

РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 116–132
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 116–132

Научная статья
УДК 537.8:537.9:621.371
<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-116-132>

Нелинейное туннелирование электромагнитной волны через слой плазмы

М. В. Давидович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени
Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Давидович Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, про-
фессор кафедры радиотехники и электродинамики, DavidovichMV@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8706-8523>

Аннотация. Рассмотрено распространение сильной плоской электромагнитной волны из вакуума через ограниченный слой холодной плазмы с учетом нелинейности в условиях туннелирования и прозрачности. Нелинейность учтена феноменологически как зависимость плазменной частоты и частоты столкновений от усредненного за период квадрата поля, т.е. переданная электронам энергия поля расходуется только на ионизацию. Получены связанные стационарные нелинейные интегральные уравнения для гармоник поля, а также нелинейное интегральное уравнение нестационарного процесса. Определены скорость и время туннелирования в линейном и нелинейном случаях и коэффициент генерации третьей гармоники. Показано, что туннелирование занимает больше времени, чем прохождение прозрачного слоя, а нелинейное туннелирование более длительное, чем линейное.

Ключевые слова: плазма, время туннелирования, нелинейная электромагнитная волна, парадокс Хартмана, энергетическая скорость

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-10033) и Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSRR-2020-0004).

Для цитирования: Давидович М. В. Нелинейное туннелирование электромагнитной волны через слой плазмы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 116–132. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-116-132>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article
<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-116-132>

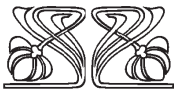
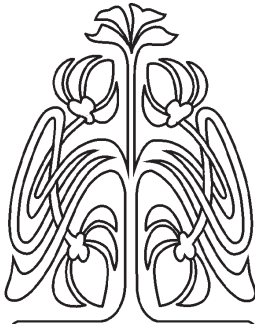
Nonlinear tunneling of electromagnetic wave through a plasma layer

M. V. Davidovich

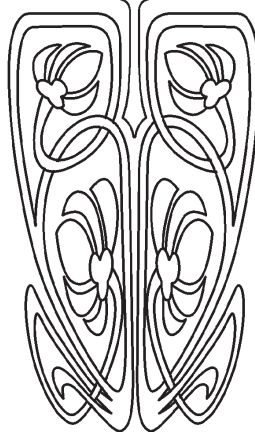
Saratov State University, 83 Astrakhanskaya Sr., Saratov 410012, Russia

Michael V. Davidovich, DavidovichMV@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8706-8523>

Abstract. Background and Objectives: The propagation of a strong plane electromagnetic wave from a vacuum through a limited plasma layer is considered, taking into account non-linearity under tunneling and transparency conditions. The temperature dependence is not taken into ac-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





count. The non-linearity is taken into account phenomenologically as the dependence of the plasma frequency and collision frequency on the field averaged over the period squared. **Conclusion:** Coupled stationary nonlinear integral equations for the field harmonics, as well as a nonlinear integral equation for a non-stationary process, are obtained. The speed and time of tunneling in linear and nonlinear cases, the field distribution and the third harmonic generation coefficient are determined. It is shown that tunneling takes longer than the passage of a transparent layer, and the process of nonlinear tunneling is a longer process compared to linear, while in all cases the time of the wave passage is longer when passing the structure at the speed of light.

Keywords: plasma, tunneling time, nonlinear electromagnetic wave, Hartman paradox, energy velocity

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 16-19-10033) and by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the State task (project No. FSRR-2020-0004).

For citation: Davidovich M. V. Nonlinear tunneling of electromagnetic wave through a plasma layer. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 116–132 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-116-132>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Вопросы распространения сильной электромагнитной волны (ЭМВ) в плазме при учете нелинейных свойств весьма важны, например, для зондирования ионосферы, для полупроводниковой электроники, для разогрева плазмы и других приложений. Основная сложность таких задач состоит в установлении материальных уравнений при воздействии сильной волны [1–12]. Сильная волна изменяет свойства среды, т.е. условия своего распространения, поэтому динамика ее движения даже в однородной нелинейной среде может быть весьма сложной [1, 5–7, 12–16]. Например, при частоте выше плазменной распространение приводит к разогреву и ударной ионизации, которая увеличивает плазменную частоту до превышающих частоту волны значений, что далее приводит к туннелированию. Затем ослабленная туннелированием и диссипацией волна возвращается в режим волнового прохождения. Сложно ведет себя волновой пакет (ВП), особенно широкий и при отражении от границ раздела, которое существенно даже для квазимонохроматической волны [10]. Сложное поведение широкополосных ВП (импульсов) демонстрируют даже простые нелинейные модели диэлектрических сред [13–16]. Для них достаточно хорошо развита теория распространения в двухуровневых системах [14, 15]. Для неоднородных плазменных структур теория нелинейной дифракции ВП развита недостаточно. Это касается и конечных диссипативных структур типа слоев, рассмотрение которых представляет особый интерес. В частности, интересна генерация гармоник, которая рассмотрена в ряде работ (см. [7, 8]) для бесконечной плазмы на основе кинетического уравнения.

Далее для описания плазмы мы придерживаемся подхода работы [1], где найдена сложная динамика движения одномерной монохроматической волны в бесконечном плазменном пространстве в отсутствие диссипации, которая

может иметь несколько решений в случае, когда диэлектрическая проницаемость (ДП) зависит от усредненного за период квадрата греющего поля \tilde{E} . Далее мы рассматриваем одномерную (плоскую) ЭМВ, считая, что она имеет структуру произведения быстро осциллирующего (с несущей частотой) множителя и медленно меняющейся во времени амплитуды (огibaющей). Также учитывается диссипация, которой соответствует затухающий множитель у амплитуды. Диссипация сильно меняет характер распространения и усложняет анализ, особенно в случае спектрально широких ВП. С ростом поля она может увеличиваться и уменьшаться, может быть частотно селективной, что увеличивает число вариантов решения. Строгая динамика сильной ЭМВ с широким спектром в неоднородных нелинейных средах со структурами сложна и принципиально требует нестационарного кинетического рассмотрения, для которого разработан метод неравновесных функций Грина – Келдыша [17]. Такой подход сложен для численного моделирования и требует мощных ЭВМ. Часто в нелинейных нестационарных задачах решают совместно уравнения Максвелла и нелинейной поляризации [16] или сводят задачу к нелинейному уравнению Шредингера для огibaющей.

В данной работе мы считаем плазму холодной, импульс коротким, изменяющим только концентрацию зарядов (плазменную частоту), т.е. не греющим, на основе аппроксимации ДП мы вводим интегральные уравнения (ИУ) для стационарного и нестационарного случаев. Далее рассматриваем достаточно короткие квазимонохроматические ВП в однородной неподвижной плазме такие, что воздействие изменяет только степень ионизации. Плазму считаем равновесной. Время релаксации для ионизации считаем малым по сравнению с периодом несущей частоты. Считаем, что за указанное время плазма релаксирует к равновесной, т.е. диэлектрическая проницае-



мость ДП зависит только от квадрата медленно меняющейся амплитуды поля. Нелинейное распространение изменяет исходный спектр ВП, как и наличие частотно селективной диссипации (см., например, [11]). Далее диссипация учтена введением частоты столкновений, обратной времени релаксации импульса электронов. Для спектрально узкого ВП связанная с нагревом диссипация означает перераспределение электромагнитной энергии из узкой частотной области ВП по всему спектру излучения нагретой среды, т.е. потери. Интересно распространение сильной в указанном смысле и приближениях ЭМВ через структуры, в частности, ограниченный слой плазмы, поскольку большинство исследований выполнено для полупространства [1, 7].

Цель работы – исследование дифракции ЭМВ на плазменном слое, получение соответствующих интегральных уравнений, выяснение вопроса о времени туннелирования ЭМВ и влияния квадратичной по полю нелинейности.

1. Постановка задачи

Спектральная ДП холодной разреженной плазмы с учетом диссипации (частоты столкновений ω_c) может быть представлена в виде $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_L - \omega_p^2 / (\omega^2 - i\omega\omega_c)$ [1–3, 18], где для газовой плазмы $\varepsilon_L = 1$, а для твердотельной плазмы величину $\varepsilon_L \sim 5 - 20$ на частотах существенно ниже плазменной частоты ($\omega < \omega_p$) можно считать действительной и постоянной. Она определяет вклад дисперсии Лоренца от переходов валентной зоны, а с повышением частоты – также и вклад от межзонных переходов между валентной зоной и зоной проводимости. В полупроводниковой плазме квадрат плазменной частоты $\omega_p^2 = e^2 \varepsilon_0^{-1} (n_e / \tilde{m}_e + n_h / \tilde{m}_h)$ пропорционален сумме отношений концентраций электронов и дырок к их эффективным массам [1]. Моделирование такой плазмы усложняется из-за неквадратичной дисперсии, т.е. зависимости эффективных масс от греющего поля. Далее рассматриваем однокомпонентную электронную плазму. Считаем плазму электрически нейтральной, а частоту столкновений – линейной функцией концентрации электронов $\omega_c = \omega_{c0}(1 + \alpha_e n_e)$. Дисперсия модели Лоренца для разреженного вещества (газа осцилляторов) с одной резонансной частотой ω_0 дается формулой [18]

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_c}. \quad (1)$$

ДП холодной плазмы можно описать (1) при $\omega_0 = 0$. Для (1), обозначая $\Omega = \omega / \omega_p$, $\Omega_0 = \omega_0 / \omega_p$, $\Omega_c = \omega_c / \omega_p$, имеем $\text{Re}(\varepsilon) < 0$, если $|\Omega^2 - \Omega_0^2 - (1 - \Omega_c^2)/2| \leq \sqrt{(1 - \Omega_c^2)^2 / 4 - \Omega_0^2 \Omega_c^2}$. Зависимость ω_c от поля может привести как к отсутствию полосы туннелирования, так и к ее появлению. Для реальных сред дисперсия ДП содержит несколько таких членов с учетом локального поля и нескольких частот $\omega_0, \omega_p, \omega_c$. Величины ω_p^2 определяются через силы осцилляторов соответствующих квантовых переходов с частотами ω_{0n} , а величины ω_{cn} и $\tau_{cn} = 1/\omega_{cn}$ соответствуют ширинам соответствующих спектральных линий и временам жизни возбужденных состояний. Обратное преобразование Фурье от (1) определяет ядро $\tilde{\varepsilon}(t)$ интегрального оператора, связывающего электрическое поле и индукцию во времени:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \delta(t) + \chi(t) \sum_n \frac{\omega_{pn}^2 \exp(-\omega_{cn} t / 2)}{\sqrt{\omega_{0n}^2 - \omega_{cn}^2 / 4}} \sin\left(t \sqrt{\omega_{0n}^2 - \omega_{cn}^2 / 4}\right). \quad (2)$$

Здесь $\chi(t)$ – функция Хэвисайда, обеспечивающая принцип причинности: $\tilde{\varepsilon}(t) = 0$ при $t < 0$. Для газовой плазмы в (2) следует положить $\omega_{0n} = 0$, т.е. считать заряды свободными (далее для однокомпонентной плазмы $n = 1$, $\omega_{p1} = \omega_p$). Для исключения полюса на нулевой частоте удобно использовать формулу Друде – Смита. Для многоуровневой среды следует учесть все частоты переходов, а для твердотельной плазмы добавить в (2) и ее электронно-дырочную восприимчивость. В случае однородной изотропной среды связь между индукцией и полем имеет вид [18, 19]

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \tilde{\varepsilon}(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (3)$$

Полагая в (1) $\omega_0 = 0$, получаем из (2) для газовой плазмы $\tilde{\varepsilon}(t) = \delta(t) + \omega_p^2 \omega_{0n}^{-1} [1 - \exp(-\omega_c t)]$, что совпадает с обратным преобразованием Фурье от спектральной ДП $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - i\omega\omega_c)$ Друде для плазмы. Для плазмы металлов и полупроводников вклад в $\varepsilon_L \sim 10$ дают другие члены дисперсии Лоренца, взятые на низких частотах, поскольку обычно $\omega_p \ll \omega_0$.

При $\omega < \omega_p / \sqrt{\varepsilon_L}$ и малой частоте столкновений $\omega_c \ll \omega$ ДП плазмы становится почти отрицательной, и возможно туннелирование



через ее слой. В общем случае ДП комплексная: $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, $\varepsilon'' > 0$. Для дисперсии Лоренца условие $\varepsilon'(\omega) = \text{Re}(\varepsilon(\omega)) < 0$, при котором в соответствующем диапазоне имеет место стационарное туннелирование, также возможно. Кроме дисперсии Друде при $\omega_0 = 0$ из (1) предельным переходом $\omega_0 \rightarrow \infty$, $\omega_c \rightarrow \infty$, $\omega_p \rightarrow \infty$ (бесконечно жесткие диполи) при условии $\omega_p^2 / \omega_0^2 = \kappa$, $\omega_c^2 / \omega_0^2 = \tau^2$ следует формула Дебая $\varepsilon' = 1 + \kappa / (1 + \omega^2 \tau^2)$, $\varepsilon'' = (\varepsilon' - 1)\omega\tau$ [20]. Для нее всегда $\varepsilon' > 1$. Мы будем рассматривать среды с возможностью туннелирования, т.е. с условием $\varepsilon'(\omega) < 0$ в некотором диапазоне. Для дисперсии Лоренца его может не быть вовсе (большая диссипация и малая сила осциллятора) или же его частотная область может быть весьма узкой. Поэтому далее рассматриваем только плазменный слой в области $0 \leq z \leq d$, на который падает ЭМВ:

$$E_x(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \exp(i\omega(t - z/c)) d\omega, \quad (4)$$

$$H_y(z, t) = \frac{c\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \exp(i\omega(t - z/c)) d\omega. \quad (5)$$

Поскольку для действительных полей спектр удовлетворяет условию $E(\omega) = E^*(-\omega)$, эти интегралы можно свести к интегралу от функции $|E(\omega)| \cos(\omega(t - z/c) + \varphi(\omega))$ по области $0 \leq \omega < \infty$. Здесь $E(\omega) = |E(\omega)| \exp(i\varphi(\omega))$. Тогда множителем в интеграле типа (4) будет $1/\pi$. В случае монохроматической волны $E(\omega) = \pi E_0 (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$ или $E_x(z, t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z)$, $H_y(z, t) = c\varepsilon_0 E_0(\omega) \cos(\omega_0 t - k_0 z)$, $k_0 = \omega/c$. Нам в этом случае будет удобно перейти к комплексным амплитудам, заменяя $\cos(\omega_0 t - k_0 z)$ на $\exp(i\omega_0 t - ik_0 z)$, а обратный переход будем осуществлять взятием реальной части. Спектр $E(\omega)$ можно определить, зная поле (4) в некоторой точке перед слоем во все времена (именно этот спектр соответствует падающей волне), при этом поле отраженной волны не учитываем). Взяв в (4) и (5) спектр ограниченным в области $|\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega$, приходим в силу теоремы Винера – Пэли [21, 22] к нелокальным во времени функциям с ограниченным спектром, которым в нашем случае соответствуют

и нелокальные в пространстве ВП. Абсолютная нелокальность соответствует монохроматической волне. Для получения локальных ВП необходим инфинитный спектр. Однако из-за квантовой природы фотонов точно он не может быть реализован. Нелокальность приводит к размытому переднему фронту. Для рассмотрения падающей ЭМВ с резким фронтом в (4) и (5) следует взять множитель $\chi(t - z/c)$. Например, $E_x(z, t) = \chi(t - z/c) E_0 \cos(\omega(t - z/c))$. Такой ВП подходит к слою в момент $t = 0$. Комбинация функций Хевисайда $\Pi(z, t) = \chi(t - z/c) - \chi(t - T - z/c)$ в виде прямоугольного формфактора (множителя) обеспечивает конечную длительность T падающего импульса. Формфактор не тождественен огибающей [23]. Спектр такого импульса имеет вид $E(\omega) = E_0 [f(\omega_0, \omega) + f^*(\omega_0, -\omega)]$, где $f(\omega_0, \omega) = \exp(i(\omega_0 - \omega)T/2) \text{sinc}((\omega_0 - \omega)T/2)$, $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Он квазимонохроматический, если $\omega_0 T = 2\pi T/T_0 \gg 1$, т.е. если импульс содержит много периодов во времени или длин волн в пространстве. Далее рассмотрим две задачи: стационарную (спектральную) и квазистационарную (с узким спектром).

2. Нелинейные спектральные интегральные уравнения

Необходимость решать уравнения Максвелла совместно с кинетическим уравнением и уравнениями движения носителей заряда приводит к сложным постановкам задач [1–9, 17], которые не всегда просто довести до численных результатов. Мы используем упрощенный феноменологический подход [1]. Разогрев плазмы описываем как зависимость концентраций в ней от величины мощности ЭМВ, т.е. от величины квадрата греющего значения поля $n_{(e,h)} = f(\tilde{E}^2)$. Такой квадрат поля должен быть усреднен за период. Газовая ионосферная плазма является в основном однокомпонентной электронной, поскольку массы положительных ионов весьма велики по сравнению с массой электрона m_e . Распространение импульсов в ионосфере рассматривают в основном в линейном приближении (см., например, [24]). Расчет зависимости $n_{(e,h)} = f(\tilde{E}^2)$ весьма сложен, поэтому часто используют различные феноменологические формулы [1, 25, 26]. В не слишком сильных полях можно брать зависимо-



сти типа $n = n_0(1 + \alpha^2 \tilde{E}^2)$. В сильных полях имеет место насыщение при полной ионизации. Такие зависимости берем в виде

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \delta \exp(-\beta^\gamma \tilde{E}^\gamma)}, \quad (6)$$

$$n = n_0 + (n_\infty - n_0)(1 - \exp(-\beta^\gamma \tilde{E}^\gamma)), \quad (7)$$

$$n = \frac{n_0}{1 - \delta \exp(-(\beta \tilde{E})^{-\gamma})}. \quad (8)$$

В этих соотношениях n_0 и n_∞ – концентрации в бесконечно слабом поле и в сильном поле при насыщении ионизации, $\gamma > 0$, $\alpha = \tilde{E}_{ef}^{-1}$ и $\beta = \tilde{E}_{ef}^{-1}$ – некие обратные полям величины. При поле $\tilde{E} = 1/\alpha$ концентрация удваивается, при поле $\tilde{E} = 1/\beta$ для формулы (6) $n = n_\infty/[1 + (n_\infty/n_0 - 1)/e]$, для формулы (7) $n = n_0/e + n_\infty(1 - 1/e)$, для формулы (8) $n = n_0/(1 - \delta/e)$. В предельно сильных полях $n_0 = n_\infty/(1 + \delta)$ для (6) и $n_0 = n_\infty(1 - \delta)$ для (8). В случае слабых полей $\beta^\gamma |E|^\gamma \ll 1$ из (6) следует $n = n_0(1 + \delta \beta^\gamma \tilde{E}^\gamma / (1 + \delta))$, а из (7) – $n = n_0 + (n_\infty - n_0) \beta^\gamma |E|^\gamma$. В слабо греющем

поле все формулы можно записать как $n = n_0(1 + \delta \beta^\gamma \tilde{E}^\gamma)$. Первому случаю соответствует $\gamma = 2$, $\alpha = \sqrt{\delta} \beta$. Мы будем исследовать случай полей, когда выполнена зависимость $n = n_0(1 + \alpha^2 \tilde{E}^2)$. Для нее характерна квадратичная зависимость ДП плазмы от поля. Сильная волна с частотой больше плазменной, прошедшая в плазму, может увеличить ее плазменную частоту и стать туннелирующей. Туннелирование сопровождается ослаблением поля и восстановлением режима прохождения. На самом деле следует исследовать динамику распространения волны в условиях ударной ионизации и индуцированной прозрачности. Такая сильно нестационарная постановка задачи сложна, поэтому в данной работе мы рассмотрим возможное стационарное решение для слоя. В силу квадратичной нелинейности ДП возникает кубическая нелинейность в волновом уравнении, что приводит к дискретному спектру частот $m\omega_0$ в поле дифракции. Из всего спектра для простоты мы ограничимся первой и третьей гармониками. Итак, слева от слоя поле ищем в виде

$$E_x(z, t) = E(z, t) = E_0[\exp(i\omega(t - z/c)) + R \exp(i\omega(t + z/c)) + R_3 \exp(3i\omega(t + z/c))], \quad (9)$$

$$H_y(z, t) = H(z, t) = c \varepsilon_0 E_0[\exp(i\omega(t - z/c)) - R \exp(i\omega(t + z/c)) - R_3 \exp(3i\omega(t + z/c))]. \quad (10)$$

Справа от слоя поле ищем в виде

$$E_x(z, t) = E(z, t) = E_0[T \exp(i\omega(t - (z - d)/c)) + T_3 \exp(3i\omega(t - (z - d)/c))], \quad (11)$$

$$H_y(z, t) = H(z, t) = c \varepsilon_0 E_0[T \exp(i\omega(t - (z - d)/c)) + T_3 \exp(3i\omega(t - (z - d)/c))]. \quad (12)$$

Внутри ищем поле в виде $E(z, t) = E_1(z, t) + E_3(z, t)$, или

$$E(z, t) = E_1(z) \exp(i\omega t + i\varphi_1(z)) + E_3(z) \exp(3i\omega t + i\varphi_3(z)) \quad (13)$$

с действительными амплитудами. Это как раз и означает, что мы ограничиваемся только первой и третьей гармониками в его разложении. Как обычно счита-

ем действительное физическое поле как реальную часть комплексного поля (13): $\bar{E}(z, t) = \text{Re}(E(z, t))$. Пренебрегая гармониками выше третьей, имеем:

$$\bar{E}^2(z, t) = \frac{E_1^2(z)(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_1(z))) + E_3^2(z) + E_1(z)E_3(z)\cos(2\omega t - \varphi_1(z) + \varphi_3(z))}{2}, \quad (14)$$

$$|E(z, t)|^2 = E_1^2(z) + E_3^2(z) + 2E_1(z)E_3(z)\cos(2\omega t + \varphi_3(z) - \varphi_1(z)). \quad (15)$$

Усредненное за период значение поля есть

$$\tilde{E}^2(z) = E_1^2(z)/2 + E_3^2(z)/2 = \langle |E(z, t)|^2 \rangle / 2 = \langle \bar{E}^2(z, t) \rangle.$$

Комплексное поле удовлетворяет интегральному уравнению

$$E(z, t) = E_0 \exp(i\omega_0(t - z/c)) + \int_0^d G_{3\omega}(z - z')(\varepsilon(z') - 1)E_3(z', t) dz' + \int_0^d G_\omega(z - z')[[\varepsilon(z') - 1 + \varepsilon_2(z')](E_1^2(z') + E_3^2(z') + E_1(z')E_3(z'))]E_1(z', t) dz'. \quad (16)$$



В нем обозначено ядро $G_\omega(z) = -ik_0 \exp(-ik_0|z|)/2$, удовлетворяющее неоднородному уравнению Гельмгольца с дельта-функцией: $(\partial_z^2 + k_0^2)G_\omega(z) = -k_0^2 \delta(z)$, т.е. пропорциональное его функции Грина. Обозначаем $G_{3\omega}(z) = -3i\omega \exp(-3i\omega|z|/c)/(2c)$, ДП плазмы $\varepsilon(z') = \varepsilon_L(z') - \omega_{p0}^2/(\omega^2 - i\omega\omega_c)$, частоту столкновений считаем пропорциональной концен-

трации $\omega_c = \omega_{c0}n(z)/n_0(z) = \omega_{c0}(z)(1 + \alpha^2|E(z)|^2)$. Для определения плазменной частоты ω_{p0} использована концентрация n_0 : $\omega_{p0}^2 = en_0/(\varepsilon_0 m_e)$. Далее индекс “0” опускаем. Нелинейная часть ДП ε_2 для такой плазмы определена как $\varepsilon_2(z) = -e^2 n_0(z) \alpha^2 / [(\varepsilon_0 m_e)(\omega^2 - i\omega\omega_c(z))]$. Уравнение (16) разделяется на два:

$$E_1(z) \exp(i\varphi_1(z)) = E_0 \exp(i\omega_0(t - z/c)) + \int_0^d G_\omega(z - z') (\varepsilon(z') - 1 + \varepsilon_2(z')) |E(z')|^2 E_1(z') \exp(i\varphi_1(z')) dz', \quad (17)$$

$$E_3(z) \exp(i\varphi_3(z)) = \int_0^d G_{3\omega}(z - z') [(\varepsilon(z') - 1) E_3(z', t)] \exp(i\varphi_3(z')) dz'. \quad (18)$$

Наиболее простой вид уравнения приобретают для однородной газовой плазмы:

$$E_1(z) \exp(i\varphi_1(z)) = E_0 \exp(-ik_0 z) - \omega_{p0}^2 \int_0^d G_\omega(z - z') \frac{(1 + \alpha^2 |E(z')|^2) E_1(z') \exp(i\varphi_1(z'))}{\omega^2 - i\omega\omega_{c0} (1 + \alpha^2 \tilde{E}^2(z'))} dz', \quad (19)$$

$$E_3(z) \exp(i\varphi_3(z)) = -\omega_{p0}^2 \int_0^d \frac{G_{3\omega}(z - z') E_3(z') \exp(i\varphi_3(z'))}{\omega^2 - i\omega\omega_{c0} (1 + \alpha^2 \tilde{E}^2(z'))} dz'. \quad (20)$$

Уравнение (16) дополним уравнением для магнитного поля:

$$H(z, t) = H_0(z) + ic\varepsilon_0 E_0 \exp(i\omega(t - z/c)) - \frac{\partial_z}{3\omega\mu_0} \int_0^d G_{3\omega}(z - z') (\varepsilon(z') - 1) E_3(z', t) dz' - \frac{\partial_z}{\omega\mu_0} \int_0^d G_\omega(z - z') [(\varepsilon(z') - 1 + \varepsilon_2(z')) (E_1^2(z') + E_3^2(z') + E_1(z') E_3(z'))] E_1(z', t) dz'. \quad (21)$$

Здесь $H_0(z)$ – некоторое постоянное во времени поле, определяющее константу интегрирования, $\partial_z G_\omega(z) = -\text{sgn}(z) \exp(-ik_0|z|)/2$. Уравнения (19) и (20) связаны посредством гребущего поля. Предположим, что $E_3(z) = \delta_0 E_1(z)$, где δ_0 – величина, определяющая амплитуду третьей гармоники, которую считаем малой. В таком предположении

решение упрощается. Пренебрегая $E_3(z)$ в (19), находим решение $E_1(z)$ и $\varphi_1(z)$. Уравнение (19) и (20) каждое разделим на два: для действительной и мнимой частей. Этого вполне достаточно для определения двух действительных функций $E_1(z)$ и $\varphi_1(z)$. Умножая (20) на $E_3(z) \exp(-i\varphi_3(z))$ и интегрируя и сокращая на δ_0^2 , получаем:

$$\int_0^d E_1^2(z) dz = -\omega_{p0}^2 \text{Re} \int_0^d \int_0^d \frac{G_{3\omega}(z - z') E_1(z) E_1(z') \exp(i\varphi_3(z') - i\varphi_3(z)) dz' dz}{\omega^2 - i\omega\omega_{c0} (1 + \alpha^2 \tilde{E}^2(z'))}. \quad (22)$$

В этом выражении $\tilde{E}^2(z) = (1 + \delta_0^2) E_1^2(z)/2$, поэтому, если известна функция $\varphi_3(z)$, уравнение (22) определяет величину δ_0^2 . Это уравнение можно решать итерационно. Очевидно, для величины $\varphi_3(z)$ имеет место уравнение

$$E_1(z) \sin(\varphi_3(z)) = -\omega_{p0}^2 \text{Im} \int_0^d \frac{G_{3\omega}(z - z') E_1(z') \exp(i\varphi_3(z')) dz'}{\omega^2 - i\omega\omega_{c0} (1 + \alpha^2 \tilde{E}^2(z'))}. \quad (23)$$

Она также должна удовлетворять соотношению $\text{Im} \int_0^d \int_0^d \frac{G_{3\omega}(z - z') E_1(z) E_1(z') \exp(i\varphi_3(z') - i\varphi_3(z)) dz' dz}{\omega^2 - i\omega\omega_{c0} (1 + \alpha^2 \tilde{E}^2(z'))} = 0$.

В этих соотношениях удобно полагать $\tilde{E}^2(z) = E_1^2(z)/2$. Строго следует совместно решать два комплексных или четыре нелинейных действительных уравнения, соответствующих (19) и (20) относительно четырех действительных функций. На основе таких решений можно



вычислить усредненные энергии на первой и третьей гармониках и определить на такой основе коэффициент генерации третьей гармоники.

3. Нелинейные нестационарные интегральные уравнения

В нестационарном нелинейном случае строго использовать спектральные интегральные связи типа (4) нельзя. Рассмотрим непосредственно уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} -\partial_z H_y(z, t) &= \varepsilon_0 \partial_t E_x(z, t) + J_x(z, t), \\ \partial_z E_x(z, t) &= -\mu_0 \partial_t H_y(z, t). \end{aligned} \quad (24)$$

В них все влияние среды описано величиной $J_x(z, t)$. Пусть падающий электромагнитный импульс имеет вид

$$\begin{aligned} E_{0x}(z, t) &= \\ &= E_0 [\chi(t - z/c) - \chi(t - T - z/c)] \sin(\omega(t - z/c)). \end{aligned} \quad (25)$$

Это цуг с формфактором $\Pi(z, t)$, который подошел в момент $t = 0$ к слою слева (в точке $z = 0$) и в момент T он в этой точке закончился. До дифракции в слое была однородная плотность заряда электронов ρ_0 . Волновое уравнение для электрического поля имеет вид

$$(\partial_z^2 - c^{-2} \partial_t^2) E_x(z, t) = \mu_0 \partial_t J_x(z, t). \quad (26)$$

Введем соленоидальный вектор-потенциал: $\mathbf{A}(z, t) = \mathbf{x}_0 A_x(z, t)$, $\nabla \cdot \mathbf{A}(z, t) = 0$. Тогда $H_y(z, t) = \partial_z A_x(z, t)$, $E_x(z, t) = -\mu_0 \partial_t A_x(z, t)$. Непосредственно из (24) или из (26) находим

$$(\partial_z^2 - c^{-2} \partial_t^2) A_x(z, t) = -J_x(z, t). \quad (27)$$

К уравнениям (26), (27) возможен макроскопический и микроскопический подходы. Рассматривая (26) как макроскопическое уравнения, следует под $J_x(z, t)$ понимать ток поляризации $J_x(z, t) = \partial P_x(z, t)$, определяемый на основе со-

отношения (3), где $D_x(z, t) = \varepsilon_0 E_x(z, t) + P_x(z, t)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} J_x(z, t) &= \varepsilon_0 \tilde{\kappa}(0) E_x(z, t) + \varepsilon_0 \int_0^t \tilde{\kappa}'(t-t') E_x(z, t') dt' = \\ &= \varepsilon_0 \omega_p^2 \int_0^t \exp(-\omega_c(t-t')) E_x(z, t') dt'. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\kappa}(t) = \omega_p^2 \omega_n^{-1} [1 - \exp(-\omega_c t)]$ – ядро оператора диэлектрической восприимчивости. Дифференцируя еще раз, получаем:

$$\begin{aligned} \partial_t J_x(z, t) &= \\ &= \varepsilon_0 \omega_p^2 E_x(z, t) - \varepsilon_0 \omega_p^2 \omega_c \int_0^t \exp(-\omega_c(t-t')) E_x(z, t') dt'. \end{aligned}$$

При дифференцировании мы считали плазменную частоту и частоту столкновений не зависящими от времени (т.е. релаксацию в (28) считаем более быстрой). В сильном поле, однако, их удобно считать функциями квадрата амплитуды поля. Тогда медленная зависимость от времени в них присутствует. Очевидно, вводя такую зависимость в (3), можно получить более сложные уравнения. Далее пишем $E_x(z, t) = E_s(z, t) \sin(\omega_0 t) + E_c(z, t) \cos(\omega_0 t)$. Считая $E_s(z, t)$ и $E_c(z, t)$ медленными функциями времени, усредненный за период квадрата поля получаем в виде $\tilde{E}^2(z, t) = (E_s^2(z, t) + E_c^2(z, t)) / 2$. Вводим функцию $\omega_p^2 = \Omega(\tilde{E}^2(z, t))$, связанную с изменением концентрации. Теперь $\partial_t J_x(z, t) = \varepsilon_0 \Omega(\tilde{E}^2(z, t)) E_x(z, t) - \zeta(E_s(z, t), E_c(z, t))$. Если диссипация слабая, то интегралом в (28) можно пренебречь, $\partial_t J_x(z, t) = \varepsilon_0 \Omega(\tilde{E}^2(z, t)) E_x(z, t)$, и тогда имеем уравнение

$$(\partial_z^2 - c^{-2} \partial_t^2) E_x(z, t) = \tilde{n}^2 \Omega(\tilde{E}^2(z, t)) E_x(z, t). \quad (29)$$

Его правая часть определяет источники поля дифракции, поэтому

$$E_x(z, t) = E_{0x}(z, t) - \frac{1}{2c^2} \int_0^t \int_0^d \chi\left(t-t' - \frac{|z-z'|}{c}\right) \Omega(\tilde{E}^2(z', t')) E_x(z', t') dz' dt'. \quad (30)$$

Здесь мы использовали функцию Грина уравнения (26): $G(z, t) = -\chi(t - |z|/c) / 2$. Используя метод медленно меняющихся амплитуд, вычислим интеграл в (28). Имеем

$$\zeta(E_s, E_c) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \omega_c \frac{(\omega_0 E_s(z, t) - \omega_c E_c(z, t)) [\exp(-\omega_c t) - \cos(\omega_0 t)] + (\omega_0 E_c(z, t) + \omega_c E_s(z, t)) \sin(\omega_0 t)}{\omega_c^2 + \omega_0^2}.$$

Считая частоту столкновений малой, получаем:

$$\zeta(E_s, E_c) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \omega_c \frac{E_s(z, t) [1 - \cos(\omega_0 t)] + E_c(z, t) \sin(\omega_0 t)}{\omega_0}.$$



При вычислении мы выносили из-под интеграла текущие значения амплитуд (в момент t), для которых экспоненциальный множитель максимален. Таким образом, задача сводится к решению ИУ (30) на отыскание амплитуд E_s и E_c с возможной поправкой (31).

Рассмотрим второй подход, считая (26) микроскопическим уравнением. Найдем плотность тока, входящую в правую часть для сильно нестационарной волны. Пишем уравнение движения электрона $\partial_t^2 x = -(e/m)E_x(z, t)$. Для его скорости получаем

$$v_x(z, t) = \partial_t x = -(e/m) \int_0^t E_x(z, t') dt'. \quad (32)$$

Энергия электрона, полученная за счет поля, принимает вид

$$E_e(z, t) = mv_x^2(z, t) / 2 = (e^2 / 2m) \left[\int_0^t E_x(z, t') dt' \right]^2. \quad (33)$$

В монохроматической волне эта энергия, усредненная за период, равна $\langle E_e(z, \omega) \rangle = m^{-1} (e|E(z)|/2)^2 / (\omega^2 + \omega_c^2)$ (см. [18, с. 334, 335]). Для плотности мощности можно записать $\partial_t W(z, t) = \partial_t [\varepsilon_0 E_x^2(z, t) + n_e E_e(z, t)]$, и для мгновенной плотности энергии имеем $W(z, t) = \varepsilon_0 E_x^2(z, t) + n_e E_e(z, t)$ [18]. Сильная ударная ионизация водородной (электрон-протонной) плазмы происходит, когда энергия электрона близка к энергии ионизации атома водорода $W_e = 13.6$ эВ, что дает оценку порога греющего поля для такой плазмы $\tilde{E} / \omega = 17.6$ В·с⁻⁶/м, и для частоты 0.5 МГц получаем напряженность поля $\tilde{E} = |E| = 55$ В/м. Потенциалы ионизации газов в ионосфере примерно такого же порядка. Более точный учет степени ионизации требует вычисления вероятностей ступенчатых многоэлектронных процессов возбуждения атомов, что представляет собой отдельную сложную задачу. Вместо решения кинетического уравнения, удобно использовать феноменологические формулы зависимости концентрации от энергии электронов, например,

$$n_e(z, t) = n_0 \exp(-E_e / W_e) + n_m [1 - \exp(-E_e / W_e)]. \quad (34)$$

Здесь n_m – концентрация при максимальной ионизации. Пусть $\partial_t n(z, t) = \omega_c \alpha \exp(E_e(z, t) / W_e)$, где параметр α характеризует ударную ионизацию. Тогда

$$n(z, t) = n_0 + \omega_c \alpha \int_0^t \exp(E_e(z, t') / W_e) dt'. \quad (35)$$

Рассмотрим решение с учетом столкновений:

$$\partial_t^2 x = -(e/m)E_x(z, t) - \omega_n v_x(z, t), \quad (36)$$

$$v_x(z, t) = -(e/m) \int_0^t E_x(z, t') dt' - \omega_c \int_0^t v_x(z, t') dt'. \quad (37)$$

Подставляя сюда скорость из (32) без учета столкновений, получаем:

$$v_x(z, t) = -(e/m) \int_0^t E_x(z, t') dt' + (e\omega_n / m) \int_0^t \int_0^{t'} E_x(z, t'') dt'' dt'. \quad (38)$$

В результате выражение для энергии электронов с учетом столкновений примет вид

$$E_e(z, t) = (e^2 / 2m) \left[\int_0^t E_x(z, t') dt' - \omega_n \int_0^t \int_0^{t'} E_x(z, t'') dt'' dt' \right]^2. \quad (39)$$

Вычислив плотность заряда, можно найти плотность тока $J_x(z, t) = \rho(z, t)v_x(z, t)$ и величину $\mu_0 \partial_t J_x(z, t)$ в (26). Конечно, микроскопический подход более сложен и требует совместного решения уравнений Максвелла, кинетического уравнения, уравнений движения, уравнений ионизации и рекомбинации с учетом распределения электронов и ионов по энергиям, учетом ионной и электронной температур. Но и в рассмотренном случае, получив приближенное решение задачи, можно оценить интегралы в приведенных соотношениях, уточнить плотность тока и само решение. Заметим, что приведенные соотношения содержат предысторию процесса входа волны в слой.

Считая начальное распределение максвелловским, можно решить уравнение Власова и получить линейные и нелинейные отклики в виде плотности заряда и тока без учета процессов ионизации и рекомбинации. Однако такое нестационарное решение для слоя следует искать численно. В этом случае вполне можно учесть и интегралы столкновений, связанные с ионизацией и рекомбинацией. Однако численное определение $J_x(z, t)$ неудобно при интегрировании нестационарных уравнений типа (26), (27). Рассмотрим в качестве примера плазму с максвелловским распределением $f_M(\mathbf{v})$, возмущаемую плоской монохроматической волной $E_x = E_0 \cos(\omega t - k_z z) \exp(-k_z^2 z)$. Генерацией гармоник пренебрегаем. Пренебрегая также магнитным полем волны, считаем, что на электроны действует сила $F_x = -eE_x$. Имеем $f = f_M + \Delta f$, $\Delta f \approx \delta f E_x + \delta f^2 |E_x|^2$. Первое приближение в виде



отклика, пропорционального полю, ищем аналогично [18] в виде $\Delta f_1 = \delta f E_x$. Для него имеем

$$\Delta f_1(t, z) = \operatorname{Re} \frac{-eE_0 v_x \exp(-k''z)}{k_B T [i(\omega - k'_z v_z) - v_z k''_z]} f_M(\mathbf{v}, T).$$

Мы использовали комплексные амплитуды, поэтому следует взять реальную часть:

$$\Delta f_1(t, z, \mathbf{v}) = \frac{l(v_x, v_x, z) e E_0 \exp(-k''_z z)}{k_B T} f_M(\mathbf{v}, T).$$

$$\Delta f_2(t, z, \mathbf{v}) = \frac{leE_0 \exp(-k''_z z)}{k_B T} \left[1 + \frac{leE_0 \exp(-k''_z z)}{k_B T} - l^2 k''_z \frac{eE_0 \exp(-k''_z z)}{mv_x^2} \right] f_M(\mathbf{v}, T).$$

Поскольку $\tilde{E}^2(z) = E_0^2 \exp(-2k''_z z)/2$, то

$$n = n_0 \left[1 + \sqrt{2} le \tilde{E} / (k_B T) + 2(le \tilde{E})^2 / (k_B T)^2 (1 - lk''_z k_B T / mv_x^2) \right].$$

Поле дифракции синусоидальной волны с резким фронтом на слое найдем с помощью функции Грина $G(z, t) = -g(z, t) = -\chi(t - |z|/c)/2$. Функция g , отличающаяся от G знаком, удовлет-

воряет уравнению $(\partial_z^2 - c^{-2} \partial_t^2)g(z, t) = -\delta(z)\delta(t)$. Знак минус традиционно вводится в электродинамике, поскольку g определяет вектор-потенциал из уравнения (27), в которое J_x входит со знаком «минус». Таким образом,

$$l(v_x, v_x, z) = \frac{v_x v_z k''_z}{[(\omega - k'_z v_z)^2 + (v_z k''_z)^2]}.$$

Второе приближение определим из условия, что $\partial f / \partial v_x$ находится из первого приближения, т.е. что $\partial f / \partial v_x = -mv_x f_M / (k_B T) + \partial(\Delta f_1) / \partial v_x$. Вычисления дают

$$A_x(z, t) = E_0 (\mu_0 \omega)^{-1} \chi(t - z/c) \cos(\omega(t - z/c)) + \int_0^t \int_0^d g(z - z', t - t') J_x(z', t') dz' dt'.$$

Из него находим поле $E_x(z, t) = -\mu_0 \partial_t A_x(z, t)$:

$$E_x(z, t) = E_0 \chi(t - z/c) \sin(\omega(t - z/c)) + \mu_0 \partial_t \int_0^t \int_0^d G(z - z', t - t') J_x(z', t') dz' dt'.$$

С другой стороны, из (26) следует

$$E_x(z, t) = E_0 \chi(t - z/c) \sin(\omega(t - z/c)) + \mu_0 \int_0^t \int_0^d G(z - z', t - t') \partial_t J_x(z', t') dz' dt'. \quad (40)$$

Это ИДУ можно переписать в виде ИУ, продифференцировав по частям:

$$\int_0^t g(z - z', t - t') \partial_t J_x(z', t') dt' = g(z - z', 0) J_x(z', t) - g(z - z', t) J_x(z', 0) + \int_0^t \delta(t - t' - |z - z'|/c) J_x(z', t') dt' = J_x(z', t - |z - z'|/c).$$

Здесь $J_x(z', 0) = 0$, $g(z - z', 0) = 0$, поэтому

$$E_x(z, t) = E_0 \chi(t - z/c) \sin(\omega(t - z/c)) + \mu_0 \int_0^t J_x(z', t - |z - z'|/c) dz'. \quad (41)$$

Видим, что поле определяется через запаздывающую плотность тока. Вид этого уравнения одинаков для линейных и нелинейных задач. Для нелинейных сред эта плотность

тока интегрально и нелинейно зависит от поля, определяя нелинейное ИУ.

Рассмотрим линейный случай. Для него в силу соотношения

$$D_x(z, t) = \varepsilon_0 E_x(z, t) + \varepsilon_0 \omega_p^2 \omega_c^{-1} \int_0^t [1 - \exp(-\omega_c(t - t'))] E_x(z, t') dt'$$

имеем связь плотности тока с полем

$$J_x(z, t) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \int_0^t \exp(-\omega_c(t - t')) E_x(z, t') dt'. \quad (42)$$



Она интегральная и характеризует динамическую проводимость плазмы. В случае неоднородной

плазмы имеем зависимости $\omega_p^2(z)$, $\omega_c(z)$ и получаем ИУ

$$E_x(z, t) = E_0 \chi\left(t - \frac{z}{c}\right) \sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) + \int_0^d \int_0^{\frac{|z-z'|}{c}} \exp\left(-\omega_c(z')\left(t-t' - \frac{|z-z'|}{c}\right)\right) k_p^2(z') E_x(z', t') dt' dz'. \quad (43)$$

Здесь введено плазменное волновое число $k_p(z) = \omega_p(z)/c$. Внутренний интеграл следует полагать нулю для $t' > t - |z - z'|/c$. Это ИУ упрощается, если $\omega_c = 0$. Если диссипация бесконечно сильная $\omega_c \rightarrow \infty$, то интеграл в (43) исчезает. Это соответствует тому, что $\varepsilon(\omega) = 1$. В данном случае бесконечно сильного трения электроны не ускоряются полем, и поляризация не возникает. В нелинейном случае в каждый момент поле создает некий профиль поляризации, которую опишем зависимостями $k_p(z)$ и $\omega_c(z)$, поэтому нелинейному решению соответствует линейное решение (43). Это позволяет использовать довольно простой метод решения нелинейных задач. Сначала решаем линейную задачу. В каждый момент времени пересчитываем профили $k_p(z)$ и $\omega_c(z)$. Затем снова решаем линейную задачу, и так далее до сходимости. Можно использовать и итерационные решения для уравнения (43) с пересчетом профилей на каждой итерации. Такое моделирование занимает много времени, поскольку итерации следует выполнять для каждого момента времени. Для усреднения удобно представлять поля через амплитуды в виде $E_s(z, t)$ и $E_c(z, t)$.

Уравнение (43) проще всего решить с использованием квадратур. Именно, отрезок $(0, d)$ разбиваем точками $z_m = \Delta z / 2 + (m-1)\Delta z$, $\Delta z = d/M$, $m = 1, 2, \dots, M$. Область $(0, t)$ разбиваем моментами $t_n = \Delta t / 2 + (n-1)\Delta t$, $\Delta t = \Delta z/c$, $n = 1, 2, \dots, N$, т.е. шаг по времени согласуем с шагом по координате. Такая дискретизация определяет массив поля $E_{(mn)} = E_x(z_m, t_n)$, массив свободных членов $B_{(mn)} = E_0 \chi(t_n - z_m/c) \sin(\omega(t_n - z_m/c))$ и матрицу с элементами $A_{(mn), (m'n')}$. Вводя мультииндекс $l = (m, n)$, уравнение (43) перепишем в матричной форме $E = B + \hat{A}E$, или

$$E_l = B_l + \sum_{n'=1, m'=1}^{n' \leq n-1, m' \leq m-1} A_{l, l'} E_{l'}. \quad (44)$$

В случае использования квадратурного представления поля $E_{(mn)} = E_s(z_m, t_n) \sin(\omega_0 t_n) + E_c(z_m, t_n) \cos(\omega_0 t_n)$, т.е. структура матрицы немного усложняется.

Здесь задача решается многократно каждый раз с увеличением N . Для $N < M$ число внутренних точек, где ищется поле, равно N . При $N = M$ поле займет всю внутреннюю область слоя. Дальнейшее увеличение N дает временную динамику при $t > d/c$. Если найдены значения поля из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (44), то по формуле (43) можно вычислить поле в любой другой точке вне слоя. Мы решаем СЛАУ (44) и ищем поле в точке $z = d$, увеличивая последовательно число временных точек: $N = M, M+1, M+2, \dots, M+K$. Размерность такой СЛАУ на шаге K равна $L = M(M+L)$, а сама СЛАУ (44) может быть записана в виде

$$E_{(mn)} = B_{(mn)} + k_p^2 \Delta z \Delta t \sum_{m'=1}^M \sum_{n'=1}^{n-|m-m'|} \exp(-\omega_c \Delta t (n-n' - |m-m'|)) E_{(n'm')}.$$

На рис. 1, 2 приведены результаты решения ИУ (43) для поля в точке $z = d$ в слое газовой плазмы $d = 3000$ м. Было взято $M = 180$. Отметим, что вклад в поле в некоторой точке (в частности, $z = d$) имеет место только от тех точек, из которых возмущение успевает дойти до нее со скоростью света. Поэтому до момента $t = d/c$ в крайней точке слоя возмущение отсутствует. Затем проявляется слабое возмущение от ближайших точек, куда поле уже дошло (это высокочастотная часть ВП), и только со временем устанавливается периодический процесс. Там же приведены импульсы, законченные на входе в момент $t = d/c$. Прошедшее поле меньше падающего, поскольку имеет место режим туннелирования.

Нелинейное туннелирование приводит к большему ослаблению и к большей задержке основной части сигнала. При $\omega_0 \ll \omega_p$ сильная волна входит в слой чрезвычайно ослабленной из-за отражения, поэтому нелинейность проявляется в тонком слое на входе и процесс дальнейшего туннелирования почти линейный. Это особенно относится к широкому слою. Прекращение импульса на входе приводит к появлению на выходе предвестника, основной части импульса и его

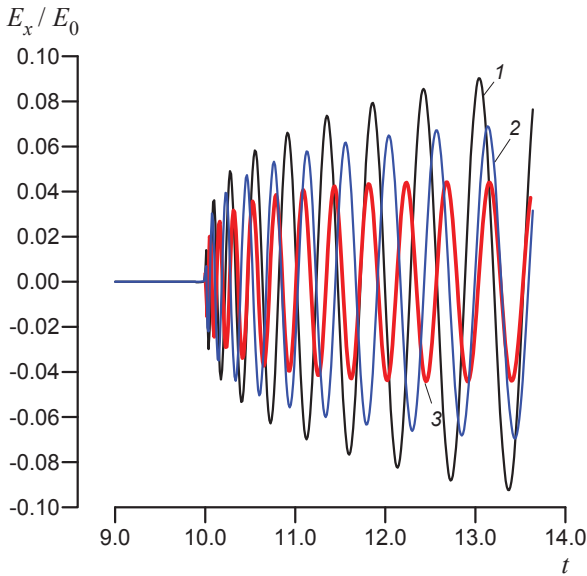


Рис. 1. Нормированное электрическое поле на выходе плазменного слоя $d = 3000$ м в зависимости от времени (c^{-6}) при $\omega_0 = \omega_p = 6.28$ МГц при разных значениях амплитуды, В/м: $E_0 = 1$ (кривая 1), $E_0 = 30$ (2), $E_0 = 55$ (3)
 Fig. 1. Normalized electric field at the output of the plasma layer $d = 3000$ m depending on time (s^{-6}) at $\omega_0 = \omega_p = 6.28$ MHz at different values of the amplitude (V/m): $E_0 = 1$ (curve 1), $E_0 = 30$ (2), $E_0 = 55$ (3)

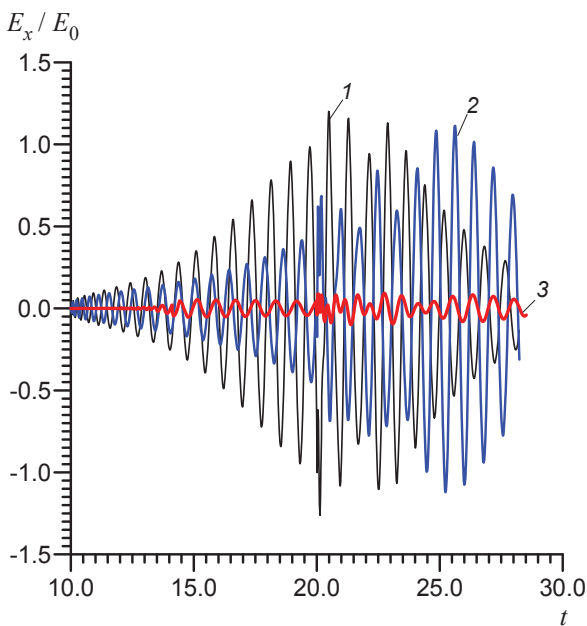


Рис. 2. Нормированное электрическое поле на выходе плазменного слоя $d = 3000$ м в зависимости от времени (c^{-6}) при разных значениях частоты (МГц) и амплитуды (В/м). Кривая 1 – $\omega_0 = 8$, $E_0 = 1$; кривая 2 – $\omega_0 = 8$, $E_0 = 55$; кривая 3 – $\omega_0 = 5$, $E_0 = 55$. $\omega_p = 6.28$, $\omega_c = 0.006$
 Fig. 2. Normalized electric field at the output of the plasma layer $d = 3000$ m depending on time (c^{-6}) at different values of the frequency (MHz) and the amplitude (V/m). Curve 1 – $\omega_0 = 8$, $E_0 = 1$; curve 2 – $\omega_0 = 8$, $E_0 = 55$; curve 3 – $\omega_0 = 5$, $E_0 = 55$. $\omega_p = 6.28$, $\omega_c = 0.006$

хвоста (см. рис. 2 – показано начало хвоста). Для учета нелинейности после решения СЛАУ выполнялся пересчет $\omega_p(z)$ с итерацией. Использовано три итерации. Взят параметр нелинейности $\alpha = 0.008$ м/В, при котором в поле волны $E_0 = 55$ В/м концентрация возрастает на 5%.

На рис. 3, 4 представлены решения уравнений (19), (20) для газовой плазмы. Уравнение (19) решалось в пренебрежении третьей гармоникой, при этом использовалась аппроксимация $\varphi_1(z) = -k_0 \sqrt{\varepsilon(z)} z$. Для нахождения решения как нулевое приближение использовалось линейное решение, а затем применялись итерации. ДП вычислялась на основе предыдущего итерационного решения. Интеграл в (19) вычислялся по квадратурной формуле средних, а нелинейная система уравнений получалась на основе метода коллокаций. Также вычислялась величина $\varphi_3(z) = -3k_0 \sqrt{\varepsilon(z)} z$, с использованием которой итерационно вычислялась величина δ_0^2 , пропорциональная квадрату третьей гармоники. Для рис. 1, 2 взяты следующие параметры: $\omega_p = 6.28 \cdot 10^6$ Гц, $\omega_c = 6.28 \cdot 10^2$ Гц, $d = 3000$ м. Время прохождения слоя со скоростью света $\tau = d/c = 10$ мкс, время переноса энергии в линейном случае при $\omega_0 = \omega_p / 2$ равно $\tau_E = 3.01 \cdot 10^{-4}$ с. Рассмотренный слой имеет прозрачность $|T|^2 = 8.6 \cdot 10^{-4}$. Расчеты показывают, что переходный процесс примерно устанавливается за время τ_E . Движение импульса как целого можно характеризовать усредненной по спектрально плотности мощности энергетической скоростью [27]. Расчет переходного процесса за достаточно толстым слоем требует решения СЛАУ очень высоких порядков, поскольку растет размерность задачи, а время туннелирования возрастает экспоненциально с толщиной. Для рис. 3, 4 использовались параметры плазменного слоя как для рис. 1, но с длиной 600 м. Для частоты $\omega = 3.14 \cdot 10^6$ Гц в линейном приближении $\varepsilon' = -1.773$, $\varepsilon'' = 0.0046$. При распространении поле в слое больше, что способствует росту генерации третьей гармоники. Она эффективно генерируется тонким слоем, поскольку поле в нем более сильное.

4. Стационарное и квазистационарное туннелирование

Стационарное туннелирование монохроматической волны предполагает, что ее частота лежит ниже плазменной частоты. Волна в слое увеличивает плазменную частоту, что делает слой принципиально неоднородным и еще менее

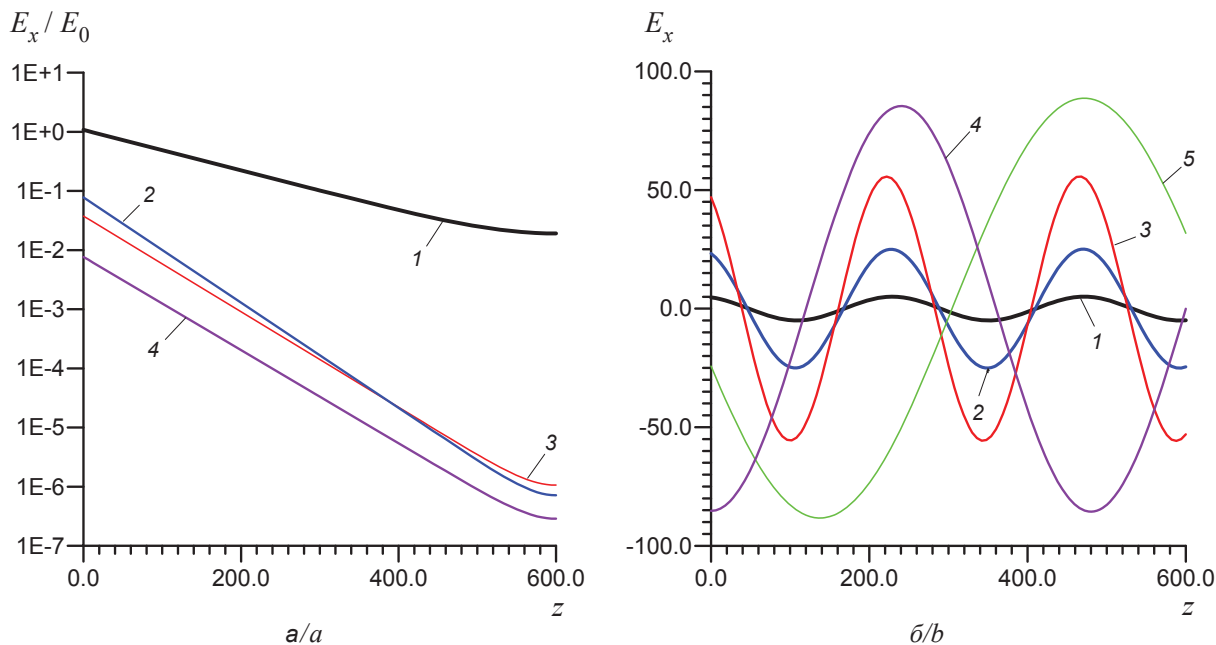


Рис. 3. Распределение нормированного электрического поля в зависимости от длины z (м) в плазменном слое $d = 600$ м и $\omega_p = 6.28$ при туннелировании (а) и распределение E_x (В/м) при распространении (б) при разных амплитудах: а – $\omega_0 = 3$, $E_0 = 5$ (кривая 1); $\omega_0 = 3$, $E_0 = 25$ (2); $\omega_0 = 3$, $E_0 = 55$ (3); $\omega_0 = 6$, $E_0 = 55$ (4); б – $\omega_0 = 10$, $E_0 = 5$ (кривая 1); $\omega_0 = 10$, $E_0 = 25$ (2); $\omega_0 = 10$, $E_0 = 55$ (3); $\omega_0 = 7.5$, $E_0 = 75$ (4); $\omega_0 = 7$, $E_0 = 75$ (5). Частоты, МГц, напряженность поля, В/м
 Fig. 3. Distribution of the normalized electric field depending on the length z (m) in the plasma layer $d = 600$ m and $\omega_p = 6.28$ during tunneling (a), and distribution E_x (V/m) during propagation (b) at different amplitudes (V/m). Figure a: $\omega_0 = 3$, $E_0 = 5$ (curve 1); $\omega_0 = 3$, $E_0 = 25$ (2); $\omega_0 = 3$, $E_0 = 55$ (3); $\omega_0 = 6$, $E_0 = 55$ (4). Figure b: $\omega_0 = 10$, $E_0 = 5$ (curve 1); $\omega_0 = 10$, $E_0 = 25$ (2); $\omega_0 = 10$, $E_0 = 55$ (3); $\omega_0 = 7.5$, $E_0 = 75$ (4); $\omega_0 = 7$, $E_0 = 75$ (5). Frequencies MHz, field strength, V/m

прозрачным. Туннелирующая волна затухает, поэтому плазменная частота максимальна у границы с падающей волной, и при толстом слое выходит у другой границы на значение для слабой волны. Если частота немного выше плазменной, на начальном участке идет распространение, сменяемое туннелированием, которое затем может смениться участком распространения.

В работах [28,29] аналитически решена линейная задача дифракции на слое диэлектрика, в частности плазмы. Используя метод сшивания полей и концепцию Умова для скорости энергии $v_E(z, \omega) = S_z(z) / W(z)$ в слое плазмы при $\omega < \omega_p$, получим формулу:

$$v_E(z, \omega) = \frac{2c(\omega_p^2 / \omega^2 - 1)}{(\omega_p^4 / \omega^4) \cosh(2k''z) + (\omega_p^2 / \omega^2 - 2)}. \quad (45)$$

В ней $k'' = k_0 \sqrt{|\varepsilon''|}$, $\tilde{z} = z - d$. В общем случае для плазмы с ДП $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ с учетом столкновений имеем постоянную распространения

$$k = k_0 \sqrt{\varepsilon' - i\varepsilon''} = k' - ik'',$$

где

$$k' = k_0 \left[\left(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon' \right) / 2 \right]^{1/2},$$

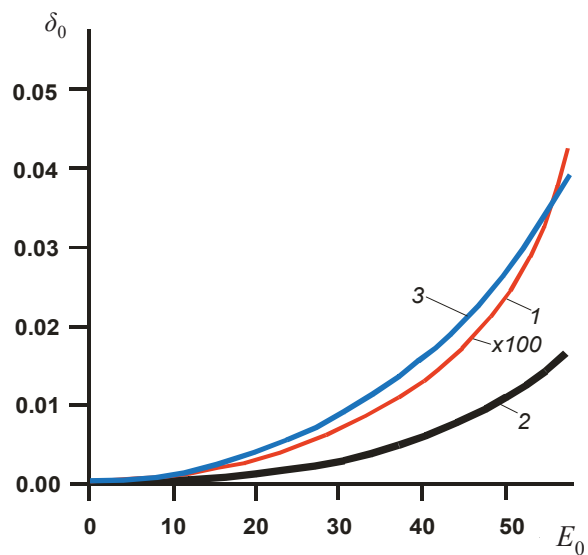


Рис. 4. Коэффициент генерации третьей гармоники δ_0 для слоя $d = 600$ м в зависимости от амплитуды E_0 волны: $\omega_p = 1.6 \cdot 10^6$ (кривая 1), $\omega_p = 3.14 \cdot 10^6$ (2), $\omega_p = 10^7$ (3), $\omega_0 = 3.14 \cdot 10^7$ (частоты, Гц)

Fig. 4. Third harmonic generation coefficient δ_0 for the layer $d = 600$ m depending on the wave amplitude E_0 : $\omega_p = 1.6 \cdot 10^6$ (curve 1), $\omega_p = 3.14 \cdot 10^6$ (2), $\omega_p = 10^7$ (3), $\omega_0 = 3.14 \cdot 10^7$ (frequencies, Hz)



$$k'' = k_0 \left[\left(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon' \right) / 2 \right]^{1/2}$$

и коэффициент замедления $n = k/k_0 = n' - in''$. Однако (45) получено при $\varepsilon'' = 0$, $\varepsilon' < 0$, т.е. при $k' = 0$ и $k'' = k_0 \sqrt{|\varepsilon'|}$. Для времени переноса энергии через однородный слой легко вычисляется интеграл

$$\tau_E = \int_0^d \frac{dz}{v_E(\omega)} = \tau \frac{(\omega_p^4 / \omega^4) \sinh(2k''d) / (2k''d) + (\omega_p^2 / \omega^2 - 2)}{2(\omega_p^2 / \omega^2 - 1)}, \quad (46)$$

в котором $\tau = d/c$. При стремлении частоты к плазменной или к нулевой это время стремится к бесконечности. Для толстого слоя оно экспоненциально большое. Для предельно тонкого слоя $\tau_E = \tau [(\omega_p^2 / \omega^2 - 1) + 3] / 2$. Во всех случаях $\tau_E > \tau$, причем обычно $\tau_E \gg \tau$. Формулы (45), (46) применимы в линейном случае без диссипации. В нелинейном случае ω_p^2 зависит от амплитуды и уменьшается с ростом координаты z , что вполне можно учесть при вычислении (46), если рассчитать распределение амплитуды. Однако в силу почти экспоненциального затухания при туннелировании для толстого слоя ($k''d > 1$) результат практически совпадает с (46). Существенная нелинейная зависимость

времени туннелирования (46) от амплитуды появляется у тонкого слоя $k''d \ll 1$. Для рассмотрения нелинейных свойств в толстом слое следует анализировать случай распространения с затуханием. При распространении $\omega > \omega_p$ имеем $v_E = 2c\varepsilon / [\varepsilon + 1 - (\varepsilon - 1)^2 \cos(2kz)]$ [28]. Эта формула также получена при пренебрежении диссипацией. Рассматривая поля в пластине

$$E_x(z) = A^+ \exp(-ik'z) \exp(-k''z) + A^- \exp(ik'z) \exp(k''z),$$

$$H_y(z) =$$

$$= c\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon} [A^+ \exp(-ik'z) \exp(-k''z) - A^- \exp(ik'z) \exp(k''z)],$$

получим выражение для $v_E(z)$, вычисляя вектор Пойнтинга $S_z(z) = \text{Re}(E_x H_y^*) / 2$ и плотность энергии $W = W_E + W_H$. Для нее $W_E = \varepsilon_0 (2 - \varepsilon') |E_x|^2 / 4$, $W_H = \mu_0 |H_y|^2 / 4$. Если пренебречь малой амплитудой A^- (что обычно делают в ВКБ приближении), то получим результат $v_E = cn' / (1 + n''^2)$. Он такой же, как в безграничной плазме, поэтому учет отраженной волны необходим. Обозначая $\kappa^\pm = |\kappa^\pm| \exp(i\varphi^\pm) = (1 \pm 1/\sqrt{\varepsilon}) / 2$, $\Delta\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ и учитывая, что $A^\pm = T \exp(\pm ikd) (1 \pm 1/\sqrt{\varepsilon}) / 2$, $T = (\cos(kd) + i\kappa \sin(kd))^{-1}$, где $\kappa = (\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1/2}) / 2$, найдем:

$$S_z = c\varepsilon_0 |T|^2 \left\{ n' \left(|\kappa^+|^2 \exp(-2k''z) - |\kappa^-|^2 \exp(2k''z) \right) - 2n'' |\kappa^+| |\kappa^-| \sin(2kz - \Delta\varphi) \right\} / 2,$$

$$W_E = \varepsilon_0 (2 - \varepsilon') |T|^2 \left[|\kappa^+|^2 \exp(-2k''z) + 2|\kappa^+| |\kappa^-| \cos(2kz - \Delta\varphi) + |\kappa^-|^2 \exp(2k''z) \right] / 4,$$

$$W_H = \varepsilon_0 |\varepsilon| |T|^2 \left[|\kappa^+|^2 \exp(-2k''z) - 2|\kappa^+| |\kappa^-| \cos(2kz - \Delta\varphi) + |\kappa^-|^2 \exp(2k''z) \right] / 4,$$

а для скорости движения энергии получим

$$v_E = \frac{2c \left\{ n' \left(|\kappa^+|^2 \exp(-2k''z) - |\kappa^-|^2 \exp(2k''z) \right) - 2n'' |\kappa^+| |\kappa^-| \sin(2kz - \Delta\varphi) \right\}}{\left(|\kappa^+|^2 \exp(-2k''z) + |\kappa^-|^2 \exp(2k''z) \right) (2 - \varepsilon' + |\varepsilon|) + 2(2 - \varepsilon' - |\varepsilon|) |\kappa^+| |\kappa^-| \cos(2kz - \Delta\varphi)}.$$

В случае туннелирования без диссипации $|\kappa^+ = \kappa^-|$, $\varphi^+ = -\varphi^-$, $k' = 0$, следует формула (45) с учетом того, что $\varphi^+ = \arctan(1/\sqrt{|\varepsilon|})$, $\sin(2\varphi^+) = 2|\varepsilon|^{-1/2} / (1 + 1/|\varepsilon|)$, $\cos(2\varphi^+) = (|\varepsilon| - 1) / (|\varepsilon| + 1)$, $n'' = \sqrt{|\varepsilon|}$. Для прозрачного слоя диэлектрика без дис-

персии $\varepsilon > 1$, и скорость не зависит от координаты: $v_E = 2c / (\varepsilon + 1)$. Она меньше фазовой $v_E < v_p = c / \sqrt{\varepsilon}$.

Можно обобщить эти результаты для ДП Лоренца (1), если учесть, что усредненная плотность энергии есть [18]

$$W = \frac{\varepsilon_0 |E_x|^2}{4} \left[1 + \frac{\omega_p^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_c^2 \omega^2} + \sqrt{1 + \frac{\omega_p^4 + 2\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega_c \omega)^2}} \right].$$



В этой формуле мы выразили магнитную часть энергии как $W_H \mu_0 |H_y|^2 / 4 = \varepsilon_0 |\mathcal{E}||E_x|^2 / 4$ для ДП (1). В такой среде в сильных полях также существенны нелинейные свойства, особенно при наличии свободных зарядов, их генерации и рекомбинации, а динамика также усложняется из-за

$$E_x(z) = E_{0x} \exp(-ik_0 z) + k_0^2 \int_0^d G_\omega(z-z') (\varepsilon(z', \tilde{E}^2(z')) - 1) E_x(z') dz', \quad (47)$$

далее решаем его методом итераций с пересчетом зависимостей $\omega_p^2(z)$ и $\omega_c(z)$. При таком решении можно также плавно увеличивать параметр нелинейности, что позволяет получать высокую скорость сходимости итераций, поскольку всегда итерации находятся вблизи точного решения. На основе решения (47) можно оценивать поле третьей гармоники и при необходимости учитывать его при пересчете параметров $\omega_p^2(z)$ и $\omega_c(z)$.

На рис. 5 сравниваются результаты нелинейного стационарного распространения с линейным (кривая 1), вычисляя время переноса энергии. Скорость энергии при уменьшении частоты падает, поскольку увеличивается колебательная энергия частиц, а перенос энергии осуществля-

ется только за счет электромагнитной ее части.

Линейное стационарное решение для плазмы удобно использовать как начальное приближение для получения нелинейного решения. Вычисляя на его основе величины $\omega_p(z)$ и $\omega_c(z)$, а затем подставляя их и поле в уравнение для основной гармоники

Ниже плазменной частоты туннелирование сильной волны через толстый слой экспоненциально уменьшает амплитуду к выходу, поэтому в основной части и на выходе толстого слоя скорость почти соответствует линейному случаю, а интегральное время практически равно времени линейного туннелирования. Скорость $v_E(z)$ зависит от координаты из-за отражений от второй границы. В нелинейном случае увеличивается коэффициент отражения от слоя, поэтому малая часть энергии волны проникает в глубокие области. Приповерхностный слой порядка глубины проникновения $c/\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ с измененной плазменной частотой в основном формирует коэффициент отражения, а в большей части толстого слоя обычно реализуется почти линейный режим.

Для спектрально узких ВП наиболее интересен случай $\omega_0 > \omega_p$, такой, что сильная волна повышает плазменную частоту примерно до несущей ω_0 , при этом низкочастотная часть ВП туннелирует, а высокочастотная – распространяется. При условии $\omega_0 \approx \omega_p$ затухание играет существенную роль. Рассмотрим случай $\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \omega_c^2}$. Для него $n' = n'' = \sqrt{\varepsilon''/2}$. Сильная волна затухает на достаточно большом участке слоя, постепенно переходя в линейный режим с малыми потерями, при этом нелинейные свойства проявляются существенно в замедлении переноса энергии (см. рис. 5). В линейном случае можно использовать спектральный подход, поэтому нестационарная задача может быть легко решена, если известен коэффициент прохождения $T(\omega)$. Прошедший ВП получается Фурье-обращением величины $T(\omega)E_x(\omega)$.

Заключение

Рассмотрена модель холодной плазмы без распределения электронов по энергиям, плазменная частота которой функционально зависит от усредненного квадрата поля. Получены новые

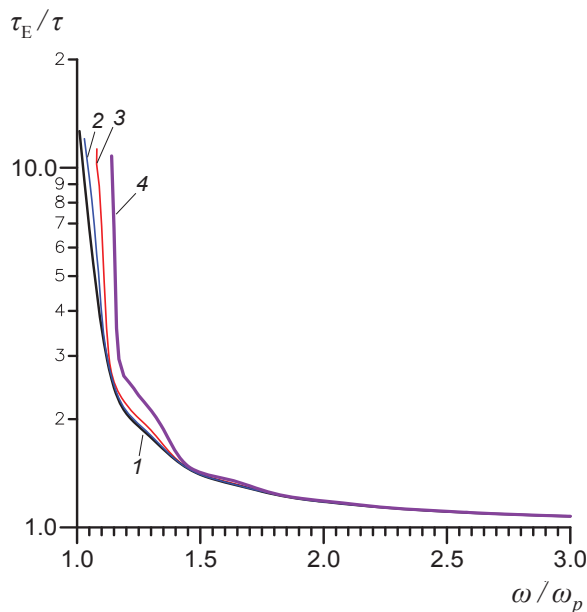


Рис. 5. Время переноса энергии через слой $d = 600$ м, нормированное к $\tau = c/d$, в зависимости от нормированной частоты при разных амплитудах, В/м: $E_0 = 1$ (кривая 1), 30 (2), 55 (3), 100 (4) (цвет online)

Fig. 5. Time of energy transfer through the layer $d = 600$ m, normalized to $\tau = c/d$, depending on the normalized frequency at different amplitudes (V/m): (curve 1), 30 (2), 55 (3), 100 (4) (color online)



нелинейные стационарные и нестационарные интегральные уравнения в форме Липпмана – Швингера, в том числе и стационарные уравнения для гармоник. Приведены результаты для нелинейных и линейных задач: расчеты полей, времен туннелирования через плазменный слой, генерации третьей гармоники. Динамика ЭМВ через нелинейную среду может быть определена интегрированием волнового уравнения, т.е. путем решения задач типа Коши с применением численных подходов типа неполного метода Галеркина и ряда других [25, 26], но полученные ИУ дают более эффективные и удобные методы решения. Они могут быть использованы при моделировании прохождения импульсов через ионосферную плазму и твердотельные структуры. Полученные уравнения применимы и к сильным широкополосным ВП.

Приведенные выше результаты опровергают так называемые теории «сверхсветового туннелирования», включая эффект Хартмана о насыщении времени туннелирования с ростом толщины d [27–31]. На самом деле этот эффект является легко объяснимым парадоксом [28]: фазовое время Бома – Вигнера, или время групповой задержки для ЭМВ и квазимонохроматических ВП можно использовать только для распространяющихся волн в структурах, где можно пренебречь отражениями, а диссипация слабая. В случае туннелирования при слабой диссипации k' и k'' меняются местами по сравнению с распространением, и групповая задержка неприменима. Туннелирование возможно и через фотонный кристалл со слабой диссипацией, если спектр попадает в зону нераспространения (bandgap). В формировании такой зоны участвуют береговые отражения, а структура работает как заграждающий фильтр. В полосе заграждения фильтра групповую задержку использовать нельзя: она может стать малой или даже отрицательной. Экспериментально такое туннелирование исследовалось в ряде работ, в частности, проводились эксперименты в Беркли (см., например, [32, 33]), где был использован двухфотонный распад фотона удвоенной частоты (или параметрическое преобразование с понижением частоты) в нелинейном кристалле с образованием двух ВП. Прошедший среду ВП интерферировал с базовым («родительским фотоном») в НОМ-интерферометре. Однако прошедший слой вещества ВП не являлся «исходным фотоном»: он взаимодействовал с веществом с образованием квазифотонов. Соответственно неприменимы интерференционные методы ре-

гистрации. Если структура нелинейная, ЭМВ изменяет запрещенную зону, увеличивая разнообразие эффектов для отраженной и прошедшей волн, что легко достижимо при использовании полупроводниковых слоев. Основным выводом для туннелирования можно сформулировать так: нелинейное туннелирование есть процесс более медленный, чем линейное, которое также идет с досветовой скоростью, при этом коэффициент нелинейного туннелирования падает.

Список литературы

1. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М.: Наука, 1975. 400 с.
2. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 719 с.
3. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Физматгиз, 1960. 552 с.
4. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Физматгиз, 1973. 272 с.
5. Гершман Б. Н. Динамика ионосферной плазмы. М.: Наука, 1974. 257 с.
6. Басс Ф. Г. Кинетическая теория распространения сильных электромагнитных волн в полупроводниках и в плазме // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1322–1341.
7. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г., Квимсадзе М. В. Распространение сильной электромагнитной волны в двухкомпонентной плазме // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, № 8. С. 632–342.
8. Sodha M. S., Kaw P. K. Third Harmonic of Current Density in a Plasma // Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 1402–1404. DOI: 10.1063/1.1761423
9. Jancel R. Analysis of non-linear wave phenomena in weakly dissipative plasmas // Acta Physic Academiae Scientiarum Hungaricae. 1976. Vol. 40, № 3. P. 177–209.
10. Каплан А. Е. Теория гистерезисного отражения и преломления света границей нелинейной среды // ЖЭТФ. 1977. Т. 72, № 5. С. 1710–1726.
11. Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронопуло Ю. Г. Нелинейная поляризуемость при резонансном взаимодействии электромагнитного поля с веществом // ЖЭТФ. 1971. Т. 59, № 3. С. 921–933.
12. Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронопуло Ю. Г. Особенности самовоздействия света в поглощающих средах и условия наблюдения самофокусировки, вызванной резонансным поглощением // ЖЭТФ. 1971. Т. 61, № 2. С. 520–533.
13. Каплан А. Е. Точная теория релаксации двухуровневых систем в сильном монохроматическом поле // ЖЭТФ. 1973. Т. 65, № 4. С. 1416–1430.
14. Каплан А. Е. Динамика двухуровневой системы в сильном резонансном поле с переменной частотой и амплитудой // ЖЭТФ. 1975. Т. 68, № 3. С. 823–833.



15. Каплан А. Е. Двухуровневая система в поле мощного импульса произвольной длительности // Квантовая электроника. 1976. Т. 3, № 6. С. 1342–1344.
16. Козлов С. А., Сазонов С. В. Нелинейное распространение импульсов длительностью в несколько колебаний светового поля в диэлектрических средах // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 2. С. 404–418.
17. Келдыш Л. В. Диаграммная техника для неравновесных процессов // ЖЭТФ. 1964. Т. 47, № 10. С. 1515–1527.
18. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А. Электромагнетизм и электромагнитные волны. М. : Высшая школа, 1985. 504 с.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М. : Наука, 1982. 620 с.
20. Давидович М. В. О плотности электромагнитной энергии и ее скорости в среде с аномальной положительной дисперсией // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 22. С. 53–63.
21. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. М. : Наука, 1971. 408 с.
22. Халфин Л. А. Квантовая теория рассеяния волновых пакетов, принцип причинности и сверхсветовое туннелирование // УФН. 1996. Т. 166, № 6. С. 688–690.
23. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М. : Наука, 1983. 288 с.
24. Стрелков Г. М. Сложный радиосигнал в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 9. С. 1034–1043.
25. Давидович М. В., Стефюк Ю. В. Нелинейное прохождение электромагнитной волны через слой с квадратичной и дробно-полиномиальной зависимостями диэлектрической проницаемости // Известия вузов. ПНД. 2010. Т. 18, № 3. С. 160–177.
26. Давидович М. В., Алексутова С. В., Шилин И. В., Борисов В. С. Дифракция плоской электромагнитной волны на нелинейном диэлектрическом слое // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 32–40.
27. Давидович М. В. О парадоксе Хартмана, туннелировании электромагнитных волн и сверхсветовых скоростях (отклик на статью Шварцбурга А. Б. «Туннелирование электромагнитных волн – парадоксы и перспективы») // УФН. 2009. Т. 179, № 4. С. 443–446. DOI: 10.3367/UFN.0179.2009040.0443
28. Давидович М. В. О временах и скоростях нестационарного квантового и электромагнитного туннелирования // ЖЭТФ. 2020. Т. 157, № 1. С. 44–62. DOI: 10.31857/S0044451020010058
29. Давидович М. В. Скорость переноса энергии плоской монохроматической электромагнитной волной через слой вещества // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2020. Т. 24, № 1. С. 22–40.
30. Hartman T. E. Tunneling of a Wave Packet // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33, № 12. P. 3427–3433. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1702424>
31. Шварцбург А. Б. Туннелирование электромагнитных волн – парадоксы и перспективы // УФН. 2007. Т. 177, № 1. С. 43–58.
32. Steinberg A. M. Conditional probabilities in quantum theory and the tunneling-time controversy // Phys. Rev. 1995. Vol. A52, № 1. P. 32–42. DOI: 10.1103/PhysRevA.52.32
33. Chiao R. Y., Kozhekin A. E., Kurizki G. Tachyonlike excitations in inverted two-level media // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. P. 1254–1257.

References

1. Bass F. G., Gurevich Yu. G. *Goryachie elektrony i sil'nye elektromagnitnye volny v plazme poluprovodnikov i gazovogo razryada* [Hot electrons and strong electromagnetic waves in the plasma of semiconductors and gas discharge]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 400 p. (in Russian).
2. Akhiezer A. I., Akhiezer I. A., Polovin R. V., Sitenko A. G., Stepanov K. N. *Elektrodinamika plazmy* [Electrodynamics of Plasma]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 719 p. (in Russian).
3. Ginzburg V. L. *Rasprostraneniye elektromagnitnykh voln v plazme* [Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 552 p. (in Russian).
4. Gurevich A. V., Shvartsburg A. B. *Nelineinaya teoriya rasprostraneniya radiovoln v ionosfere* [Nonlinear Theory of Radio Wave Propagation in the Ionosphere]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1973. 272 p. (in Russian).
5. Gershman B. N. *Dinamika ionosfernoi plazmy* [Dynamics of Ionospheric Plasma]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 257 p. (in Russian).
6. Bass F. G. Kinetic theory of propagation of strong electromagnetic waves in semiconductors and in plasma. *Sov. Phys. JETP*, 1965, vol. 20, no. 4, pp. 894–905.
7. Bass F. G., Gurevich Yu. G., Kvimsadze M. V. Propagation of strong electromagnetic waves in a two-component plasma. *Sov. Phys. JETP*, 1971, vol. 33, no. 8, pp. 343–348.
8. Sodha M. S., Kaw P. K. Third Harmonic of Current Density in a Plasma. *Phys. Fluids*, 1965, vol. 8, pp. 1402–1404. DOI: 10.1063/1.1761423
9. Jancel R. Analysis of non-linear wave phenomena in weakly dissipative plasmas. *Acta Physic Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1976, vol. 40, no. 3, pp. 177–209.
10. Kaplan A. E. Theory of hysteresis reflection and refraction of light by a boundary of a nonlinear medium. *JETP*, 1977, vol. 45, no. 5, pp. 896–905.
11. Butylkin V. S., Kaplan A. E., Khronopulo Yu. G. Non-linear Polarizability in Resonant Interactions of an Electromagnetic Field with Matter. *Sov. Phys. JETP*, 1971, vol. 32, no. 3, pp. 501–507.
12. Butylkin V. S., Kaplan A. E., Khronopulo Yu. G. Some Features of Self-action of Light in Absorbing Media and Conditions for Observing Self-focusing Due to Resonant Absorption. *Sov. Phys. JETP*, 1972, vol. 34, no. 2, pp. 276–283.
13. Каплан А. Е. Exact theory of relaxation of two-level systems in a strong nonmonochromatic field. *Sov. Phys. JETP*, 1974, vol. 38, no. 4, pp. 705–711.
14. Kaplan A. E. Dynamics of a two-level system in a strong resonant field with variable frequency and amplitude. *Sov. Phys. JETP*, 1975, vol. 41, no. 3, pp. 409–413.



15. Каплан А. Е. Two-level system in the field of a high-power pulse of arbitrary duration. *Sov. J. Quantum Electron.*, 1976, vol. 6, no. 6, pp. 728–730.
16. Kozlov S. A., Sazonov S. V. Nonlinear propagation of optical pulses of a few oscillations duration in dielectric media. *JETP*, 1997, vol. 84, no. 2, pp. 221–228. DOI: 10.1134/1.558109
17. Keldysh L. V. Diagram Technique for Nonequilibrium Processes. *Sov. Phys. JETP*, 1965, vol. 20, no. 4, pp. 1018–1023.
18. Akhiezer A. I., Akhiezer I. A. *Electromagnetizm i elektromagnitnye vilny* [Electromagnetism and Electromagnetic Waves]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1985. 504 p. (in Russian).
19. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford, UK, Pergamon Press, 1960. 417 p.
20. Davidovich M. V. On the Electromagnetic Energy Density and Energy Transfer Rate in a Medium with Dispersion due to Conduction. *Technical Physics*, 2010, vol. 55, no. 5, pp. 630–635. DOI: 10.1134/S1063784210050063
21. Khurgin Ya. I., Yakovlev V. P. *Finitnye funkzii v fizike i tekhnike* [Finite Functions in Physics and Technics]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 408 p. (in Russian).
22. Khalfin L. A. The quantum theory of wave packet scattering, the causality principle, and superlight tunneling. *Phys. Usp.*, 1996, vol. 39, no. 6, pp. 639–642.
23. Vainstein L. A., Wakman D. E. *Razdelenie chastot v teorii kolebanii i voln* [Frequency Division in the Theory of Vibrations and Waves]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 288 p. (in Russian).
24. Strelkov G. M. A complex radio signal in ionospheric plasma. *J. Comm. Tech. Electron.*, 2008, vol. 53, no. 9, pp. 1034–1043.
25. Davidovich M. V., Stefyuk Yu. V. Nonlinear passage of an electromagnetic wave through a layer with quadratic and fractional-polynomial dependences of permittivity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2010, vol. 18, no. 3, pp. 160–177.
26. Davidovich M. V., Aleksutova S. V., Shilin I. V., Borisov V. S. Diffraction of Flat Electromagnetic Wave on Non-Linear Dielectric Slab. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser: Physics*, 2007, vol. 7, iss. 1, pp. 32–40 (in Russian).
27. Davidovich M. V. On the Hartman paradox, electromagnetic wave tunneling and supraluminal velocities (comment on the paper “Tunneling of electromagnetic waves: paradoxes and prospects” by A. B. Shvartsburg). *Phys. Uspekhi*, 2009, vol. 52, no. 4, pp. 415–418. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200904o.0443
28. Davidovich M. V. On Times and Speeds of Time-Dependent Quantum and Electromagnetic Tunneling. *JETP*, 2020, vol. 130, pp. 35–51. <https://doi.org/10.1134/S1063776119120161>
29. Davidovich M. V. The speed of energy transfer by a flat monochromatic electromagnetic wave through a layer of matter. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, no. 1, pp. 22–40.
30. Hartman T. E. Tunneling of a Wave Packet. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, no. 12, pp. 3427–3433. <https://dx.doi.org/10.1063/1.1702424>
31. Shvartsburg A. B. Tunneling of electromagnetic waves: paradoxes and prospects. *Phys. Usp.*, 2007, vol. 50, no. 1, pp. 37–51.
32. Steinberg A. M. Conditional probabilities in quantum theory and the tunneling-time controversy. *Phys. Rev.*, 1995, vol. A52, no. 1, pp. 32–42. DOI: 10.1103/PhysRevA.52.32
33. Chiao R. Y., Kozhekin A. E., Kurizki G. Tachyonlike excitations in inverted two-level media. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 77, pp. 1254–1257.

Поступила в редакцию 29.07.2020, после рецензирования 18.12.2020, принята к публикации 14.01.2021
Received 29.07.2020, revised 18.12.2020, accepted 14.01.2021