E^2) = (\epsilon^{(0)} + \epsilon^{(\infty)} E^2)/(1 + \chi E^2)$. Здесь $\epsilon^{(0)}$ –

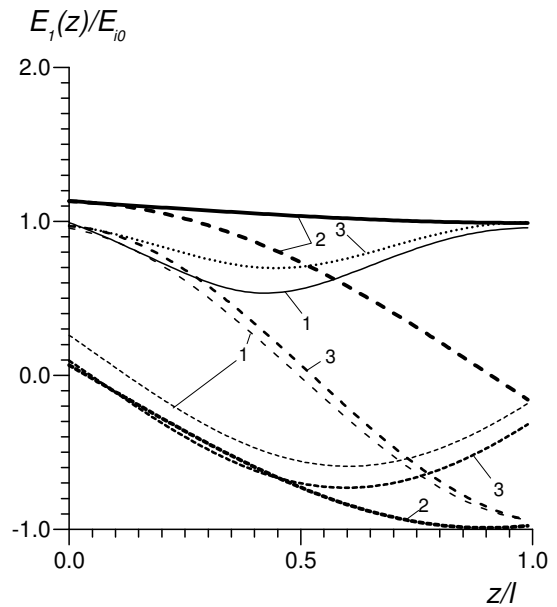


Рис.1. Распределение модуля электрического поля (сплошные кривые), его реальной (штрих) и мнимой (мелкий штрих) частей вдоль пластины при различных нелинейностях для $k_0 l = 2$, $\epsilon^{(0)} = 2$: 1 – линейный случай ($\epsilon^{(2)} = 0$); 2 – $\epsilon^{(2)} = -0.5$, $e_{i0} = 1.5$; 3 – $\epsilon^{(2)} = 0.05$, $e_{i0} = 1$

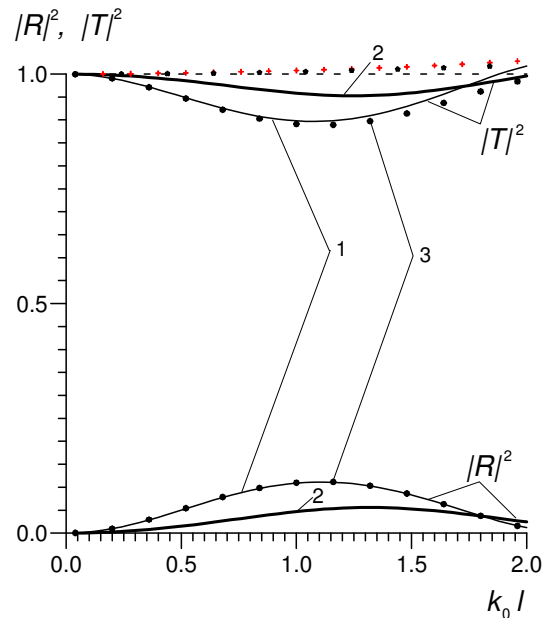


Рис.2. Коэффициент отражения, коэффициент прохождения по мощности и баланс мощности для решения уравнения (17) при различных нелинейностях для $\epsilon^{(0)} = 2$: 1 – линейный случай ($\epsilon^{(2)} = 0$); 2 – $\epsilon^{(2)} = -0.5$, $e_{i0} = 1$; 3 – $\epsilon^{(2)} = 0.01$, $e_{i0} = 1$. Штриховая линия, звездочки и крестики – полная мощность $|R|^2 + |T|^2$ соответственно для случаев 1, 2, 3



проницаемость в слабом поле, $\epsilon^{(\infty)}$ – проницаемость в бесконечно сильном поле, χ – параметр, характеризующий скорость перехода от слабых до сильных полей. Рис. 3 показывают возможность управления передачей мощности при и изменении интенсивности падающей волны. В приведенных результатах амплитуда падающей волны изме-

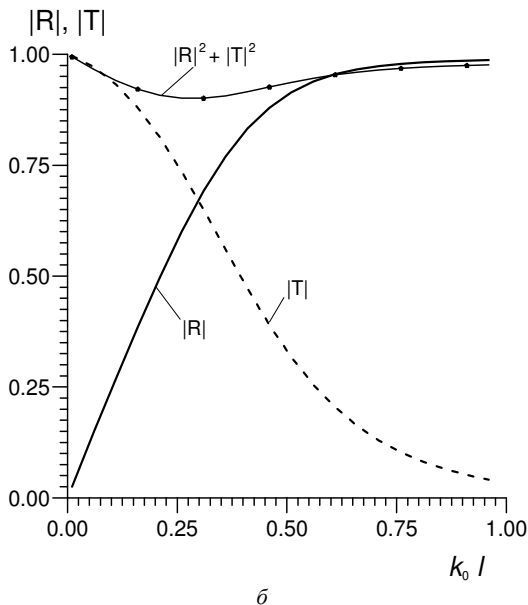
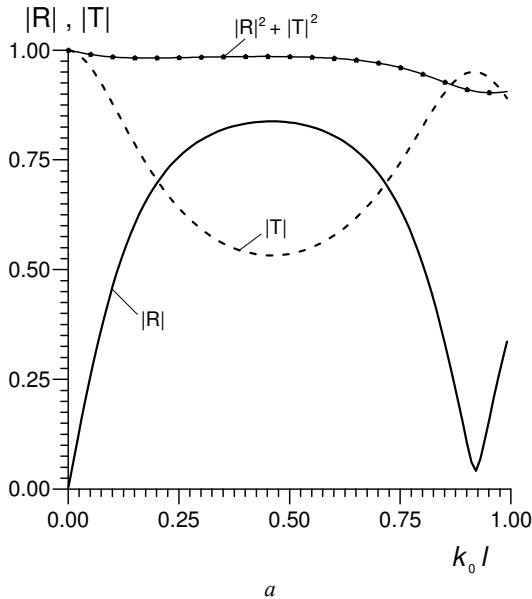


Рис.3. Частотные зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения и баланса мощности при различных уровнях падающей мощности для слоя с параметрами $\epsilon^{(0)} = 12 - 0.2j$, $\epsilon^{(\infty)} = -20 - 1j$ и $\chi = 1$: *a* – слабый сигнал, *b* – сильный сигнал

нялась от 0.1 (случай *a*) до 2–10 (случай *b*). Параметры соответствуют слою полупроводниковой плазмы в InSb.

Более строгий случай соответствует совместному решению уравнений (17)–(18) и учету в балансе мощности коэффициентов преобразования в высшие гармоники. Эти уравнения также решались на основе схемы Галеркина с использованием кусочно-постоянных конечных элементов: отрезок l дискретизировался на M одинаковых частей с центрами в точках $z_m = ml/M - \Delta z = (2m - 1)l/(2M)$, при этом для ИУ (17) получается нелинейная система алгебраических уравнений

$$E_m = E_{0m} + \sum_{m'=1}^M A_{mm'}(k_0) [(\epsilon^{(0)} - 1)E_{m'} + \epsilon^{(2)}E_{m'}^3] \quad (25)$$

с матрицей

$$A_{mm'}(k_0) = \begin{cases} -j(k_0 \Delta z)^{-1} \sin^2(k_0 \Delta z) \times \\ \times \exp(-jk_0 l |m - m'|/M), & m \neq m'; \\ -1 + (k_0 \Delta z)^{-1} \sin(k_0 \Delta z) \times \\ \times \exp(-jk_0 \Delta z), & m = m', \end{cases}$$

и столбцом свободных членов

$$E_{0m}(k_0) = E_{i0}(k_0 \Delta z)^{-1} \sin(k_0 \Delta z) \exp(-jk_0 z_m).$$

Для уравнения (18) использовалась матрица $A_{mm'}(3k_0)$. Полученные системы решались МПП и методом минимальных невязок (ММН).

Известно, что в линейном случае МПП сходится при любом начальном приближении, если $\delta = (\epsilon^{(0)} - 1) \|A\| < 1$ (принцип сжимающих отображений), причем скорость сходимости определяется геометрической прогрессией (погрешность пропорциональна δ^i , i – номер итерации). В общем случае указанное условие не выполняется. Поэтому рассмотрим метод последовательных плавных возмущений (МППВ) [10], который заключается в следующем. Пусть сначала имеем N связанных задач для линейного случая ($\epsilon^{(2)} = 0$):



$$E_{1n}(z) = (\epsilon_n^{(0)} - \epsilon_{n-1}^{(0)}) \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 \times \int_0^l g(\omega_0, z - z') \sum_{k=0}^N (E_{1k}(z')) dz', \quad (26)$$

$n = 1, 2, \dots, N$,

причем $E_1(z) = E_{10}(z) + E_{11}(z) + \dots + E_{1N}(z)$, $E_{10}(z) = E_{i0} \exp(-j\omega_0 z/c)$, а числа $\epsilon_n^{(0)}$ расположены на отрезке $[1, \epsilon^{(0)}]$. Удобно взять $\epsilon_n^{(0)} = 1 + n\kappa/N$. Систему связанных уравнений (26) можно решить итерационным методом, причем всегда применим МПП при соответствующем подборе N . Более простой способ состоит в следующем. Формулируем уравнение (17) для линейной проницаемости $\epsilon_2^{(0)} = 1 + 2\kappa/N$ в виде двух связанных ИУ (26) для полей $E_{11}(z)$ и $E_{12}(z)$ (при $N = 2$). В результате ее решения получаем поле $E_{12}(z)$ для проницаемости $\epsilon_2^{(0)} = 1 + 2\kappa/N$. Далее формулируем и решаем аналогичные уравнения для полей $E_{12}(z)$ и $E_{13}(z)$, и т.д. до получения требуемой величины $\epsilon^{(0)} = 0$. Описанные процедуры применялись для нахождения точного решения (19) и подтвердили хорошую сходимость, однако их реальное применение целесообразно в двумерных и трехмерных задачах, не имеющих аналитического решения. В случае нелинейного уравнения (17) МППВ сводится к следующему. Параметр нелинейности представляется в виде $\epsilon_n^{(0)} = n\epsilon^{(2)}/N$ и решаются N задач $n = 1, 2, \dots, N$ с начальным приближением для каждой в виде решения предыдущей задачи. В качестве начального приближения первой задачи берем (19). В качестве метода решения каждой из задач использован МПП, хотя может быть применен любой итерационный процесс. Уравнение (18) аналогично (17) в линейном случае, и после нахождения его решения алгоритмируется совершенно так же. Более сложный подход может состоять в решении N задач с параметрами $\epsilon_n^{(0)}$, для которых $\epsilon^{(2)} = \epsilon_1^{(2)} + \epsilon_2^{(2)} + \dots + \epsilon_N^{(2)}$, причем $\epsilon_1^{(2)} = 0$. Уравнение (17) можно записать в операторной форме

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + (\epsilon^{(0)} - 1) \hat{L} \vec{E}_1 + \epsilon^{(2)} \hat{L} \vec{E}_1^3, \quad (27)$$

где \hat{L} – линейный интегральный оператор, $\vec{E}_1^3 = \|\vec{E}_1\|^2 \vec{E}_1$. Полагаем $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_{11} + \dots + \vec{E}_{1N}$, где \vec{E}_{11} – решение линейной задачи

$$\vec{E}_{11} = \vec{E}_0 + (\epsilon^{(0)} - 1) \hat{L} \vec{E}_{11}. \quad (28)$$

Тогда оставшиеся задачи формулируются в виде $N - 1$ связанных уравнений

$$\vec{E}_{1n} = (\epsilon^{(0)} - 1) \hat{L} \vec{E}_{1n} + \epsilon_n^{(2)} \hat{L} (\vec{E}_{11} + \vec{E}_{12} + \dots + \vec{E}_{1N})^3, \quad (29)$$

$n = 2, 3, \dots, N$.

Нулевыми приближениями для них являются $\vec{E}_{1n}^{(0)} = 0$, $n = 2, 3, \dots, N$, а первыми – соответственно $\vec{E}_{1n}^{(1)} = \epsilon_n^{(2)} \hat{L} (\vec{E}_{11})^3$. Пусть оператор \hat{L} является ограниченным: $\|\hat{L} \vec{E}\| < L_0 \|\vec{E}\|$ и для простоты все параметры одинаковые: $\epsilon_n^{(2)} = \epsilon_2^{(2)}$.

$$\vec{E}_{1n}^{(1)} = \epsilon_2^{(2)} (\epsilon^{(0)} - 1) \hat{L}^2 \vec{E}_{11} + \epsilon_2^{(2)} \hat{L} \left(\vec{E}_{11} + \|\vec{E}_{11}\|^2 (N-1) \epsilon_2^{(2)} \hat{L} \vec{E}_{11} \right)^3, \quad (30)$$

$n = 1, 2, \dots, N$.

ВЫВОДЫ

Итак, сформулированы нелинейные интегральные уравнения во временной и спектральной областях и предложены численные алгоритмы их решения. Для улучшения сходимости предложен метод последовательных плавных возмущений. Приведены численные результаты решения спектральной задачи. Результаты работы могут быть использованы для нестационарного и стационарного моделирования нелинейных структур, включая фотонные кристаллы с полупроводниковыми нелинейными слоями. Уравнения легко обобщаются на двумерный и трехмерный случаи и применимы к анализу как диссипативных, так и активных структур, например, фотонно-кристаллических полупроводниковых лазеров.



Библиографический список

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Физматгиз, 1960. 550 с.
2. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 720 с.
3. Басс Ф.Г., Гуревич Ю.Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М.: Наука, 1975. 400 с.
4. Пожела Ю.К. Плазма и токовые неустойчивости в полупроводниках. М.: Наука, 1977. 368 с.
5. Trofimov V.A., Tereshin E.B. Stop of light in nonlinear photonic crystal // Proc. of SPIE. 2004. V.5773. P.12-19.
6. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т.1. 548 с.
7. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь. 1983. 296 с.
8. Давидович М.В. Фотонные кристаллы: функции Грина, интегродифференциальные уравнения, результаты моделирования // Известия вузов. Радиофизика. Т.49, вып.2. С.150-163.

9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 832 с.
10. Давидович М.В. Математическое моделирование конфигурационно сложных структур электродинамики: многомерные интегральные уравнения и операторы: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Саратов, 2000. 480 с.
11. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971. 654 с.
12. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998. 160 с.
13. Давидович М.В. Объемные интегральные уравнения для диэлектрических включений в коаксиальной линии // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ, 1998. Вып.1. С.20-28.
14. Давидович М.В. Метод конечных элементов в пространственно-временной области для нестационарной электродинамики // ЖТФ. 2006. Т.76, вып.1. С.13-23.
15. Давидович М.В. К нестационарной теории возбуждения волноводов // РЭ. 2001. Т.46, №11. С.1285-1292.

УДК 538.245

ПРАВИЛО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ПОЛЕВОЙ И СИЛОВОЙ МАГНИТОСТАТИКЕ

С.А. Герасимов

Южный федеральный университет,
кафедра общей физики
E-mail: gsim1953@mail.ru

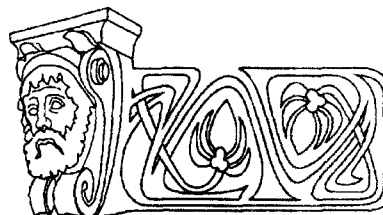
Изучается связь силы Ампера с силой Био-Савара. Показано, что обе формулировки магнитного взаимодействия токов равноправны, если учитывается воздействие незамкнутого участка тока самого на себя.

The Equivalence Rule in Field and Force Magneto-Statics

S.A. Gerasimov

Relationship between Ampere and Biot-Savart force laws is studied. It is shown that both formulations of magnetic interactions of currents are identical if the action of an unclosed part of the current loop on itself is taken into account.

Одна из нерешенных задач классической электродинамики – проблема эквивалентности сил Био-Савара и Ампера [1]. Различия между этими описаниями пондеромоторного взаимодействия токов принципиальны. Основное различие между ними заключается в том, что сила Ампера,



$$d\mathbf{A}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3}{R_{12}^5} (\mathbf{R}_{12} \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)) (\mathbf{R}_{12} \mathbf{j}(\mathbf{r}_2)) - \frac{2(\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \mathbf{j}(\mathbf{r}_2))}{R_{12}^3} \right\} \mathbf{R}_{12} dV_1 dV_2, \quad (1)$$

с которой взаимодействуют два элемента тока $ds_1 = \mathbf{j}(\mathbf{r}_1)dV_1$ и $ds_2 = \mathbf{j}(\mathbf{r}_2)dV_2$, удовлетворяет принципу равенства и коллинеарности действия и противодействия, тогда как сила Био-Савара,

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi R_{12}^3} [\mathbf{j}(\mathbf{r}_2) \times [\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \times \mathbf{R}_{12}]] dV_1 dV_2, \quad (2)$$

с которой элемент тока ds_1 действует на ds_2 , этому принципу не удовлетворяет: $d\mathbf{F}_{12} \neq d\mathbf{F}_{21}$. Незамкнутых элементов тока в природе, разумеется, нет, поэтому соответствие между этими силами должно быть изучено в интегральной форме. Известно, что силы Ампера и