



# РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 233–241

*Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 233–241

<https://fizika.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-3-233-241>

Научная статья  
УДК 517.9

## Влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора

О. И. Москаленко<sup>1,2</sup> ✉, В. А. Ханадеев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Региональный научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего», Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Москаленко Ольга Игоревна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики открытых систем, o.i.moskalenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5727-5169>

Ханадеев Владислав Андреевич, аспирант кафедры физики открытых систем, v.a.hanadeev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9669-3934>

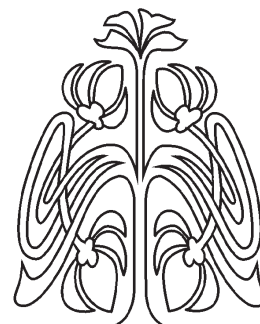
**Аннотация. Постановка задачи и цели:** Целью настоящей работы является изучение влияния шума на обобщенную синхронизацию в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора. В качестве объектов исследования рассмотрены две модели хаотических систем с двулистной структурой аттрактора в присутствии шума: системы Лоренца и системы Чена. **Методы решения:** Для диагностики синхронного режима использовались метод расчета спектра показателей Ляпунова для связанных систем и метод вспомогательной системы. **Результаты:** Показано, что зависимости порога наступления режима обобщенной синхронизации от интенсивности шума практически не изменяются как для систем Лоренца, так и для систем Чена. **Заключение:** На примере осцилляторов Лоренца и систем Чена установлено, что режим обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора оказывается устойчивым по отношению к внешним шумам. Такое поведение систем обусловлено слабым влиянием шума на структуру аттракторов взаимодействующих систем, что подтверждается построением их фазовых портретов при различных значениях интенсивности шума.

**Ключевые слова:** обобщенная синхронизация, метод вспомогательной системы, расчет спектра показателей Ляпунова, шум, сложная топология аттрактора

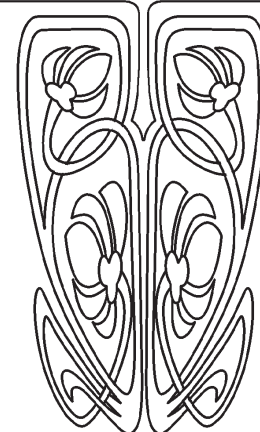
**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук (проект № МД-21.2020.2).

**Для цитирования:** Москаленко О. И., Ханадеев В. А. Влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 233–241. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-3-233-241>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





Article

## Influence of noise on generalized synchronization in systems with a complex topology of attractor

O. I. Moskalenko<sup>1,2</sup> ✉, V. A. Khanadeev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

<sup>2</sup>Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Olga I. Moskalenko, o.i.moskalenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5727-5169>

Vladislav A. Khanadeev, v.a.khanadeev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9669-3934>

**Abstract. Background and Objectives:** The goal of the paper is to study the influence of noise on generalized synchronization in unidirectionally coupled systems with a complex topology of attractor. As the systems under study, two models of chaotic systems with two-sheeted topologies of attractors such as Lorenz and Chen systems are considered. **Materials and Methods:** For the synchronous regime detection the method of calculating the spectrum of Lyapunov exponents for coupled systems and the auxiliary system approach are used. **Results:** It has been shown that the dependences of the threshold for the onset of the generalized synchronization regime on the noise intensity do not practically change both for Lorenz and Chen systems. **Conclusion:** Using the examples of Lorenz oscillators and Chen systems we have found that the generalized synchronization regime in systems with a complex topology of attractor is stable to external noise. This behavior of systems is determined by the weak influence of noise on the structure of attractors of interacting systems, which is confirmed by constructing their phase portraits for different values of the noise intensity.

**Keywords:** generalized synchronization, auxiliary system approach, calculation of the spectrum of Lyapunov exponents, noise, complex topology of attractor

**Acknowledgements:** This work was funded by the Grant Council of the President of the Russian Federation for the state support of young Russian scientists – doctors of sciences (project No. MD-21.2020.2).

**For citation:** Moskalenko O. I., Khanadeev V. A. Influence of noise on generalized synchronization in systems with a complex topology of attractor. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 233–241 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-3-233-241>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Исследование синхронизации связанных хаотических динамических систем является одним из актуальных направлений нелинейной динамики, привлекающим большое внимание современных ученых [1–4]. Интерес к данному явлению связан как с большим фундаментальным значением его исследования, так и с широким практическим применением, например для передачи информации [5–7], диагностики динамики некоторых биологических систем [8], контроля хаоса в СВЧ системах [9] и др.

На данный момент известны такие типы синхронизации, как фазовая синхронизация [10], полная синхронизация [11,12], синхронизация с запаздыванием [13], обобщённая синхронизация [14] и др. Одним из наиболее интересных и наименее изученных из них является режим обобщенной синхронизации.

Важным вопросом при изучении поведения связанных хаотических систем является влияние шума на установление синхронных режимов. Наличие шума при функционировании реальных систем неизбежно, при этом сам шум может оказывать как конструктивное, так и деструктивное влияние на поведение систем [15, 16]. В частности, известно, что в системах с достаточно

простой топологией аттрактора режим обобщенной синхронизации оказывается, как правило, устойчивым по отношению к шумам [17], что делает возможным его применение при скрытой передаче информации по каналам связи с высоким уровнем шума [18].

На данный момент влияние шума на обобщенную синхронизацию изучено достаточно хорошо только в системах с относительно простой топологией аттрактора, как, например, у систем Ресслера [17]. Однако наряду с «простыми» системами достаточно широко распространены системы с так называемой сложной (двулистной) структурой аттрактора. Фазовое пространство таких систем состоит из двух различных подпространств  $W_{1,2}$ , имеющих малую общую область  $W_0$ , внутри которой фазовые траектории могут переходить из подпространства  $W_1$  в подпространство  $W_2$  и наоборот [19]. К системам с двулистной структурой аттрактора относятся, например, такие классические модели как осцилляторы Лоренца, широко известные в метеорологии, или радиотехнические генераторы Чуа. При определенном выборе значений управляющих параметров фазовые траектории таких систем как будто переходят с одного листа хаотического аттрактора на другой, фактически



описывая двойную петлю на фазовой плоскости. Понятно, что специфика таких систем может привести к изменению механизмов возникновения синхронных режимов, в частности, обобщенной синхронизации, по сравнению со случаем систем с достаточно простой топологией аттрактора, а отличия в этих механизмах, в свою очередь, могут привести к отличиям в поведении систем в присутствии шума. Влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора до настоящего времени не изучено. Хотя использование именно таких систем может повысить конфиденциальность передачи информации при использовании режима обобщенной синхронизации в системах скрытой коммуникации. Исследованию влияния шума на установление обобщенной синхронизации в таких системах посвящена настоящая работа.

### 1. Обобщенная синхронизация

Режим обобщенной синхронизации традиционно рассматривается при моделировании системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов и означает, что после завершения переходного процесса устанавливается функциональная зависимость  $y = F[x]$  между состояниями ведущей системы «х» и ведомой систем «у» [14, 20]. Вид этой зависимости может быть сложным и зачастую не может быть найден. Стоит учитывать, что в качестве взаимодействующих осцилляторов могут выступать две разные динамические системы, в том числе и с различной размерностью фазового пространства.

Существуют несколько методов диагностики режима обобщенной синхронизации. Один из наиболее удобных и точных методов диагностики этого режима – это метод вспомогательной системы [21]. Согласно этому методу наряду с ведомой системой  $y$  рассматривается идентичная ей вспомогательная система  $y_a$ . Начальные условия для вспомогательной системы  $y_a(0)$  выбираются отличными от начального состояния ведомой системы  $y(0)$ , однако лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора.

При отсутствии режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами векторы состояний ведомой  $y$  и вспомогательной  $y_a$  систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но в общем случае являются различными. В режиме обобщенной синхронизации в силу выполнения соотношений  $y = F[x]$  и, соответственно,  $y_a = F[x]$  после завершения

переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными  $y = y_a$ , что является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осцилляторами.

Другим методом является расчет условных показателей Ляпунова [20]. Данный метод удобно использовать в совокупности с методом вспомогательной системы. Для начала предположим, что размерности фазовых пространств взаимодействующих ведущей и ведомой систем равны  $N_x$  и  $N_y$  соответственно. Тогда поведение однонаправленно связанных хаотических систем может быть охарактеризовано при помощи  $N_x + N_y$  показателей Ляпунова. В случае если поведение ведущей системы не зависит от силы связи с ведомой системой (в силу однонаправленного характера связи), спектр показателей Ляпунова для исследуемой системы может быть разделен на две части: показатели Ляпунова ведущей системы  $\lambda_1^x \geq \dots \geq \lambda_{N_x}^x$  и условные показатели Ляпунова  $\lambda_1^y \geq \dots \geq \lambda_{N_y}^y$ . Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах является отрицательность старшего условного показателя Ляпунова.

### 2. Исследуемые системы

В качестве объектов исследования выбраны однонаправленно связанные системы Лоренца и однонаправленно связанные системы Чена. Динамика однонаправленно связанных систем Лоренца описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2) + D\zeta, \\ \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -b z_2 + x_2 y_2. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$  – векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомой систем соответственно,  $\sigma = 10$ ,  $b = 2$ ,  $r_1 = 40$  и  $r_2 = 35$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – параметр связи,  $D$  – интенсивность шума,  $\zeta$  – белый гауссов шум,  $\langle \zeta_i(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \zeta_i(t) \zeta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t')$ ,  $\forall i, j$ .

Уравнения однонаправленно связанных систем Чена [22] являются модификацией уравнений систем Лоренца и записываются в следующем виде:



$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a(y_1 - x_1) + ey_1z_1, \\
 \dot{y}_1 &= cx_1 - dx_1z_1 + y_1 + u_1, \\
 \dot{z}_1 &= x_1y_1 - bz_1, \\
 \dot{u}_1 &= -k_1y_1, \\
 \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) + ey_2z_2, \\
 \dot{y}_2 &= cx_2 - dx_2z_2 + y_2 + u_2, \\
 \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2, \\
 \dot{u}_2 &= -k_2y_2 + \varepsilon(x_1 - x_2) + D\zeta,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $a = 35, b = 4.9, c = 25, d = 5, e = 35, k_1 = 190, k_2 = 110$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – параметр связи, слагаемое  $D\zeta$  соответствует источнику шума с теми же характеристиками, что и для системы (1). Управляющие параметры  $k_1$  и  $k_2$  подобраны таким образом, что первая система находится в хаотическом режиме, а вторая система – в режиме гиперхаоса.

Решение систем (1) и (2) осуществлялось численно при помощи метода Рунге – Кутты 4-го порядка, адаптированного для стохастических дифференциальных уравнений [23] с шагом  $h = 0.001$ . Для определения наступления режима обобщенной синхронизации в системах (1) и (2) использовались метод вспомогательной системы и расчет спектра показателей Ляпунова,

описанные в разделе 1. При этом ведомые и вспомогательные системы из (1) и (2) подвергались одному и тому же шумовому воздействию.

### 3. Результаты исследования

На рис. 1 приведено сравнение границ обобщенной синхронизации, полученных с помощью метода расчета показателей Ляпунова и методом вспомогательной системы, для двух однонаправленно связанных систем Лоренца (1). Видно, что при относительно малых значениях интенсивности шума, сопоставимых с амплитудой собственных колебаний системы Лоренца и даже немного превышающих ее, порог обобщенной синхронизации практически не меняется, а также что оба метода демонстрируют схожий результат. При этом граница обобщенной синхронизации, диагностируемая при помощи расчета спектра показателей Ляпунова, в ряде случаев лежит несколько ниже аналогичной границы, полученной с использованием метода вспомогательной системы, что обусловлено наличием перемежающегося поведения вблизи границы возникновения синхронного режима [24].

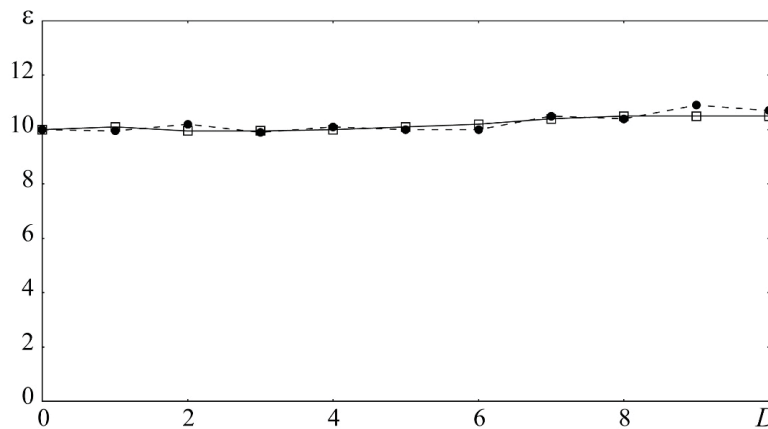


Рис. 1. Сравнение зависимостей порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Лоренца от интенсивности шума, полученных методом расчета показателей Ляпунова (сплошная линия) и методом вспомогательной системы (пунктир)

Fig. 1. Comparison of the dependencies of the threshold for the generalized synchronization regime onset in two unidirectionally coupled Lorenz systems on the noise intensity, obtained by the method for calculation of Lyapunov exponents (solid line) and by the method of the auxiliary system (dotted line)

Также были построены зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Лоренца от интенсивности шума при различных значениях управляющих параметров, полученные при помощи метода вспомо-

гательной системы. Из рис. 2 видно, что порог обобщенной синхронизации практически не меняется. Иными словами, режим обобщенной синхронизации в связанных системах Лоренца (1) оказывается устойчивым по отношению к шумам.



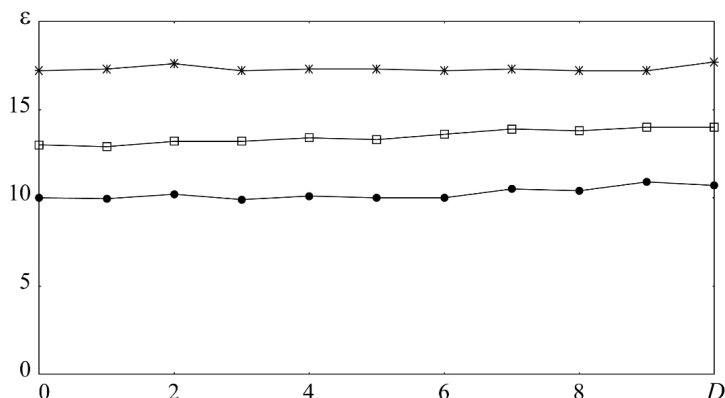


Рис. 2. Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Лоренца, полученные при помощи метода вспомогательной системы, от интенсивности шума при управляющих параметрах: ● –  $r_1=40, r_2=35$ ; □ –  $r_1=40, r_2=45$ ; \* –  $r_1=40, r_2=50$

Fig. 2. Dependencies of the threshold of the generalized synchronization regime onset in two unidirectionally coupled Lorenz systems on the noise intensity obtained by means of the auxiliary system approach for the control parameter values: ● –  $r_1=40, r_2=35$ ; □ –  $r_1=40, r_2=45$ ; \* –  $r_1=40, r_2=50$

Для пояснения такого поведения границы обобщенной синхронизации на рис. 3 приведены зависимости старшего условного показателя Ля-

пунова  $\lambda_1^r$  от параметра связи  $\epsilon$  для различных значений интенсивности шумового воздействия  $D$ , а также показаны фазовые портреты ведомой

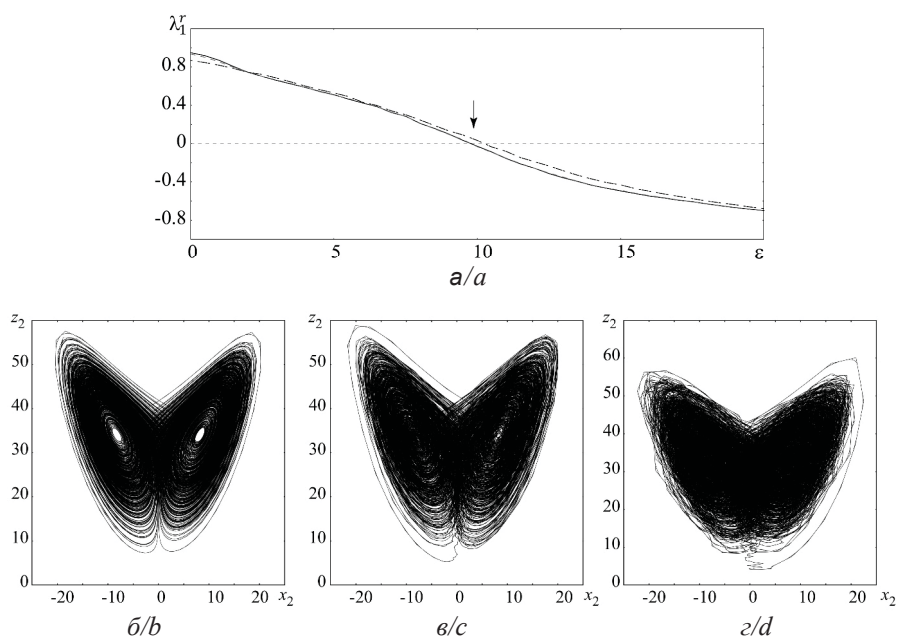


Рис. 3. Зависимости старшего условного показателя Ляпунова  $\lambda_1^r$  от параметра связи  $\epsilon$  при различных значениях интенсивности шумового воздействия (а) и фазовые портреты ведомой системы Лоренца (1) при тех же значениях интенсивности шума (б–д):  $D=0$  – сплошная линия (б),  $D=2$  – штриховая линия (в),  $D=8$  – штрихпунктирная линия (г). Значение параметра связи, соответствующее порогу возникновения обобщенной синхронизации в отсутствие шума, показано стрелкой

Fig. 3. Dependencies of the maximal conditional Lyapunov exponent  $\lambda_1^r$  on the coupling parameter  $\epsilon$  for different values of the noise intensity (a) and phase portraits of the response Lorenz system (1) for the same values of the noise intensity (b–d):  $D=0$  – solid line (b),  $D=2$  – dashed line (c),  $D=8$  – dash-dotted line (d). The coupling parameter value corresponding to the generalized synchronization regime onset without noise is shown by the arrow



системы Лоренца при тех же значениях  $D$ . Видно, что независимо от интенсивности шума при увеличении параметра связи старший условный показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений, что и соответствует порогу установления обобщенной синхронизации в исследуемой системе. При этом при относительно малом значении интенсивности шума ( $D = 2$ ) старший условный показатель Ляпунова практически в точности совпадает с аналогичным показателем, рассчитанным для той же системы в отсутствие шума. При относительно больших значениях интенсивности шума ( $D = 8$ ) показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений чуть позже, что и приводит к незначительному росту порогового значения установления синхронного режима.

Если рассмотреть фазовые портреты, то на рис. 2, б–г можно наблюдать, как трансформируется аттрактор ведомой системы при добавлении шума различной интенсивности. Видно, что внешнее шумовое воздействие при-

водит к зашумлению аттрактора, но при этом не нарушает его двулистную структуру.

Таким образом, режим обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных осцилляторах Лоренца оказывается устойчивым по отношению к шумам.

Для однонаправленно связанных систем Чена также при помощи метода вспомогательной системы были получены зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации от интенсивности шума при различных значениях управляющих параметров. На рис. 4 приведены зависимости порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации от интенсивности шума для трех различных значений управляющего параметра  $k_1$  при фиксированных значениях остальных управляющих параметров. Легко увидеть, что при различных значениях управляющего параметра  $k_1$  границы возникновения режима обобщенной синхронизации практически не зависят от интенсивности шума  $D \in [0; 120]$ .

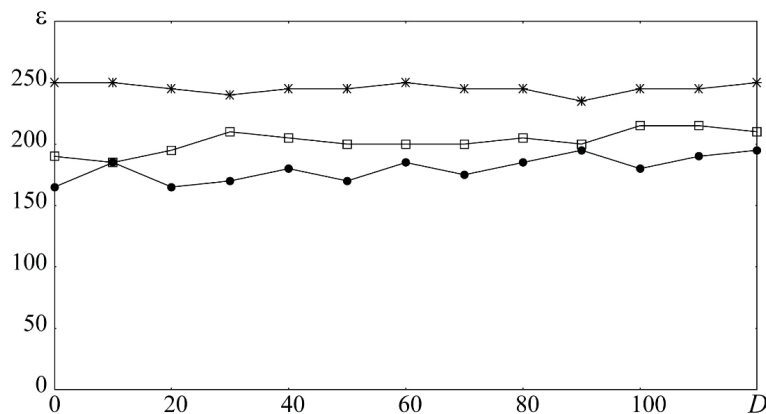


Рис. 4. Зависимости порога возникновения режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Чена от интенсивности шума, полученные при помощи метода вспомогательной системы, при следующих значениях управляющих параметров: ● –  $k_1 = 190, k_2 = 110$ ; □ –  $k_1 = 240, k_2 = 110$ ; \* –  $k_1 = 310, k_2 = 110$

Fig. 4. Dependencies of the threshold of the generalized synchronization regime onset in two unidirectionally coupled Chen systems on the noise intensity obtained by means of the auxiliary system approach for the following control parameter values: ● –  $k_1 = 190, k_2 = 110$ ; □ –  $k_1 = 240, k_2 = 110$ ; \* –  $k_1 = 310, k_2 = 110$

Устойчивость режима обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных системах Чена по отношению к шумам обусловлена также слабым влиянием шума на поведение старшего условного показателя Ляпунова и структуру аттрактора ведомой системы. На рис. 5 по аналогии с рис. 3 приведены зависимости двух старших условных показателей Ля-

пунова от параметра связи и фазовые портреты ведомой системы Чена при различных значениях интенсивности шумового воздействия. Видно, что, как и в системах Лоренца, при относительно слабых значениях интенсивности шумового воздействия показатели Ляпунова практически не отличаются от аналогичных показателей в отсутствие шума. Увеличение интенсивности



шумового сигнала приводит к небольшим изменениям показателей Ляпунова, но переход старшего условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений происходит практически

при том же значении параметра связи, что и в отсутствие шума или при наличии шума слабой интенсивности. При этом двулистная структура аттрактора во всех случаях также не разрушается.

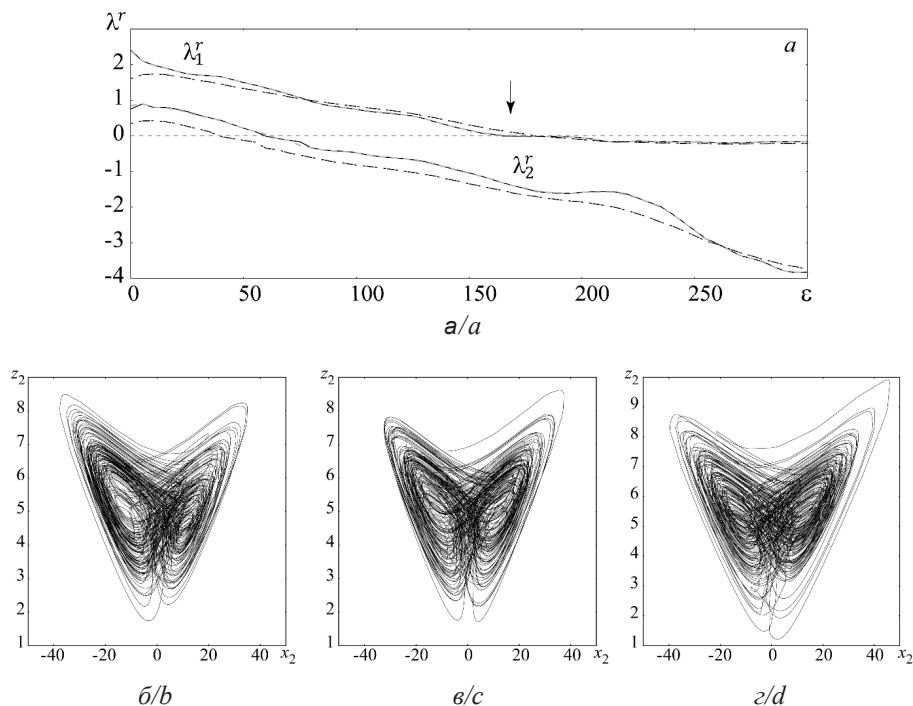


Рис. 5. Зависимости двух старших условных показателей Ляпунова  $\lambda_{1,2}^r$  от параметра связи  $\epsilon$  при различных значениях интенсивности шумового воздействия (а) и фазовые портреты ведомой системы Чена (2) при тех же значениях интенсивности шума (б–д):  $D = 0$  – сплошная линия (б),  $D = 10$  – штриховая линия (в),  $D = 100$  – штрихпунктирная линия (г). Значение параметра связи, соответствующее порогу возникновения обобщенной синхронизации в отсутствие шума, показано стрелкой

Fig. 5. Dependencies of two maximal conditional Lyapunov exponent  $\lambda_{1,2}^r$  on the coupling parameter  $\epsilon$  for different values of the noise intensity (a) and phase portraits of the response Chen system (2) for the same values of the noise intensity (b–d):  $D = 0$  – solid line (b),  $D = 10$  – dashed line (c),  $D = 100$  – dash-dotted line (d). The coupling parameter value corresponding to the generalized synchronization regime onset without noise is shown by the arrow

Таким образом, в рассмотренных однонаправленно связанных осцилляторах Чена режим обобщенной синхронизации оказывается также устойчивым по отношению к шумам.

### Заключение

В настоящей работе было проанализировано влияние шума на режим обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора. С помощью метода вспомогательной системы и расчета показателей Ляпунова установлено, что однонаправленно связанные системы Лоренца и однонаправленно связанные системы Чена оказываются устойчивыми к внешнему шумовому

воздействию. Показано, что значения порога обобщенной синхронизации практически не изменяются с ростом интенсивности шума как для систем Лоренца, так и для систем Чена. Такое поведение систем обусловлено тем, что шум не разрушает двулистную структуру аттракторов взаимодействующих систем, что подтверждено при помощи построения их фазовых портретов при различных значениях интенсивности шума.

### Список литературы

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences.* New York: Cambridge University Press, 2001. 411 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755743>



2. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D. L., Zhou C. S. The synchronization of chaotic systems // *Phys. Rep.* 2002. Vol. 366, iss. 1–2. P. 1–101. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(02\)00137-0](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00137-0)
3. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. 2-е изд. М. : URSS, 2009. 320 с.
4. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М. : URSS. 2021. 440 с.
5. Kocarev L., Parlitz U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74, iss. 25. P. 5028–5031. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.5028>
6. Чуб Р. О., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Способ передачи информации с использованием предсказательной модели в связанных системах с запаздыванием // *Известия Саратовского университета. Новая Серия. Серия: Физика.* 2018. Т. 18, вып. 2. С. 84–91. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2018-18-2-84-91>
7. Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Караваяев А. С., Прохоров М. Д. Устойчивая к шумам система скрытой передачи информации на хаотическом генераторе с запаздыванием с переключаемым временем задержки // *Журнал технической физики.* 2016. Т. 86, вып. 5. С. 1–8.
8. Pavlov A., Sosnovtseva O., Ziganshin A., Holstein-Rathlou N.-H., Mosekilde E. Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems // *Phys. A.* 2002. Vol. 316, iss. 1–4. P. 233–249. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01202-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01202-5)
9. Dmitriev B. S., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Starodubov A. V., Trubetskov D. I., Zharkov Y. D. First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102, iss. 7. 074101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.074101>
10. Анищенко В. С., Постнов Д. Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569–573.
11. Pecora L. M., Carroll T. L. Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, iss. 8. P. 821–824. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821>
12. Carroll T. L., Pecora L. M. Synchronizing chaotic circuits // *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1991. Vol. 38, iss. 4. P. 453–456. <https://doi.org/10.1109/31.75404>
13. Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, iss. 22. P. 4193–4196. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.4193>
14. Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, iss. 2. P. 980–994. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.980>
15. Heagy J. F., Carroll T. L., Pecora L. M. Desynchronization by periodic orbits // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, iss. 2. P. R1253–R1256. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.52.R1253>
16. Zhou C., Kurths J., Kiss I. Z., Hudson J. L. Noise-enhanced phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, iss. 1. P. 014101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.014101>
17. Moskalenko O. I., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Ovchinnikov A. A. Effect of noise on generalized synchronization of chaos : Theory and experiment // *Eur. Phys. J. B.* 2011. Vol. 82, iss. 1. P. 69–82. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2011-11019-1>
18. Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Hramov A. E. Generalized synchronization of chaos for secure communication : Remarkable stability to noise // *Phys. Lett. A.* 2010. Vol. 374, iss. 29. P. 2925–2931. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.05.024>
19. Ханадеев В. А., Москаленко О. И., Короновский А. А. Перемежаемость вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора // *Известия Российской Академии Наук. Серия физическая.* 2021. Т. 85, вып. 2. С. 265–269. <https://doi.org/10.31857/S0367676521020137>
20. Pyragas K. Weak and strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, iss. 5. P. R4508–R4511. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.54.R4508>
21. Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M. Generalized synchronization of chaos : The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, iss. 5. P. 4528–4535. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.4528>
22. Chen Z., Yang Y., Qi G., Yuan Z. A novel hyperchaos system only with one equilibrium // *Phys. Lett. A.* 2007. Vol. 360, iss. 6. P. 696–701. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.08.085>
23. Никитин Н. Н., Первачев С. В., Разевиг В. Д. О решении на ЦВМ стохастических дифференциальных уравнений следящих систем // *Автоматика и телемеханика.* 1975. Вып. 4. С. 133–137.
24. Hramov A. E., Koronovskii A. A. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhys. Lett.* 2005. Vol. 70, iss. 2. P. 169–175. <https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10488-6>

## References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences.* New York, Cambridge University Press, 2001. 411 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755743>
2. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D. L., Zhou C. S. The synchronization of chaotic systems. *Phys. Rep.*, 2002, vol. 366, iss. 1–2, pp. 1–101. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(02\)00137-0](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00137-0)
3. Anishchenko V. S. *Complex Oscillations in Simple Systems. Mechanisms of Occurrence, Structure and Properties of Dynamic Chaos in Radiophysical Systems.* 2nd ed. Moscow, URSS Publ., 2009. 320 p. (in Russian).
4. Blekhman I. I. *Synchronization in Science and Technology.* Moscow, URSS Publ., 2021. 440 p. (in Russian).
5. Kocarev L., Parlitz U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication.





- Phys. Rev. Lett.*, 1995, vol. 74, iss. 25, pp. 5028–5031. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.5028>
6. Chub R. O., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Method for Information Transmission Using a Predictive Model in Coupled Time-delay Systems. *Izv. Saratov Univ. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 84–91 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2018-18-2-84-91>
  7. Kul'minskii D. D., Ponomarenko V. I., Karavaev A. S., Prokhorov M. D. Noise-resistant system of concealed information transfer on a chaotic delayed feedback oscillator with switchable delay time. *Technical Physics*, 2016, vol. 61, iss. 5, pp. 639–647. <https://doi.org/10.1134/S1063784216050121>
  8. Pavlov A., Sosnovtseva O., Ziganshin A., Holstein-Rathlou N.-H., Mosekilde E. Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems. *Phys. A*, 2002, vol. 316, iss. 1–4, pp. 233–249. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01202-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01202-5)
  9. Dmitriev B. S., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Starodubov A. V., Trubetskov D. I., Zharkov Y. D. First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 102, iss. 7, pp. 074101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.074101>
  10. Anishchenko V. S., Postnov D. E. Effect of the basic frequency locking of chaotic auto-oscillations - synchronization of strange attractors. *Pisma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 1988, vol. 14, iss. 6, pp. 569–573 (in Russian).
  11. Pecora L. M., Carroll T. L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, iss. 8, pp. 821–824. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821>
  12. Carroll T. L., Pecora L. M. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1991, vol. 38, iss. 4, pp. 453–456. <https://doi.org/10.1109/31.75404>
  13. Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, iss. 22, pp. 4193–4196. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.4193>
  14. Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 51, iss. 2, pp. 980–994. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.980>
  15. Heagy J. F., Carroll T. L., Pecora L. M. Desynchronization by periodic orbits. *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 52, iss. 2, pp. R1253–R1256. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.52.R1253>
  16. Zhou C., Kurths J., Kiss I. Z., Hudson J. L. Noise-enhanced phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 89, iss. 1, pp. 014101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.014101>
  17. Moskalenko O. I., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Ovchinnikov A. A. Effect of noise on generalized synchronization of chaos: Theory and experiment. *Eur. Phys. J. B*, 2011, vol. 82, iss. 1, pp. 69–82. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2011-11019-1>
  18. Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Hramov A. E. Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise. *Phys. Lett. A*, 2010, vol. 374, iss. 29, pp. 2925–2931. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.05.024>
  19. Khanadeev V. A., Moskalenko O. I., Koronovskii A. A. Intermittency near the boundary of generalized synchronization in systems with a complex topology of attractor. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2021, vol. 85, iss. 2, pp. 192–195. <https://doi.org/10.3103/S106287382102012X>
  20. Pyragas K. Weak and strong synchronization of chaos. *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 54, iss. 5, pp. R4508–R4511. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.54.R4508>
  21. Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 53, iss. 5, pp. 4528–4535. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.4528>
  22. Chen Z., Yang Y., Qi G., Yuan Z. A novel hyperchaos system only with one equilibrium. *Phys. Lett. A*, 2007, vol. 360, iss. 6, pp. 696–701. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.08.085>
  23. Nikitin N. N., Pervachev S. V., Razevig V. D. On computer solution of stochastic differential equations for flow-up systems. *Automation and Telemekhanics*, 1975, iss. 4, pp. 133–137 (in Russian).
  24. Hramov A. E., Koronovskii A. A. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.*, 2005, vol. 70, iss. 2, pp. 169–175. <https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10488-6>

Поступила в редакцию 23.02.2021, после рецензирования 21.04.2021, принята к публикации 26.04.2021

Received 23.02.2021, revised 21.04.2021, accepted 26.04.2021