

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 535.2:621.391

Преобразование собственных значений задачи Захарова–Шабата при столкновении солитонов

А. И. Конохов

Конохов Андрей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, andrereise@yandex.ru

Представлены результаты численного анализа преобразования солитонных импульсов, подчиняющихся модифицированному нелинейному уравнению Шредингера с изменяющимися коэффициентами. Основное внимание уделяется процессу трансформации собственных значений задачи Захарова–Шабата. Собственные значения характеризуют групповую скорость солитона и его амплитуду. В работе рассмотрено столкновение двух синфазных солитонов первого порядка. Столкновение солитонов принимает неупругий характер, если коэффициенты нелинейного уравнения Шредингера изменяются в процессе распространения этих солитонов. При неупругом столкновении собственные значения изменяются. Показано, что характер изменения коэффициентов нелинейного уравнения Шредингера позволяет контролировать набор собственных значений. В модели рассмотрено изменение коэффициента при производной второго порядка, что соответствует распространению солитона в одномодовом оптическом волокне с изменяющимся вдоль волокна диаметром. В модели использовался коэффициент, описываемый гиперболическим тангенсом. В зависимости от характера изменения данного коэффициента возможно преобразование сталкивающихся солитонов в бризер, разделение солитонов по групповым скоростям. Показано, что для преобразования собственных значений достаточно изменения коэффициентов нелинейного уравнения Шредингера в момент столкновения солитонов. Обсуждается применение рассмотренных эффектов для модуляции собственных значений в солитонных линиях связи.

Ключевые слова: солитон, неупругое столкновение, собственные значения, задача Захарова–Шабата.

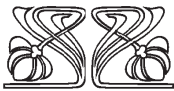
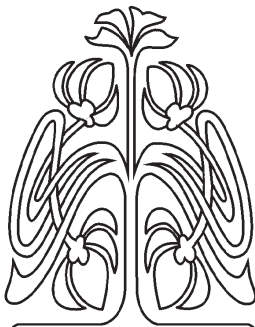
Поступила в редакцию: 09.05.2020 / Принята: 02.06.2020 / Опубликовано: 30.11.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

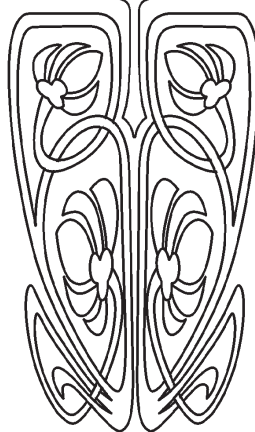
DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-4-248-257>

Введение

Задача Захарова–Шабата позволяет найти солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [1]. Ее решением является как дискретный набор собственных значений, так и непрерывный. Дискретные собственные значения позволяют найти амплитуду, фазу и несущую частоту солитона. Солитоны НУШ представляют собой удобный инструмент для компенсации нелинейности в оптических линиях связи [2]. Однако при импульсном кодировании сигналов прямое использование солитонов затруднено, поскольку синфазные солитоны испытывают взаимное притяжение, а противофазные – от-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





талкивание [3]. При распространении нескольких солитонов расстояние между ними изменяется. При этом собственные значения остаются неизменными. Использование собственных значений для цифрового кодирования сигналов в оптических линиях связи было впервые предложено в работе [4]. Процедура вычисления собственных значений получила название нелинейного преобразования Фурье. Подробный обзор теоретических основ нелинейного преобразования Фурье, его математического аппарата и практического применения дан в [5–7]. В работах [8, 9] обсуждается использование дискретной и непрерывной части спектра собственных значений, даны оценки достижимой спектральной эффективности при кодировании сигнала. В работах [10–12] рассматривалось поляризационное уплотнение сигналов. В [13] рассмотрены методы модуляции как дискретной, так и непрерывной частей спектра собственных значений. В сравнении с непрерывным спектром цифровое кодирование сигнала при помощи дискретного набора собственных значений даёт некоторые преимущества. Использование непрерывного спектра накладывает ограничение на мощность сигнала и уменьшает скорость передачи данных за счет дисперсионных эффектов. В настоящее время достигнут значительный прогресс в развитии методов модуляции собственных значений, их детектирования [5–13]. Однако современные экспериментальные методики базируются на электронной обработке сигналов, что ограничивает длительность используемых импульсов на наносекундном уровне. Соответственно, скорость передачи в одном канале не может превышать гигабит в секунду. При переходе к скоростям передачи данных в канале порядка терабит/с требуется использование пикосекундных солитонов, для которых необходимо развитие прямых полностью оптических методов модуляции собственных значений. В данной работе рассмотрена трансформация собственных значений задачи Захарова–Шабата, связанная с неупругим столкновением солитонов.

Солитон является устойчивым образованием по отношению к малым возмущениям [2, 14]. Однако при больших возмущениях солитоны могут изменить не только свою амплитуду и фазу, но и групповую скорость. Изменение групповой скорости приводит к распаду многосолитонного импульса на отдельные фундаментальные солитоны. В качестве возмущения могут выступать локальное изменение потерь [15, 16], периодическое воздействие [17, 18], воздействие дисперсионной

волны, сдвинутой по частоте [19]. Столкновение солитонов высокого порядка также может приводить к их разделению на фундаментальные солитоны [20]. Недавно опубликованы экспериментальные результаты, связанные с неупругим столкновением солитонов в микрорезонаторе [21]. Разделение бризера на фундаментальные солитоны, изменение амплитуд и групповых скоростей отдельных солитонов отражается в изменении собственных значений [22, 23]. Таким образом, оптические методы управления солитонами можно использовать для модуляции собственных значений [24]. В работе [25] отмечено, что эффект разделения многосолитонного бризера может быть использован для декодирования сигнала в оптических линиях связи, работающих на основе нелинейного преобразования Фурье.

В данной работе рассмотрено столкновение двух фундаментальных солитонов. Использование неупругого столкновения солитонов для управления набором собственных значений даёт некоторые преимущества в сравнении с распадом многосолитонного бризера. При неупругом столкновении солитонов, кроме изменения их групповых скоростей, возможен сценарий, связанный с объединением исходных импульсов в интенсивный импульс [26–28]. В предыдущих наших работах рассматривалось взаимодействие солитонов, связанное с периодическим изменением дисперсии волокна. Было показано, что периодическое изменение дисперсии может приводить к объединению солитонов в интенсивный импульс, вызывать разделение многосолитонных импульсов, изменять мнимую и действительную части собственных значений. Однако механизм такого воздействия дисперсии на солитоны оставался не выясненным. В [28] было сделано предположение, что изменение собственных значений связано с перенормировкой потенциала в задаче Захарова–Шабата. Однако такой подход не учитывает взаимодействие солитонов с несолитонной частью излучения [29], которое неизбежно возникает при изменении коэффициентов НУШ в процессе распространения солитона.

Данная работа показывает, что изменение поведения солитонов связано, прежде всего, с изменением коэффициентов НУШ в момент столкновения двух солитонов. В первой части работы даны необходимые сведения о задаче Захарова–Шабата. Далее рассмотрено поведение солитонов при изменении дисперсии в момент их столкновения. Отдельное внимание уделено динамике собственных значений как



процессу их постепенной трансформации под действием изменяющихся параметров НУШ.

1. Нелинейное уравнение Шредингера с переменными коэффициентами

Нелинейное уравнение Шредингера с коэффициентами, зависящими от эволюционных координат, возникает в модели, описывающей распространение импульсов в одномодовом оптическом волокне, диаметр которого изменяется вдоль волокна [30]. В предположении, что потери компенсируются распределенным усилением [7], и при медленном изменении диаметра волокна распространение лазерных импульсов описывается уравнением:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1(z) \frac{\partial A}{\partial t}\right) + i \frac{\beta_2(z)}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma(z)|A|^2 A(z, t). \quad (1)$$

Здесь z и t – пространственная и временная координаты соответственно; $A(z, t)$ – комплексная огибающая электрического поля, нормированная так, что напряженность электрического поля даётся выражением

$E(z, t) = A(z, t)U(x, y, z)(cn\epsilon_0 S_{eff})^{1/2} \exp(-i\omega_0 t + i \int_{-\infty}^z \beta(z') dz')$, где $U(x, y, z)$ – поперечное распределение поля моды, c – скорость света в вакууме, n – эффективный показатель преломления, ϵ_0 – диэлектрическая постоянная, S_{eff} – эффективная площадь основной моды волокна [3, 14], $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, ω_0 – несущая частота импульса, $\beta(z)$ – продольная постоянная распространения основной моды оптоволокна, $\beta_1 = (\partial\beta/\partial\omega)$ и $\beta_2 = (\partial^2\beta/\partial\omega^2)$ рассчитываются на частоте ω_0 , $\gamma = (\omega_0/c)n_2/S_{eff}$ – эффективный коэффициент керровской нелинейности, n_2 – нелинейный показатель преломления материала. Введем масштабный множитель $s(z)$ так, что

$$\frac{\beta_2(z)}{\gamma(z)} = s(z) \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\gamma}}, \quad (2)$$

где $\bar{\beta}_2$ и $\bar{\gamma}$ – некоторые средние значения. Отметим, что при изменении диаметра волокна коэффициент дисперсии групповой скорости β_2 изменяется сильнее, чем эффективная площадь S_{eff} основной моды волокна [17]. Поэтому $s(z)$ отражает, прежде всего, изменение дисперсии вдоль длины волокна. Будем считать, что $\gamma/\bar{\gamma} \sim 1$. Перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = \left(t - \int \beta_1(z) dz\right) t_0^{-1}, \quad (3)$$

$$\zeta = t_0^{-2} |\bar{\beta}_2| z, \quad (4)$$

$$q = A t_0 \left(\frac{\bar{\gamma}}{|\bar{\beta}_2|}\right)^{1/2}, \quad (5)$$

где t_0 – временной коэффициент масштабирования. В качестве t_0 можно выбрать длительность начального импульса. С учетом $\beta_2 < 0$, что соответствует аномальной дисперсии, НУШ (1) принимает вид

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} - i \frac{s(\zeta)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} = i|q|^2 q(\zeta, \tau). \quad (6)$$

Будем рассматривать задачу Захарова–Шабата для невозмущенного НУШ [1] при $S(\zeta) = 1$. Для решения НУШ $q(\tau)$, полученного при фиксированном ζ , решается система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} - q(\tau)v_1 &= -i\lambda v_2, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau} - q^*(\tau)v_2 &= i\lambda v_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $v = \{v_1, v_2\}^T$ – функции Йоста, λ – комплексное собственное значение, «*» обозначает комплексное сопряжение. Для нахождения собственных значений λ использовался «layer peeling» метод [6].

В системе уравнений (7) решение НУШ $q(\tau)$ при заданном ζ играет роль рассеивающего потенциала. Солитонная составляющая импульса порождает дискретный набор комплексных собственных значений λ_j . В частности, для импульса

$$q(\tau) = r \frac{N}{\tau_0} \operatorname{sech}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad (8)$$

где r – безразмерный множитель, τ_0 – безразмерный масштабный фактор, определяющий длительность импульса, все собственные значения являются мнимыми [31]:

$$\lambda_j = i\tau_0^{-1}(rN - j + 1/2). \quad (9)$$

Здесь целое число $j = 1, 2, 3, \dots$ выбирается так, что $\operatorname{Im}(\lambda_j) > 0$. Каждое решение λ_j соответствует солитону. В общем случае, поле является нелинейной суперпозицией солитонов, где их амплитуда задается как $q_j = 2\operatorname{Im}(\lambda_j)$, сдвиг частоты $\Delta\Omega_j = \operatorname{Re}(\lambda_j)$ [13]. В движущейся системе координат (ζ, τ) групповая скорость импульса равна

$$u_j = 2\operatorname{Re}(\lambda_j). \quad (10)$$

Трансформация собственных значений

При $s(\zeta) = 1$ НУШ (6) описывает только упругие столкновения. Так, например, двухсолитонный импульс



$q(0, \tau) = \text{sech}(\tau - T) + \text{sech}(\tau + T)$ (11) имеет два собственных значения. В приближенной модели полуограниченных импульсов, при $T \gg 1$ [32]

$$\lambda_{1,2} = i \frac{1}{2} \frac{\text{sh } T \pm 1}{\text{ch } T}. \quad (12)$$

Эти собственные значения не меняются при распространении импульсов, несмотря на их периодическое столкновение. Приближенно, расстояние до первого столкновения солитонов описывается формулой [3]

$$\zeta_c = (\pi/2) |\lambda_1^2 - \lambda_2^2|^{-1}. \quad (13)$$

Соответственно, период осцилляций поля равен $2\zeta_c$.

При адиабатическом изменении $s(\zeta)$ происходит лишь масштабирование собственных значений. Так, например, для многосолитонного импульса (8), (9) параметры принимают значение: $r = \sqrt{s(\zeta)}$, $\tau_0 = s(\zeta)$, $\lambda_j = is^{-1}(\sqrt{s}N - j + 1/2)$. Действительная часть λ_j не изменяется и остаётся равной нулю. Это значит, что групповая скорость солитонов (10) также остаётся неизменной. Кроме того, сдвиг $(d\lambda_j/ds)$ собственных значений λ_j при малом изменении s определяется $1/s^2$. И при выборе $0.9 \leq s \leq 1.1$ собственное значение λ_j не может значительно измениться.

Если рассмотреть распространение солитонов при наличии быстрого изменения дисперсии, то характер их взаимодействия качественно меняется. В качестве $s(\zeta)$ используем функцию:

$$s(\zeta) = (s_0 - s_\infty)T(\zeta - \zeta_s) + s_\infty, \quad (14)$$

$$T(\zeta) = (1 + \text{th}(\zeta))/2, \quad (15)$$

где $0 \leq T(\zeta) \leq 1$, параметры s_0, s_∞ выберем так, чтобы величина изменения $s(\zeta)$ не превышала 10% от первоначального значения ($0.9 \leq s \leq 1.1$), ζ_s определяет область быстрого изменения $s(\zeta)$.

При $T = 4$ первое столкновение солитонов (11) происходит в плоскости $\zeta_c = 42.9$. На рис. 1 показано поведение солитонов при изменении $s(\zeta)$ в области, соответствующей максимальной пиковой интенсивности (рис. 1, а). При столкновении солитонов, в плоскости $\zeta = \zeta_c$ спектр приобретает структуру с двумя локальными максимумами при $\Omega = \pm 0.9$ (рис. 1, б).

В работе [16] разделение многосолитонного импульса на фундаментальные Re(солитоны при появлении локальных потерь связано именно с

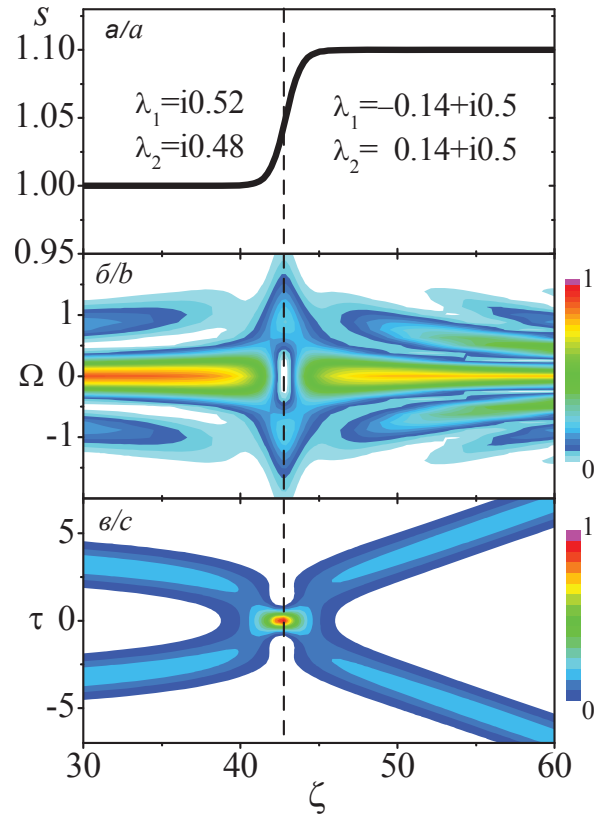


Рис. 1. Распространение солитонной пары (11) при увеличении коэффициента $s(\zeta)$ в области столкновения солитонов $\zeta = \zeta_c = 42.9$. В формуле (14) $s_0 = 1, s_\infty = 1.1$. Плоскость $\zeta = \zeta_c$ обозначена вертикальной пунктирной линией. а – зависимость $s = s(\zeta)$. На вставках даны собственные значения $\lambda_{1,2}$ до столкновения солитонов (левая вставка) и после столкновения (правая вставка). б – спектральная интенсивность $J(\zeta, \Omega) = |F(\zeta, \Omega)|^2$, нормированная на пиковое значение. $\Omega = \omega - \omega_0$ – разностная частота, $F(\zeta, \Omega)$ – спектр поля. в – интенсивность $I(\zeta, \tau) = |q(\zeta, \tau)|^2$, нормированная на своё пиковое значение. Цветовая шкала (рис. 1, б, рис. 1, в) показывает диапазон изменения нормированной интенсивности

Fig. 1. Propagation of the soliton pair (11) with the increase of the coefficient $s(\zeta)$ in the region of solitons collision $\zeta = \zeta_c = 42.9$. Parameters in Eq. (14) are $s_0 = 1, s_\infty = 1.1$. The vertical dashed line shows $\zeta = \zeta_c$. (a) Dependence $s = s(\zeta)$. The insets give the eigenvalues $\lambda_{1,2}$ before the collision of solitons (left inset) and after the collision (right inset). (b) Spectral intensity $J(\zeta, \Omega) = |F(\zeta, \Omega)|^2$, normalized to the peak value. $\Omega = \omega - \omega_0$ is the difference frequency, $F(\zeta, \Omega)$ is the field spectrum. (c) Intensity $I(\zeta, \tau) = |q(\zeta, \tau)|^2$ normalized to its peak value. The color bar (Fig. 1, b, Fig. 1, c) shows the data ranges for the normalized intensity (color online)

изменением спектра поля. В [28] отмечено, что изменение дисперсии в момент столкновения солитонов приводит к наиболее сильному изме-



нению собственных значений. При увеличении коэффициента $s(\zeta)$ от значения 1.0 до 1.1 солитоны разделяются и начинают распространяться с разными групповыми скоростями (рис. 1, в). Действительные части соответствующих собственных значений становятся не нулевыми так, что $Re(\lambda_1) = -Re(\lambda_2)$ (см. вставку с числовыми значениями λ на рис. 1, а). Такое равенство диктуется законом сохранения момента импульса [3, 14]. Десятипроцентное уменьшение коэффициента $s(\zeta)$ (рис. 2, а) приводит к формированию бризера. Собственные значения являются чисто мнимыми как до столкновения импульсов ($\lambda_1 = i0.52$, $\lambda_2 = i0.48$), так и после ($\lambda_1 = i0.67$, $\lambda_2 = i0.34$). До столкновения солитонов период изменения поля был равен $2\zeta_C = 85.8$. После столкновения расстояние между λ_1 и λ_2 на комплексной плоскости увеличивается. Поэтому, в соответствии с

формулой (13), период уменьшается. Бризер, сформировавшийся после столкновения солитонов, имеет период изменения формы, равный $2\zeta_C = 9.4$.

На комплексной плоскости, при изменении $s(\zeta)$, мнимая часть первого собственного значения $Im(\lambda_1)$ увеличивается, в то время как $Im(\lambda_2)$ уменьшается. При определенных условиях мнимая часть собственного значения может приобрести нулевую величину $Im(\lambda_2) = 0$. Такой эффект был описан в рамках модели НУШ с периодическим изменением дисперсии [23]. Когда $Im(\lambda_2)$ принимает нулевое значение, часть излучения переходит в дисперсионную волну, имеющую непрерывный спектр действительных собственных значений. Рис. 2 показывает, что плавное увеличение дисперсии может приводить к перераспределению собственных значений без изменения их действительной части, т.е. без изменения групповой скорости импульсов.

В работе [28] было показано, что трансформация собственных значений связана с изменением спектра поля за счет нелинейной интерференции солитонов, формирующих бризер. Однако при столкновении солитонов (11) собственные значения будут определяться не только спектром поля, но и интерференцией солитонов с дисперсионной волной. Быстрое изменение коэффициента $s(\zeta)$ приводит к формированию несолитонной составляющей, распространяющейся в виде низкоинтенсивной дисперсионной волны. Рассмотрим как положение плоскости $\zeta = \zeta_S$, соответствующей среднему значению $s(\zeta)$ (14), влияет на собственные значения, полученные после столкновения солитонов. На рис. 3 показана ширина спектра поля, рассчитанного для невозмущенного НУШ (6) ($s(\zeta) = 1$).

Поскольку изменение собственных значений связано с уширением спектра в момент столкновения [16, 28], будем отсчитывать расстояние от плоскости $\zeta = \zeta_C = 42.9$ (13) (рис. 4, 5). На рис. 4, 5 показаны собственные значения, рассчитанные после столкновения солитонов. При использовании коэффициента $s(\zeta)$, возрастающего от 1 до 1.1 (см. рис. 4), на начальном участке ($\zeta_S - \zeta_C < -1.45$) собственные значения изменяются незначительно. Величины λ_1 и λ_2 остаются мнимыми, что соответствует периодической осцилляции поля с периодом, определяемым формулой (13).

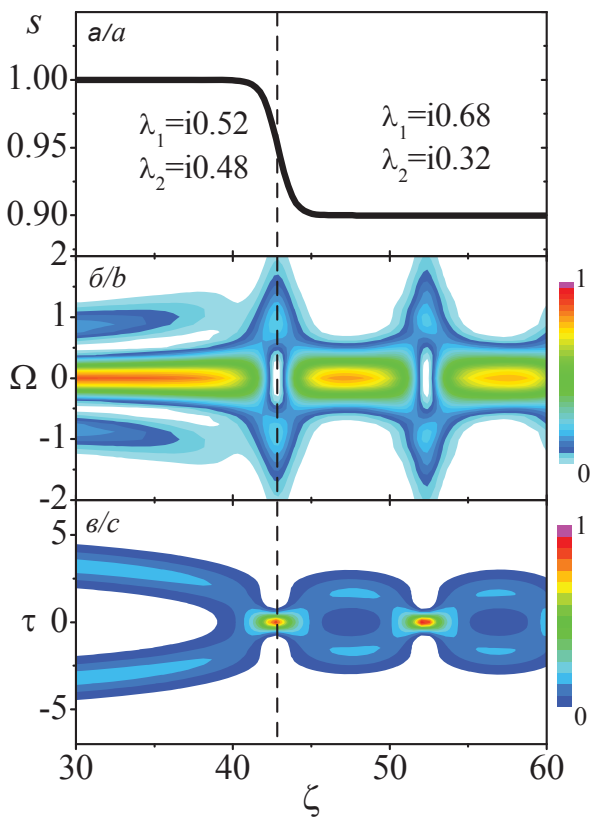


Рис. 2. Столкновение солитонов (11) при уменьшении коэффициента $s(\zeta)$ в области $\zeta = \zeta_C = 42.9$. Параметры в формуле (14) $s_0 = 1$, $s_\infty = 1.1$. Остальные параметры и обозначения такие же, как на рис. 1

Fig. 2. Collision of the soliton pair (11) with the decrease of the coefficient $s(\zeta)$ in the region $\zeta = \zeta_C = 42.9$. Parameters in Eq. (14) are $s_0 = 1$, $s_\infty = 1.1$. Other parameters and notations are the same as in Fig. 1 (color online)

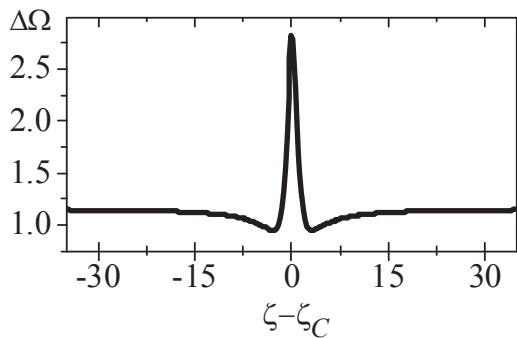


Рис. 3. Ширина спектра $\Delta\Omega$ поля двух импульсов (11), рассчитанная для НУШ (6) с постоянными коэффициентами ($s(\zeta) = 1$), расстояние (13), на котором происходит столкновение солитонов, равно 42.9

Fig. 3. Spectrum width $\Delta\Omega$ of the field of two pulses (11), calculated for the NSE (6) with constant coefficients ($s(\zeta) = 1$), the collision distance (13) is $\zeta_C = 42.9$

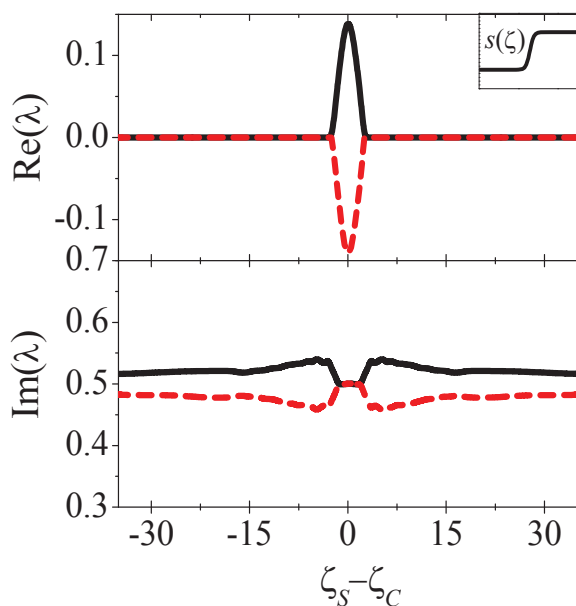


Рис. 4. Действительная $Re(\lambda)$ и мнимая $Im(\lambda)$ части собственных значений λ_1 (сплошная линия) и λ_2 (пунктир) в зависимости от положения плоскости ζ_S . Плоскость столкновения солитонов $\zeta_C = 42.9$ (13). Параметры $s_0 = 1, s_\infty = 1.1$. Вставка на верхнем рисунке схематически показывает зависимость $s = s(\zeta)$ (14)

Fig. 4. Real $Re(\lambda)$ and imaginary $Im(\lambda)$ parts of the eigenvalue λ_1 (solid curve) and eigenvalue λ_2 (dashed curve) for a different position of the plane ζ_S . The plane of solitons collision is $\zeta_C = 42.9$ (13). Parameters in Eq. (14) are $s_0 = 1, s_\infty = 1.1$. The inset in the upper Figure shows schematically the dependence $s = s(\zeta)$ (14) (color online)

В области $|\zeta_S - \zeta_C| < 1.45$ столкновение солитонов приводит к их разделению по групповым скоростям (11) $Re(\lambda_1) = -Re(\lambda_2)$. Разделение солитонов, соответствующее $\zeta_S - \zeta_C = 0$, показано на рис. 1.

На рис. 5 показано поведение собственных значений для коэффициента $s(\zeta)$, убывающего от 1 до 0.9. Как видно из рис. 5, характер изменения собственных значений качественно отличается от случая, показанного на рис. 4. На участке ($\zeta_S - \zeta_C < -18$) собственные значения остаются мнимыми. Однако при приближении ζ_S к области столкновения солитонов ζ_C происходит их разделение по групповым скоростям $Re(\lambda_1) = -Re(\lambda_2)$. При разделении солитоны имеют одинаковую амплитуду $Im(\lambda_1) = Im(\lambda_2) = 0.49$. Области параметров $-19 < (\zeta_S - \zeta_C) < -3$ и $3 < (\zeta_S - \zeta_C) < 19$, соответствующие разделению

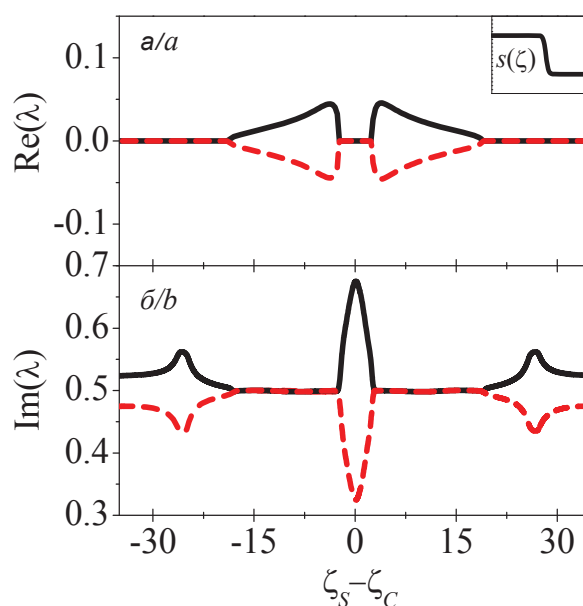


Рис. 5. Действительная $Re(\lambda)$ и мнимая $Im(\lambda)$ части собственных значений λ_1 (сплошная линия) и λ_2 (пунктир) в зависимости от положения плоскости ζ_S . Плоскость столкновения солитонов $\zeta_C = 42.9$ (13). Параметры в формуле (14) $s_0 = 1, s_\infty = 0.9$. Остальные обозначения и параметры такие же, как на рис. 4

Fig. 5. Real $Re(\lambda)$ and imaginary $Im(\lambda)$ parts of the eigenvalue λ_1 (solid curve) and eigenvalue λ_2 (dashed curve) for a different position of the plane ζ_S . The plane of solitons collision is $\zeta_C = 42.9$ (13). Parameters in Eq. (14) are $s_0 = 1, s_\infty = 0.9$. Other parameters and notations are the same as in Fig. 4 (color online)



солитонов, характеризуется некоторым сжатием спектра (см. рис. 3). При уширении спектра ($|\zeta_S - \zeta_C| < 1.9$) собственные значения λ_1, λ_2 имеют нулевую действительную часть, что соответствует полю, распространяющемуся с периодическим изменением своей формы (см. рис. 2). Поведение солитонов при максимальном разделении собственных значений ($\zeta_S - \zeta_C = 0$) показано на рис. 2. Рис. 4 и 5 показывают, что смена положения плоскости $\zeta = \zeta_S$, соответствующей среднему значению $s(\zeta)$, позволяет получать различные комбинации пар комплексных собственных значений λ_1 и λ_2 .

Закключение

В данной работе рассмотрена задача о распространении солитонов первого порядка в оптическом волокне с изменяющейся по длине волокна дисперсией. Такая задача приводит к модели нелинейного уравнения Шредингера с изменяющимися коэффициентами. Показано, что изменение коэффициента s при второй производной в НУШ позволяет управлять собственными значениями в комплексной плоскости. Изменение величины s в процессе распространения солитонов приводит к их неупругому столкновению, которое сопровождается изменением групповых скоростей солитонов и их амплитуд. Эти изменения отражаются на комплексной плоскости ($Re(\lambda), Im(\lambda)$). Поведение собственных значений зависит от скорости и знака изменения параметров НУШ, спектрального состава излучения.

С одной стороны, изменение собственных значений λ в солитонных линиях связи является нежелательным эффектом, поскольку при передаче информации неупругое столкновение солитонов будет приводить к неучитываемой модуляции и, следовательно, к потере данных. С другой стороны, зависимость собственных значений от параметров сталкивающихся солитонов и от характера изменения дисперсии позволит реализовать модуляцию методами волоконной оптики. В настоящее время модуляция собственных значений осуществляется при помощи электронных устройств [6, 7]. Поэтому передача информации ограничена наносекундными импульсами. При переходе к пикосекундным импульсам требуется развитие полностью оптических методов модуляции. Объединение солитонов, разделение многосолитонного бризера возможно при специальных

условиях, таких как скачкообразное изменение параметров [16], резонансная модуляция [23]. Показано, что для преобразования собственных значений задачи Захарова–Шабата достаточно плавного изменения коэффициентов нелинейного уравнения Шредингера в момент неупругого столкновения солитонов. По-видимому, такое поведение многосолитонных импульсов является универсальным. Представленные результаты будут полезными при развитии методов управления оптическими солитонами и солитонными состояниями конденсата Бозе–Эйнштейна.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DST в рамках научного проекта № 19-52-45012.

Автор выражает благодарность Ю. Г. Коныховой за помощь в подготовке публикации.

Список литературы

1. Лэм Д. Л. Введение в теорию солитонов. М. : Мир, 1983. 294 с.
2. Mitra P., Stark J. Nonlinear limits to the information capacity of optical fibre communications // Nature. 2001. Vol. 411. P. 1027–1030. DOI: 10.1038/35082518
3. Квиуарь Ю. С., Агравал Г. П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. М. : Физматлит, 2005. 648 с.
4. Hasegawa A., Nyu T. Eigenvalue communication // J. Lightwave Technol. 1993. Vol. 11. P. 395–399.
5. Yousefi M. I., Kschischang F. R. Information transmission using the nonlinear fourier transform, Part I: mathematical tools // IEEE Trans. Inf. Theory. 2014. Vol. 60. P. 4312–4328. DOI: 10.1109/TIT.2014.2321143
6. Yousefi M. I., Kschischang F. R. Information transmission using the nonlinear fourier transform, Part II: numerical methods // IEEE Trans. Inf. Theory. 2014. Vol. 60. P. 4329–4345. DOI: 10.1109/TIT.2014.2321151
7. Yousefi M. I., Kschischang F. R. Information transmission using the nonlinear fourier transform, Part III : spectrum modulation // IEEE Trans. Inf. Theory. 2014. Vol. 60. P. 4346–4369. DOI: 10.1109/TIT.2014.2321155
8. Prilepsky J. E., Derevyanko S. A., Blow K. J., Gabitov I., Turitsyn S. K. Nonlinear inverse synthesis and eigenvalue division multiplexing in optical fiber channels // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 113. P. 1–5. 013901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.013901
9. Turitsyna E. G., Turitsyn S. K. Digital signal processing based on inverse scattering transform // Opt. Lett. 2013. Vol. 38. P. 4186–4188. DOI: 10.1364/OL.38.004186
10. Yangzhang X., Aref V., Le S. T., Bülow H., Lavery D., Bayvel P. Dual-polarization non-linear frequency-



- division multiplexed transmission with b -modulation // *J. of Lightwave Technol.* 2019. Vol. 37. P. 1570–1578.
11. *Goosens J.-W., Yousefi M. I., Jaouën Y., Hafermann H.* Polarization-division multiplexing based on the nonlinear Fourier transform // *Opt. Express.* 2017. Vol. 25. P. 26437–26452. DOI: 10.1364/OE.25.026437
 12. *Gaiarin S., Perego A. M., Da Silva E. P., Da Ros F., Zibar D.* Dual-polarization nonlinear Fourier transform-based optical communication system // *Optica.* 2018. Vol. 5. P. 263–270. DOI: 10.1364/OPTICA.5.000263
 13. *Aref V., Le S. T., Bülow H.* Modulation over nonlinear Fourier spectrum: continuous and discrete spectrum // *J. Lightwave Technol.* 2018. Vol. 36. P. 1289–1295. DOI: 10.1109/JLT.2018.2794475
 14. *Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чуркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 312 с.
 15. *Lee K.-S., Buck J. A.* Wavelength conversion through higher-order soliton splitting initiated by localized channel perturbations // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2003. Vol. 20. P. 514–536. DOI: 10.1364/JOSAB.20.000514
 16. *Hause A., Mahnke C., Mitschke F.* Impact of fiber loss on two-soliton states: Substantial changes in eigenvalue spectrum // *Phys. Rev. A.* 2018. Vol. 98. P. 1–9. 033814. DOI: 10.1103/PhysRevA.98.033814
 17. *Sysoliatin A. A., Senatorov A. K., Konyukhov A. I., Melnikov L. A., Stasyuk V. A.* Soliton fission management by dispersion oscillating fiber // *Opt. Express.* 2007. Vol. 15. P. 16302–16307. DOI: 10.1364/OE.15.016302
 18. *Kartashov Y. V., Crasovan L., Zelenina A. S., Vysloukh V. A., Sanpera A., Lewenstein M., Torner L.* Soliton eigenvalue control in optical lattices // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 1–4. 143902. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.143902
 19. *Алешкевич В. А., Выслоух В. А., Жукарев А. С., Карташов Я. В., Синило П. В.* Стимулированный распад N -солитонных импульсов и оптимальная сепарация односолитонных компонент // *Квант. электроника.* 2003. Т. 33, № 5. С. 460–464.
 20. *Castillo M. D. I., Cerda S. C., Martinez D. R.* Splitting after collision of high-order bright spatial solitons in Kerr media // *Opt. Express.* 2014. Vol. 22. P. 30769–30776. DOI: 10.1364/OE.22.030769
 21. *Weng W., Bouchand R., Kippenberg T. J.* Formation and collision of multistability-enabled composite dissipative Kerr solitons // *Phys. Rev. X.* 2020. Vol. 10. P. 1–16. 021017. DOI: 10.1103/PhysRevX.10.021017
 22. *Гочелашвили К. С., Сысолятин А. А., Конюхов А. И., Мельников Л. А., Маврин П. А., Салганский М. Ю.* Модификация дискретных спектральных параметров оптических солитонов в волокнах с переменной дисперсией // *Краткие сообщения по физике ФИАН.* 2017. Т. 52, вып. 11. С. 52–58. DOI: 10.3103/S1068335617110082
 23. *Konyukhov A. I., Dorokhova M. A., Melnikov L. A., Plastun A. S.* Inelastic collision and fusion of optical solitons in dispersion oscillating fiber // *Laser Physics Letters.* 2015. Vol. 12. P. 1–5. 055103. DOI: 10.1088/1612-2011/12/5/055103
 24. *Конюхов А. И., Маврин П. А., Щуркин Е. В.* Мультиплексирование сигналов в оптоволоконных линиях связи с использованием дискретного солитонного спектра // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* 2018. Т. 18, вып. 1. С. 16–22. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-16-22
 25. *Конюхов А. И., Щуркин Е. В., Мельников Л. А., Сысолятин А. А., Гочелашвили К. С.* К проблеме генерации и распознавания солитонных состояний волоконно-оптическими методами // *ЖЭТФ.* 2019. Т. 155. С. 446–459.
 26. *Конюхов А. И., Дорохова М. А., Мельников Л. А., Пластун А. С.* Управление взаимодействием оптических солитонов при помощи периодического изменения дисперсии в волоконном световоде // *Квантовая электроника.* 2015. Т. 45. С. 1018–1022.
 27. *Дорохова М. А., Конюхов А. И., Мельников Л. А., Пластун А. С.* Конструктивная интерференция оптических солитонов в волокне с периодическим изменением дисперсии // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* 2014. Т. 14, вып. 1. С. 32–35.
 28. *Konyukhov A. I., Sysoliatin A. A.* Generation of high-intensity optical breathers via soliton collision in fibres with variable dispersion // *Laser Physics.* 2020. Vol. 30. P. 1–6. 015401. DOI: 10.1088/1555-6611/ab543b
 29. *Кузнецов Е. А., Михайлов А. В.* Релаксационные колебания солитонов // *Письма в ЖЭТФ.* 1994. Т. 60. С. 466–470.
 30. *Kuehl H. H.* Solitons on an axially nonuniform optical fiber // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1988. Vol. 5. P. 709–713. DOI: 10.1364/JOSAB.5.000709
 31. *Satsuma J., Yajima N. B.* Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media // *Prog. Theor. Phys.* 1974. Vol. 55. P. 284–306. DOI: 10.1143/PTPS.55.284
 32. *Выслоух В. А., Чередник И. В.* Об ограниченных N -солитонных решениях нелинейного уравнения Шредингера // *Теоретическая и математическая физика.* 1987. Т. 71, № 1. С. 13–20.

Образец для цитирования:

Конюхов А. И. Преобразование собственных значений задачи Захарова–Шабата при столкновении солитонов // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* 2020. Т. 20, вып. 4. С. 248–257. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-4-248-257>



Transformation of Eigenvalues of the Zakharov–Shabat Problem under the Effect of Soliton Collision

A. I. Konyukhov

Andrey I. Konyukhov, <https://orcid.org/0000-0001-6502-7405>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, andreise@yandex.ru

Background and Objectives: The Zakharov–Shabat spectral problem allows to find soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation. Solving the Zakharov–Shabat problem gives both a discrete set of eigenvalues λ_j and a continuous one. Each discrete eigenvalue corresponds to an individual soliton with the real part $Re(\lambda_j)$ providing the soliton velocity and the imaginary part $Im(\lambda_j)$ determining the soliton amplitude. Solitons can be used in optical communication lines to compensate both non-linearity and dispersion. However, a direct use of solitons in return-to-zero signal encoding is inhibited. The interaction between solitons leads to the loss of transmitted data. The problem of soliton interaction can be solved using eigenvalues. The latter do not change when the solitons obey the nonlinear Schrödinger equation. Eigenvalue communication was realized recently using electronic signal processing. To increase the transmission speed the all-optical method for controlling eigenvalues should be developed. The presented research is useful to develop optical methods for the transformation of the eigenvalues. The purpose of the current paper is twofold. First, we intend to clarify the issue of whether the dispersion perturbation can not only split a bound soliton state but join solitons into a short oscillating period breather. The second goal of the paper is to describe the complicated dynamics and mutual interaction of complex eigenvalues of the Zakharov–Shabat spectral problem. **Materials and Methods:** Pulse propagation in single-mode optical fibers with a variable core diameter can be described using the nonlinear Schrödinger equation (NLSE) which coefficients depends on the evolution coordinate. The NLSE with the variable dispersion coefficient was considered. The dispersion coefficient was described using a hyperbolic tangent function. The NLSE and the Zakharov–Shabat spectral problem were solved using the split-step method and the layer-peeling method, respectively. **Results:** The results of numerical analysis of the modification of soliton pulses under the effect of variable dispersion coefficient are presented. The main attention is paid to the process of transformation of eigenvalues of the Zakharov–Shabat problem. Collision of two in-phase solitons, which are characterized by two complex eigenvalues is considered. When the coefficients of the nonlinear Schrödinger equation change, the collision of the solitons becomes inelastic. The inelastic collision is characterized by the change of the eigenvalues. It is shown that the variation of the coefficients of the NLSE allows to control both real and imaginary parts of the eigenvalues. Two scenarios for the change of the eigenvalues were identified. The first scenario is characterized by preserving the zero real part of the eigenvalues. The second one is characterized by the equality of their imaginary parts. The transformation of eigenvalues is most effective at the distance where the field spectrum possesses a two-lobe shape. Variation of the NLSE coefficient can introduce splitting or joining of colliding soliton pulses. **Conclusion:** The presented results show that the eigenvalues can be changed only with a small variation of the NLSE coefficients. On the one hand, a change in the eigenvalues

under the effect of inelastic soliton collision is an undesirable effect since the inelastic collision of solitons will lead to unaccounted modulation in soliton optical communication links. On the other hand, the dependence of the eigenvalues on the parameters of the colliding solitons allows to modulate the eigenvalues using all-fiber optical devices. Currently, the modulation of the eigenvalues is organized using electronic devices. Therefore, the transmission of information is limited to nanosecond pulses. For picosecond pulse communication, the development of all-optical modulation methods is required. The presented results will be useful in the development of methods for controlling optical solitons and soliton states of the Bose–Einstein condensate.

Keywords: soliton, inelastic collision, eigenvalues, Zakharov–Shabat problem.

Received: 09.05.2020 / Accepted: 02.06.2020 / Published: 30.11.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: The reported study was funded by RFBR and DST according to the research project No. 19-52-45012.

The author is grateful to Julia Konyukhova for the help in preparation of the article.

References

1. Lamb G. L. *Elements of soliton theory*. New York, John Wiley & Sons, 1980. 289 p.
2. Mitra P., Stark J. Nonlinear limits to the information capacity of optical fibre communications. *Nature*, 2001, vol. 411, pp. 1027–1030. DOI: 10.1038/35082518
3. Kivshar Yu. S., Agrawal G. P. *Optical solitons: From fibers to photonic crystals*. Amsterdam, Academic Press, 2003. 540 p.
4. Hasegawa A., Nyu T. Eigenvalue communication. *J. Lightwave Technol.*, 1993, vol. 11, pp. 395–399.
5. Yousefi M. I., Kschischang F. R. Information transmission using the nonlinear fourier transform, Part I: mathematical tools. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2014, vol. 60, pp. 4312–4328. DOI: 10.1109/TIT.2014.2321143
6. Yousefi M. I., Kschischang F. R. Information transmission using the nonlinear fourier transform, Part II: numerical methods. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2014, vol. 60, pp. 4329–4345. DOI: 10.1109/TIT.2014.2321151
7. Yousefi M. I., Kschischang F. R. Information transmission using the nonlinear fourier transform, Part III: spectrum modulation. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2014, vol. 60, pp. 4346–4369. DOI: 10.1109/TIT.2014.2321155
8. Prilepsky J. E., Derevyanko S. A., Blow K. J., Gabitov I., Turitsyn S. K. Nonlinear inverse synthesis and eigenvalue division multiplexing in optical fiber channels. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 113, pp. 1–5. 013901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.013901
9. Turitsyna E. G., Turitsyn S. K. Digital signal processing based on inverse scattering transform. *Opt. Lett.*, 2013, vol. 38, pp. 4186–4188. DOI: 10.1364/OL.38.004186



10. Yangzhang X., Aref V., Le S. T., Bülow H., Lavery D., Bayvel P. Dual-polarization non-linear frequency-division multiplexed transmission with b -modulation. *J. of Lightwave Technol.*, 2019, vol. 37, pp. 1570–1578.
11. Goosens J.-W., Yousefi M. I., Jaouën Y., Hafermann H. Polarization-division multiplexing based on the non-linear Fourier transform. *Opt. Express*, 2017, vol. 25, pp. 26437–26452. DOI: 10.1364/OE.25.026437
12. Gaiaarin S., Perego A. M., Da Silva E. P., Da Ros F., Zibar D. Dual-polarization nonlinear Fourier transform-based optical communication system. *Optica*, 2018, vol. 5, pp. 263–270. DOI: 10.1364/OPTICA.5.000263
13. Aref V., Le S. T., Bülow H. Modulation over nonlinear Fourier spectrum: continuous and discrete spectrum. *J. of Lightwave Technol.*, 2018, vol. 36, pp. 1289–1295. DOI: 10.1109/JLT.2018.2794475
14. Akhmanov S. A., Vysloukh V. A., Chirkin A. S. *Optics of Femtosecond Laser Pulses*. New York, Am. Inst. of Physics, 1992. 366 p.
15. Lee K.-S., Buck J. A. Wavelength conversion through higher-order soliton splitting initiated by localized channel perturbations. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2003, vol. 20, pp. 514–536. DOI: 10.1364/JOSAB.20.000514
16. Hause A., Mahnke C., Mitschke F. Impact of fiber loss on two-soliton states: Substantial changes in eigenvalue spectrum. *Phys. Rev. A*, 2018, vol. 98, pp. 1–9. 033814. DOI: 10.1103/PhysRevA.98.033814
17. Sysoliatin A.A., Senatorov A.K., Konyukhov A.I., Melnikov L.A., Stasyuk V.A. Soliton fission management by dispersion oscillating fiber. *Opt. Express*, 2007, vol. 15, pp. 16302–16307. DOI: 10.1364/OE.15.016302
18. Kartashov Y. V., Crasovan L., Zelenina A. S., Vysloukh V. A., Sanpera A., Lewenstein M., Torner L. Soliton eigenvalue control in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, pp. 1–4. 143902. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.143902
19. Aleshkevich V. A., Vysloukh V. A., Zhukarev A. S., Kartashov Ya. V., Sinilo P. V. Stimulated decay of N -soliton pulses and optimal separation of one-soliton components. *Quantum Electronics*, 2003, vol. 33, pp. 460–464. DOI: 10.1070/QE2003v033n05ABEH002435
20. Castillo M. D. I., Cerda S. C., Martinez D.R. Splitting after collision of high-order bright spatial solitons in Kerr media. *Opt. Express*, 2014, vol. 22, pp. 30769–30776. DOI: 10.1364/OE.22.030769
21. Weng W., Bouchand R., Kippenberg T. J. Formation and collision of multistability-enabled composite dissipative Kerr solitons. *Phys. Rev. X*, 2020, vol. 10, pp. 1–16. 021017. DOI: 10.1103/PhysRevX.10.021017
22. Gochelashvili K. S., Sysoliatin A. A., Konyukhov A. I., Melnikov L. A., Mavrin P. A., Salgansky M. Yu. Modification of the discrete spectral parameters of optical solitons in fibers with variable dispersion. *Bull. Lebedev Phys. Inst.*, 2017, vol. 44, pp. 343–346. DOI: 10.3103/S1068335617110082
23. Konyukhov A.I., Dorokhova M.A., Melnikov L.A., Plastun A.S. Inelastic collision and fusion of optical solitons in dispersion oscillating fiber. *Laser Physics Letters*, 2015, vol. 12, pp. 1–5. 055103. DOI: 10.1088/1612-2011/12/5/055103
24. Konyukhov A. I., Mavrin P. A., Shchurkin E. V. Discrete-eigenvalue multiplexing for soliton fiber-optic communication links. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 16–22 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-1-16-22
25. Konyukhov A. I., Schurkin E. V., Melnikov L. A., Sysoliatin A. A., Gochelashvili K. S. On the all-fiber optical methods of the generation and recognition of soliton states. *J. of Exper. and Theor. Phys.*, 2019, vol. 128, pp. 384–395. DOI: 10.1134/S1063776119020213
26. Konyukhov A. I., Dorokhova M. A., Melnikov L. A., Plastun A. S. Controlling the interaction between optical solitons using periodic dispersion variations in an optical fibre. *Quantum Electronics*, 2015, vol. 45, pp. 1018–1022. DOI: 10.1070/QE2015v045n11ABEH015863
27. Dorokhova M. A., Konyukhov A. I., Melnikov L. A., Plastun A. S. Constructive Interference of Optical Solitons in Dispersion Oscillating Fiber. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 32–35 (in Russian).
28. Konyukhov A. I., Sysoliatin A. A. Generation of high-intensity optical breathers via soliton collision in fibres with variable dispersion. *Laser Physics*, 2020, vol. 30, pp. 1–6. 015401. DOI: 10.1088/1555-6611/ab543b
29. Kuznetsov E. A., Mikhailov A. V. Relaxation oscillations of solitons. *JETP Lett.*, 1994, vol. 60, pp. 486–490.
30. Kuehl H. H. Solitons on an axially nonuniform optical fiber. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1988, vol. 5, pp. 709–713. DOI: 10.1364/JOSAB.5.000709
31. Satsuma J., Yajima N. B. Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media. *Prog. Theor. Phys.*, 1974, vol. 55, pp. 284–306. DOI: 10.1143/PTPS.55.284
32. Vysloukh V. A., Cherednik I. V. On restricted N -soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1987, vol. 71, pp. 346–351. DOI: 10.1007/BF01029093

Cite this article as:

Konyukhov A. I. Transformation of Eigenvalues of the Zakharov–Shabat Problem under the Effect of Soliton Collision. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 248–257 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-4-248-257>