



УДК 53.01

Эффекты синхронизации двухслойной сети нелокально связанных хаотических отображений с диссипативной и инерционной связью



Т. Р. Богатенко, А. В. Бух, В. С. Анищенко, Г. И. Стрелкова

Богатенко Татьяна Романовна, магистрантка кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, tatiana_bogatenko@rambler.ru

Бух Андрей Владимирович, аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, buh.andrey@yandex.ru

Анищенко Вадим Семенович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, wadim@info.sgu.ru

Стрелкова Галина Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, strelkovagi@info.sgu.ru

В настоящей работе представлены результаты численного исследования эффектов синхронизации в системе двух взаимодействующих ансамблей (колец) логистических отображений с нелокальной связью. Рассмотрены случаи вынужденной и взаимной синхронизации ансамблей при диссипативной и инерционной связи между ними. Параметры рассматриваемой системы выбраны таким образом, что в отсутствие связи в первом ансамбле сосуществуют амплитудные и фазовые химерные структуры, а второй ансамбль находится в режиме пространственно-временного хаоса. Оценка степени синхронизации структур производится с использованием среднеквадратичных отклонений значений переменных взаимосвязанных ансамблей, усредненных по времени и элементам ансамбля. Показано, что при диссипативной связи между ансамблями хаотических отображений наблюдаются эффекты вынужденной и взаимной синхронизации химерных структур в конечной области вариации значения силы связи между ансамблями, в то время как при инерционной связи данных эффектов реализовать практически невозможно.

Ключевые слова: ансамбль связанных осцилляторов, синхронизация, нелокальная связь, фазовые и амплитудные химеры, диссипативная и инерционная связь.

Поступила в редакцию: 16.11.2019 / Принята: 25.12.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-1-42-54>

Введение

Синхронизация – одно из фундаментальных свойств нелинейных систем, которое заключается в установлении определенных соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия. Эффект синхронизации, открытый Гюйгенсом [1] в XVII веке, играет огромную роль в природе и технике, что детально отражено в большом количестве монографий [2–14].

Различают вынужденную (внешнюю) синхронизацию, т.е. синхронизацию автоколебаний внешним сигналом, и взаимную синхронизацию, наблюдающуюся при взаимодействии двух автоколебательных систем. В обоих случаях проявляются одни и те же эффекты, связанные с двумя классическими механизмами синхронизации: захватом собственных частот (и соответственно фаз) колебаний или же подавлением одной из двух независимых частот. С открытием режима динамического хаоса была показана возможность синхронизации хаотических автоколебаний [14, 15].

Явления синхронизации в связанных нелинейных динамических системах продолжают оставаться актуальными и изучаются во многих областях науки, таких как физика, химия, биология, медицина, нейродинамика, социальные и экономические науки [13]. Синхронизация различных компонент, составляющих сложные системы и сети, определяет их стабильное функционирование и самоорганизацию. В живой природе синхронизация нейронов играет ключевую роль в функционировании мозга человека и животных [16–18].

С открытием особых пространственно-временных структур, названных впоследствии химерными [19, 20], в ансамблях нелокально связанных идентичных осцилляторов интерес к изучению эффектов синхронизации резко возрос. Важным и перспективным представляется исследование эффектов синхронизации таких структур при взаимодействии двух и более ан-



самблей связанных нелинейных осцилляторов. Впервые были установлены и описаны эффекты обобщенной синхронизации химер в ансамблях фазовых осцилляторов [21] и вынужденной и взаимной синхронизации амплитудных и фазовых химерных состояний в двух связанных ансамблях логистических отображений [22]. Были также исследованы явления вынужденной синхронизации (воспроизведения задающей структуры) в многослойной сети [23], удаленной синхронизации [24], взрывной синхронизации [25].

В работе [22] были изучены эффекты синхронизации в случае диссипативно связанных колец логистических отображений. Однако не были проанализированы эффекты синхронизации в данной системе в случае инерционной связи между ансамблями. Отметим важность исследований влияния типов связи на эффекты синхронизации. Если при изучении взаимодействия ансамблей в технических задачах имеется определенная возможность выбора типов связи, то в живой природе, например, такая возможность исключается. В связи с этим важно знать на практике степень влияния типа связи на реализацию эффектов синхронизации взаимодействующих ансамблей.

Целью настоящей работы являются исследование и сравнительный анализ эффектов вынужденной и взаимной синхронизации в системе двух связанных колец логистических отображений в случаях диссипативной и инерционной связи между ансамблями. Оценка степени синхронизации пространственно-временных структур проводится с помощью расчетов квадрата разности (девиации) между значениями переменных элементов ансамблей, усредненного по времени и по элементам ансамбля.

Модель и методы исследования

В настоящей работе исследуется модель двух ансамблей нелокально связанных осцилляторов, которая задается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x_i^{t+1} = f_i^t + \frac{\sigma_1}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f_j^t - f_i^t] + \gamma_{21} F_i^t, \\ y_i^{t+1} = g_i^t + \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [g_j^t - g_i^t] + \gamma_{12} G_i^t, \end{cases} \quad (1)$$

где x, y – динамические переменные осцилляторов взаимодействующих ансамблей, i – номер

элемента, $i = 1, \dots, N = 1000$ – общее число элементов в каждом ансамбле, t – дискретное время. Каждый ансамбль представляет собой кольцо логистических отображений с нелокальной связью. Коэффициенты σ_1 и σ_2 задают силу нелокальной связи между элементами в каждом из ансамблей. Параметры P и R определяют количество соседей i -го осциллятора с каждой стороны в первом (x) и втором (y) ансамблях соответственно. Поведение парциальных элементов в системе (1) определяется логистическими отображениями [26–28] $f_i^t = \alpha_1 x_i^t (1 - x_i^t)$, $g_i^t = \alpha_2 y_i^t (1 - y_i^t)$ с различными управляющими (бифуркационными) параметрами α_1 и α_2 .

Связь между одномерными ансамблями является локальной и симметричной, т. е. i -й элемент первого ансамбля связан с i -м элементом второго и определяется функциями связи F_i^t и G_i^t , которые могут задавать инерционную связь: $F_i^t = (y_i^t - x_i^t)$, $G_i^t = (x_i^t - y_i^t)$ или диссипативную связь: $F_i^t = (g_i^t - f_i^t)$, $G_i^t = (f_i^t - g_i^t)$ [29]. Коэффициенты γ_{21} и γ_{12} характеризуют силу связи между взаимодействующими кольцами, или межслойную связь.

Система уравнений (1) решается численно при периодических граничных условиях и начальных условиях x_i^0, y_i^0 , случайно распределенных по элементам $i = 1, 2, \dots, N$ в интервале $[0, 1]$. Вначале, в отсутствие взаимосвязи между ансамблями, проводился расчет установившихся структур в течение $t = 3.5 \times 10^5$ итераций. При введении связи время расчета составляло $t = 10^6$ итераций. Все вычисления проводились с использованием программного комплекса [30].

Реализуемые пространственно-временные структуры иллюстрируются графически с помощью пространственно-временных профилей [31] для переменных x_i и y_i системы (1). В этом случае для каждого элемента ансамблей $i = 1, 2, \dots, N$ на график выводятся первые 100 итераций после периода установления.

Оценка степени синхронизации структур проводится с помощью расчетов квадрата разности (девиации) между значениями переменных x_i и y_i , усредненного по времени и по элементам ансамбля. Среднеквадратичное отклонение, усредненное по времени, определяется следующим образом:

$$\delta_i = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_i^t - x_i^t)^2}, \quad (2)$$



где n – время усреднения, равное времени расчета. Величина δ_i рассчитывается для каждого элемента $i = 1, 2, \dots, N$ взаимодействующих ансамблей при вариации силы межслойной связи между ними. При полной синхронности пространственно-временных структур во времени значение δ_i обращается в ноль для всех $i = 1, 2, \dots, N$. Случай, когда $\delta_i = 0$ для конечной группы осцилляторов взаимодействующих ансамблей, соответствует кластерной синхронизации пространственно-временной структуры. Данная характеристика также позволяет определить, какие области или кластеры элементов в пространстве ансамблей быстрее и эффективнее синхронизируются при изменении коэффициента межслойной связи. Подобная оценка оказывается особенно показательной при исследовании синхронизации фазовых и амплитудных химерных структур.

Расчет среднеквадратичного отклонения по времени и по элементам ансамбля дает общую оценку степени синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные, при вариации силы связи между ансамблями. Эта характеристика вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_i^t - x_i^t)^2}, \quad (3)$$

где N – количество элементов в каждом ансамбле, n – время усреднения, равное времени расчета. Как и для среднеквадратичного отклонения по времени (2), величина Δ стремится к нулю в случае полной идентичности синхронных структур в связанных ансамблях. Характеристика (3) используется в работе для построения областей синхронизации при изменении значения силы межслойной связи.

Эффекты синхронизации взаимодействующих идентичных ансамблей

Рассмотрим эффекты вынужденной и взаимной синхронизации двух идентичных колец (1) для двух различных типов межслойной связи (диссипативной и инерционной). В случае идентичных ансамблей значения управляющих параметров и параметров нелокальной связи будут одинаковыми и фиксируются: $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$, $P = R = 320$. Указанные значения параметров соответствуют хаотиче-

ской динамике индивидуальных осцилляторов и наличию химерных структур в каждом из ансамблей в отсутствие связи между ними. Случайно распределенные начальные условия для всех элементов системы (1) обеспечивают реализацию различных пространственно-временных структур в изолированных ансамблях, включая химерные. Соответствующие пространственно-временные профили для переменных x_i и y_i системы (1) при $\gamma_{21} = \gamma_{12} = 0$ приведены на рис. 1, а, б соответственно.

Как видно из приведенных графиков, в отсутствие межслойной связи в первом кольце наблюдается сосуществование некогерентных кластеров амплитудной (осцилляторы $450 \leq i \leq 550$) и фазовой (осцилляторы $0 \leq i \leq 10$, $780 \leq i \leq 800$ и $980 \leq i \leq 1000$) химер (рис. 1, а) [30–33]. Во втором кольце реализуется режим фазовой химеры (кластеры осцилляторов $360 \leq i \leq 380$ и $800 \leq i \leq 830$) (рис. 1, б).

Вынужденная синхронизация. Рассмотрим случай вынужденной синхронизации при диссипативном и инерционном типах межслойной связи. В этом случае используется однонаправленная связь: первое кольцо (x) является управляющим, а второе кольцо (y) – управляемым. При этом $\gamma_{21} = 0$, $\gamma_{12} = \gamma > 0$. Расчеты показали, что при увеличении силы однонаправленной диссипативной связи первое кольцо начинает влиять на второе кольцо. В результате пространственно-временная структура во втором кольце меняется и при $\gamma > 0.2$ становится полностью идентичной химерной структуре первого кольца (рис. 1, в). Структура второго кольца как бы «захватывается» структурой первой кольца. Таким образом, имеет место вынужденная синхронизация химерной структуры в системе (1). Реализация данного эффекта подтверждается расчетом зависимости среднеквадратичного отклонения Δ (3) от силы межслойной связи γ , приведенной на рис. 1, д. Из графика видно, что значения Δ обращаются строго в ноль при $\gamma > 0.2$, что свидетельствует о полной синхронности наблюдаемых пространственно-временных структур в связанных ансамблях (1).

Перейдём к случаю однонаправленной инерционной связи между ансамблями (1). При увеличении силы межслойной связи структура во втором кольце начинает сильно видоизменяться и усложняться по сравнению с начальной структурой (см. рис. 1, б). Пространственно-временной

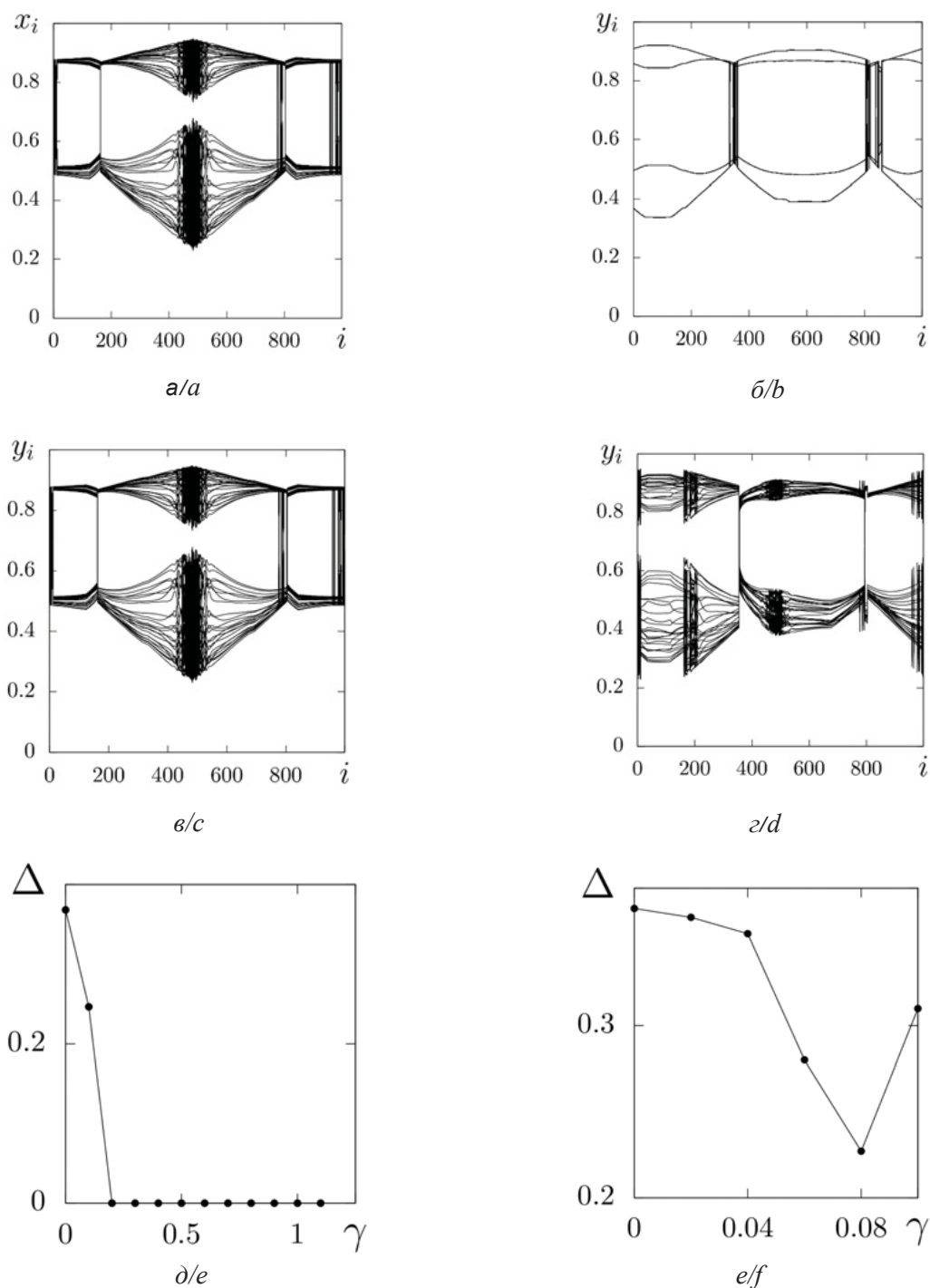


Рис. 1. Иллюстрация эффекта вынужденной синхронизации идентичных ансамблей (1). Пространственно-временные профили для первого (а) и второго (б) колец в отсутствие связи; пространственно-временной профиль второго кольца при $\gamma = 0.2$ (в) и зависимость $\Delta(\gamma)$ (д) при однонаправленной диссипативной связи; пространственно-временной профиль для второго кольца при $\gamma = 0.08$ (з) и зависимость $\Delta(\gamma)$ (е) при инерционной связи. Параметры, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$, $P = R = 320$

Fig. 1. Illustration of external synchronization effect for identical ensembles (1). Space-time profiles for the first (a) and second (b) rings without coupling; space-time profile for the second ring at $\gamma = 0.2$ (c) and dependence $\Delta(\gamma)$ (d) for unidirectional dissipative coupling; space-time profile for the second ring at $\gamma = 0.08$ (z) and dependence $\Delta(\gamma)$ (f) for inertial coupling. Parameters: $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$, $P = R = 320$



профиль второго кольца, реализующийся при $\gamma = 0.08$, приведен на рис. 1, *г*. Исследования показали, что при всех значениях силы связи γ в интервале $[0, 0.1]$ структура второго кольца довольно сильно отличается от структуры управляющего (первого) кольца (см. рис. 1, *а*). Данное обстоятельство подтверждается расчетами среднеквадратичного отклонения Δ при изменении значения силы связи γ . График зависимости $\Delta(\gamma)$ приведен на рис. 1, *е*. Как видно из рисунка, $\Delta > 0.22$ для всех значений γ в диапазоне его изменения $[0, 0.1]$. Минимальное значение величины $\Delta \cong 0.22$ достигается при $\gamma = 0.08$ (рис. 1, *е*).

Таким образом, можно заключить, что эффект вынужденной синхронизации структур в случае однонаправленной инерционной связи между идентичными ансамблями (1) не реализуется.

Взаимная синхронизация. В этом случае межслойная связь является взаимной и симметричной, $\gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma > 0$.

Как показывают численные исследования, при введении взаимной диссипативной связи относительно малой интенсивности в ансамблях (1) наблюдается эффект взаимной синхронизации пространственно-временных структур. При этом установившийся в результате взаимодействия синхронный пространственно-временной режим может существенно отличаться от структур, реализующихся в ансамблях в отсутствие межслойной связи. Взаимосвязанные системы как бы подстраиваются друг под друга и взаимно выбирают определенный синхронный режим. Подобный эффект хорошо известен из классической теории синхронизации предельных циклов [2, 5, 9, 10, 13, 14]. В качестве примера на рис. 2, *а, в* приведены пространственно-временные профили синхронных структур в первом ансамбле (x) для двух различных значений силы связи γ (во втором ансамбле (y) структуры идентичные). Стоит отметить, что с изменением коэффициента связи γ вид синхронных структур в кольцах меняется. Однако при этом среднеквадратичное отклонение значений переменных взаимодействующих подсистем Δ всегда строго равно нулю. Данный факт иллюстрирует график зависимости $\Delta(\gamma)$, приведенный на рис. 2, *д*. Из графика видно, что существует конечная область значений $\gamma \in [0.1, 0.6]$, в которой $\Delta = 0$ и, следовательно, имеет место взаимная синхронизация химерных структур.

Расчеты показали, что при наличии взаимной инерционной связи ансамбли не могут подстроиться друг к другу. Установившиеся пространственно-временные режимы хотя и отличаются от начальных структур (см. рис. 1, *а, б*), но абсолютно не совпадают ни для одного значения γ (рис. 2, *б, г*). Среднеквадратичное отклонение значений x_i и y_i по времени и по элементам ансамбля Δ довольно значительное, как видно из графика зависимости $\Delta(\gamma)$ на рис. 2, *е*. Минимальное значение $\Delta = 0.14$ достигается при $\gamma = 0.08$ для структур, изображенных на рис. 2, *б, г*.

Таким образом, для случая взаимной и симметричной инерционной связи между идентичными ансамблями эффекта синхронизации не наблюдается.

Вынужденная и взаимная синхронизация двух неидентичных ансамблей

Введем теперь расстройку по управляющим параметрам и силе нелокальной связи во взаимодействующих ансамблях (1): $\alpha_1 = 3.7$, $\alpha_2 = 3.85$, $\sigma_1 = 0.23$, $\sigma_2 = 0.15$. При этом $P = R = 320$. Начальные условия на данном этапе установим одинаковыми: $x_i^0 = 0$, $y_i^0 = 0$. При указанных параметрах в отсутствие связи между ансамблями в первом кольце реализуется пространственно-временной режим, включающий некогерентные кластеры амплитудной и фазовой химер (рис. 3, *а*), а во втором – пространственно-временной хаос (рис. 3, *б*).

Вынужденная синхронизация. Проведем исследование динамики системы (1) при однонаправленной связи между ансамблями в условиях диссипативной и инерционной связи между ансамблями. При этом $\gamma_{21} = 0$, $\gamma_{12} = \gamma > 0$.

Как и в случае идентичных ансамблей системы (1), в результате однонаправленного диссипативного воздействия со стороны первого (управляющего) кольца, второе (управляемое) кольцо начинает следовать за динамикой управляющего кольца. При увеличении силы межслойной связи $\gamma \geq 0.3$ пространственно-временные структуры в обоих кольцах становятся практически идентичными (см. рис. 3, *а* и рис. 4, *а*). Таким образом, реализуется эффект вынужденной синхронизации химерной структуры.

На рис. 4, *в* приведены графики зависимости среднеквадратичного отклонения по времени δ_i (2) от номера осциллятора i для различных значений силы межслойной связи γ . Как видно

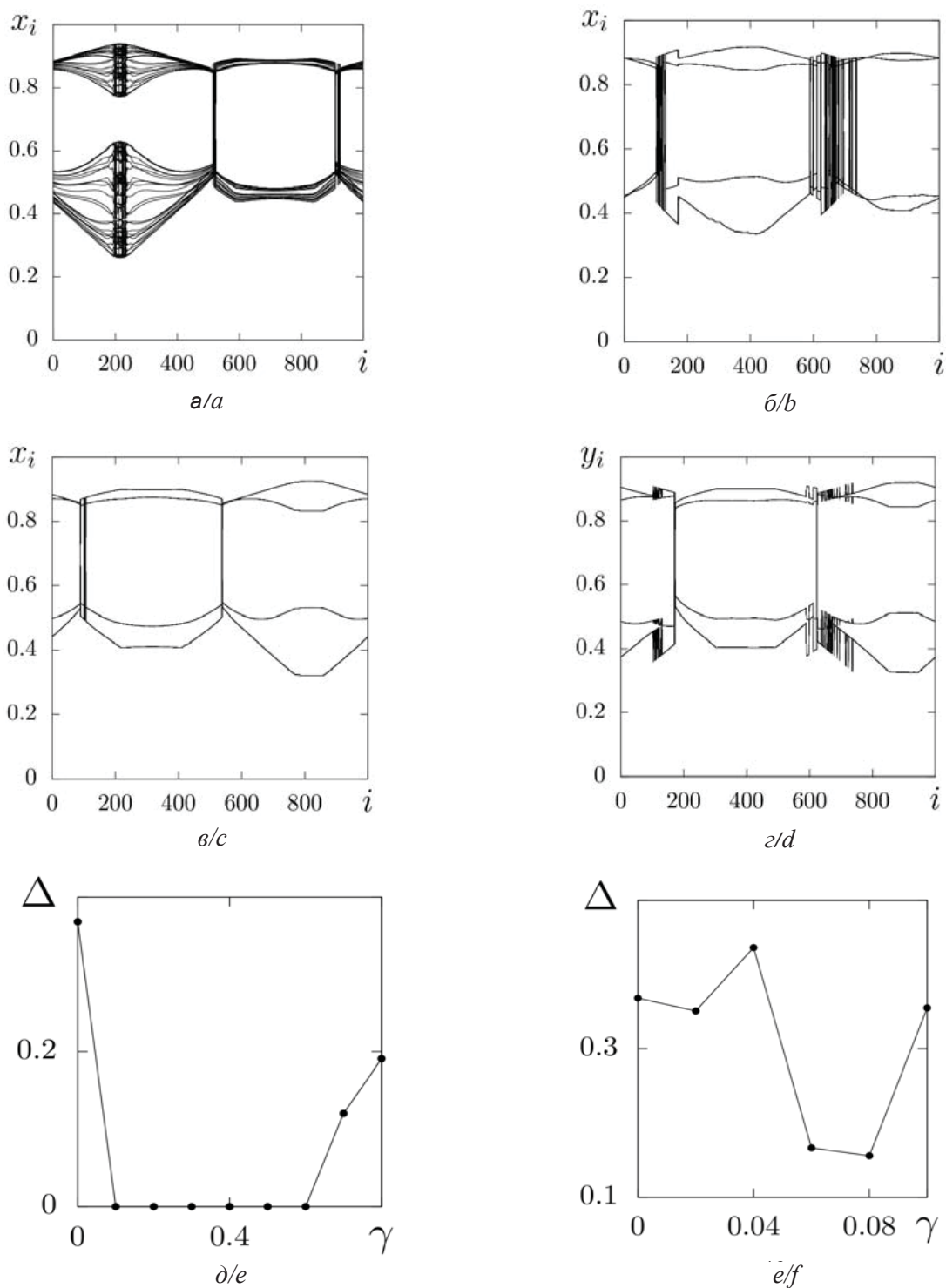


Рис. 2. Иллюстрация эффекта взаимной синхронизации идентичных ансамблей (1) для диссипативной (левая колонка) и инерционной (правая колонка) связи. Пространственно-временные профили амплитуд первого кольца при $\gamma = 0.3$ (а) и $\gamma = 0.4$ (с), пространственно-временные профили для первого кольца (б) и второго кольца (д) при $\gamma = 0.08$, зависимости $\Delta(\gamma)$ (е, ф). Параметры: $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$, $P = R = 320$

Fig. 2. Illustration of mutual synchronization effect for identical ensembles (1) for dissipative (left column) and inertial (right column) coupling. Space-time profiles of amplitudes of the first ring at $\gamma = 0.3$ (a) and $\gamma = 0.4$ (c), space-time profiles for the first (b) and second (d) rings at $\gamma = 0.08$, and dependences $\Delta(\gamma)$ (e, f). Parameters: $\alpha_1 = \alpha_2 = 3.8$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.32$, $P = R = 320$

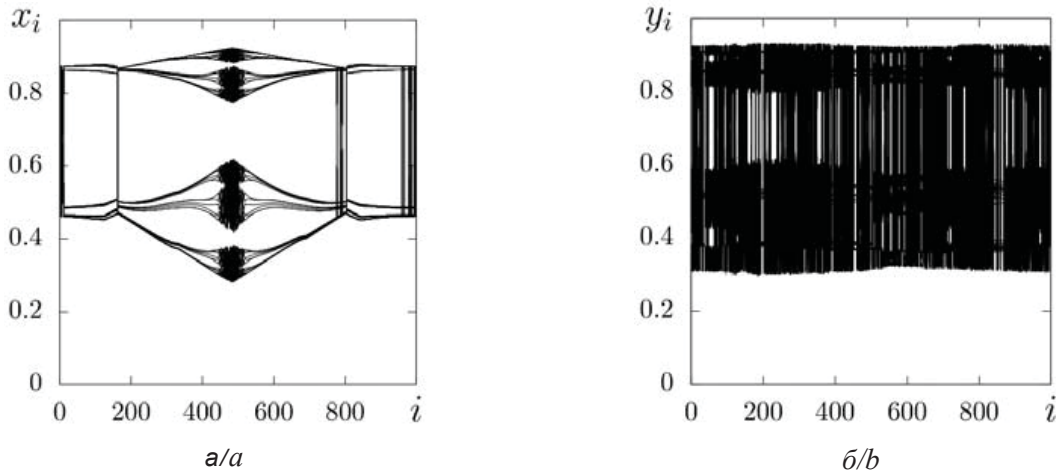


Рис. 3. Пространственно-временные профили для первого кольца (а) и второго кольца (б) в отсутствие связи. Параметры: $\alpha_1 = 3.7$, $\alpha_2 = 3.85$; $\sigma_1 = 0.23$, $\sigma_2 = 0.15$, $P = R = 320$

Fig. 3. Space-time profiles for the first (a) and second (b) rings without coupling. Parameters: $\alpha_1 = 3.7$, $\alpha_2 = 3.85$; $\sigma_1 = 0.23$, $\sigma_2 = 0.15$, $P = R = 320$

из рисунка, некогерентные кластеры химерной структуры по-разному реагируют на увеличение силы связи. Так, например, при $\gamma = 0.15$ элементы, принадлежащие кластеру некогерентности амплитудной химеры ($420 \leq i \leq 500$) и находящиеся в близкой окрестности к нему, хуже (слабее) поддаются синхронизации, для них значения $\delta_i \geq 0.06$. Практически одинаковую степень синхронности и малые значения δ_i при увеличении силы связи демонстрируют элементы некогерентных кластеров фазовой химеры и осцилляторы в когерентной области. Однако стоит заметить, что, начиная с $\gamma \geq 0.3$, элементам некогерентного кластера амплитудной химеры и ее окрестности соответствуют существенно меньшие значения среднеквадратичного отклонения δ_i по сравнению с другими элементами системы. В этом случае $\delta_i \leq 0.02$ при $\gamma \geq 0.5$ (рис. 4, д).

Для количественного обоснования эффекта вынужденной синхронизации на рис. 4, д приведен график зависимости среднеквадратичного отклонения по времени и элементам ансамбля Δ (3) от силы диссипативной межслойной связи. Из рисунка видно, что данная величина не обращается строго в ноль ни для одного значения γ . При увеличении силы связи $\gamma \geq 0.2$, значения Δ уменьшаются плавно и незначительно, достигая своего минимума $\Delta = 0.0098$ при $\gamma = 1.15$. Следовательно, можно сказать, что в случае сильно неидентичных ансамблей (1) имеет место так называемая эффективная вынужденная синхронизация пространственно-временных структур.

Рассмотрим динамику системы (1) при однонаправленной инерционной связи между ансамблями. В этом случае с усилением межслойной связи структура второго (управляемого) ансамбля хотя и упорядочивается по сравнению с начальным распределением (см. рис. 3, б и 4, б), но абсолютно отличается от структуры первого кольца (см. рис. 3, а). Как видно из графиков зависимости среднеквадратичных отклонений по времени δ_i , представленных на рис. 4, г для трех значений γ , для всех элементов ансамбля отклонения принимают довольно большие значения, что свидетельствует об отсутствии синхронизации. Расчеты отклонения, усредненного по времени и по ансамблю Δ (рис. 4, е), также отражают факт невозможности реализовать эффект вынужденной синхронизации химерной структуры в случае инерционного типа связи между ансамблями. На приведенном графике (рис. 4, е) можно видеть только два минимальных значения величины Δ ($\Delta = 0.138$ при $\gamma = 0.12$ и $\Delta = 0.15$ при $\gamma = 0.16$). При других значениях силы межслойной связи отклонение Δ между ансамблями является существенным по сравнению со случаем однонаправленной диссипативной связи (см. рис. 4, д).

Взаимная синхронизация. При наличии взаимной диссипативной связи в системе (1) пространственно-временные структуры во взаимодействующих ансамблях видоизменяются, и при $\gamma \geq 0.1$ происходит синхронизация химерных структур. В качестве иллюстрации на рис. 5, а, в показаны пространственно-временные профи-

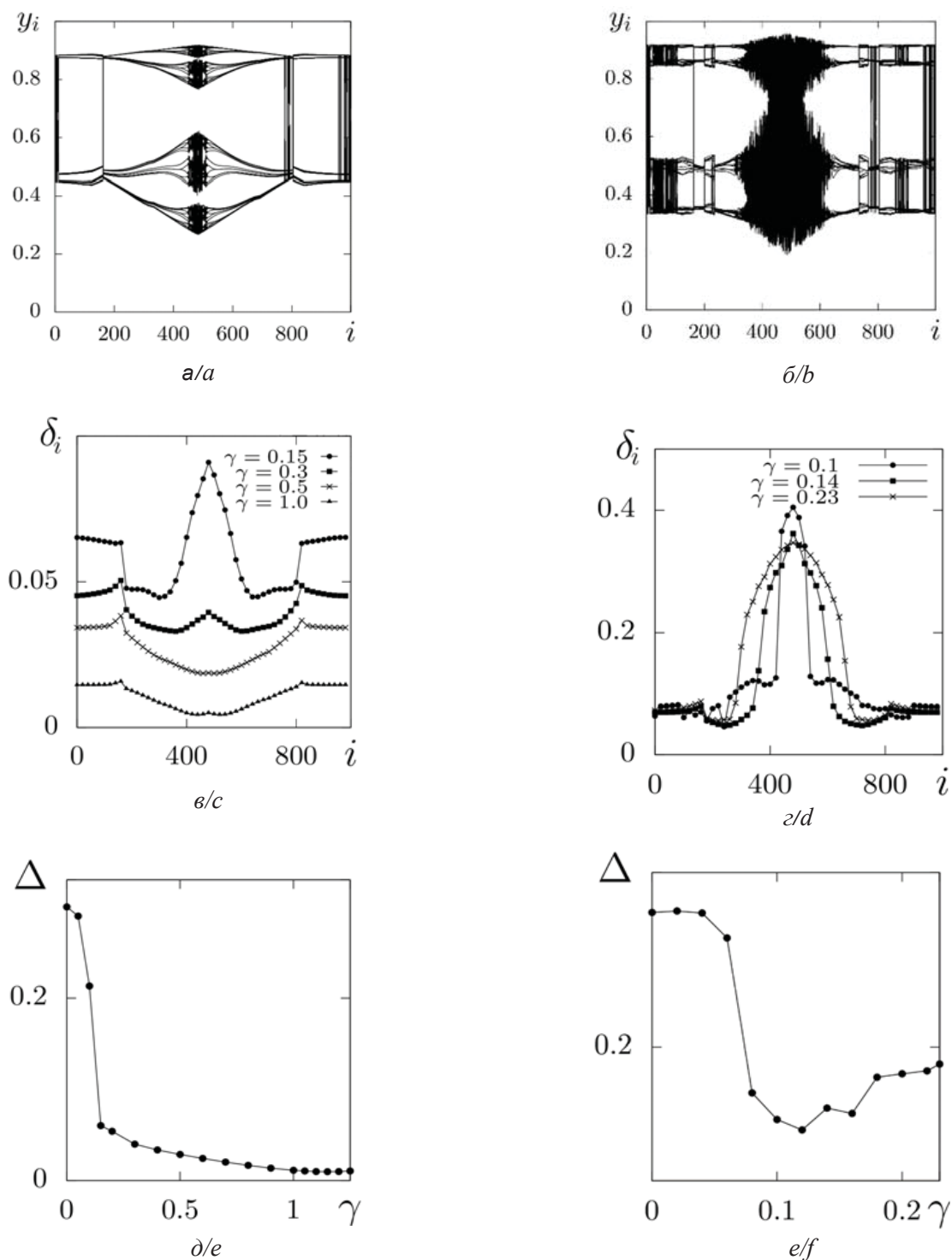


Рис. 4. Иллюстрация эффекта вынужденной синхронизации неидентичных ансамблей (1) при однонаправленной диссипативной (левая колонка) и инерционной (правая колонка) связи. Пространственно-временные профили для второго кольца при $\gamma = 0.2$ (а) и $\gamma = 0.12$ (б), графики зависимости δ_i от номера осциллятора i для различных значений γ (в, д) и зависимости $\Delta(\gamma)$ (е, ф). Параметры: $\alpha_1 = 3.7, \alpha_2 = 3.85, \sigma_1 = 0.23, \sigma_2 = 0.15, P = R = 320$

Fig. 4. Illustration of external synchronization effect of nonidentical ensembles (1) for unidirectional dissipative (left column) and inertial (right column) coupling. Space-time profiles for the second ring at $\gamma = 0.2$ (a) and $\gamma = 0.12$ (b), dependences of δ_i on the oscillator number i for different values of γ (c, d), and dependences $\Delta(\gamma)$ (e, f). Parameters: $\alpha_1 = 3.7, \alpha_2 = 3.85, \sigma_1 = 0.23, \sigma_2 = 0.15, P = R = 320$

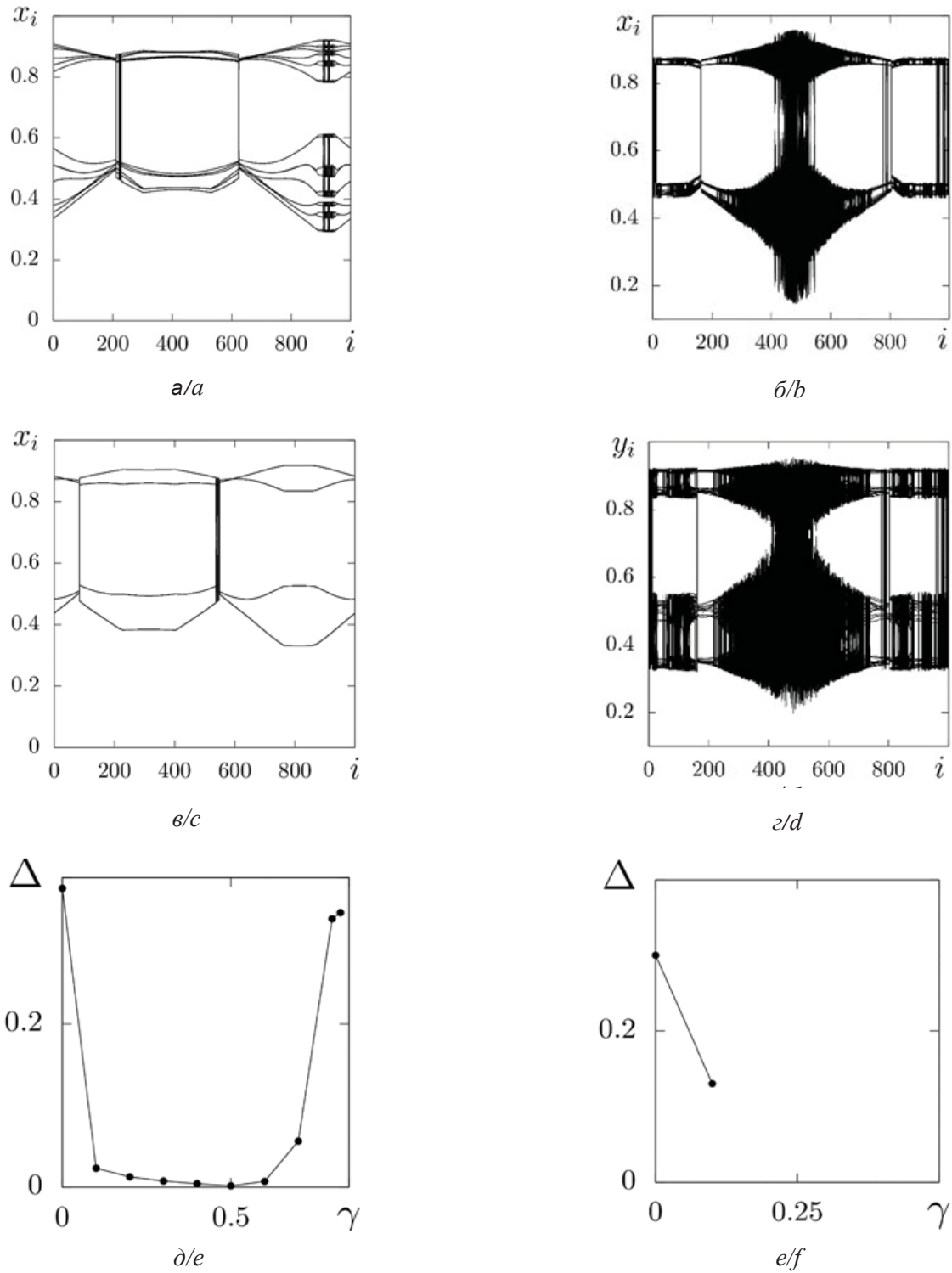


Рис. 5. Иллюстрация эффекта взаимной синхронизации неидентичных ансамблей при диссипативной (левая колонка) и инерционной (правая колонка) связи. Пространственно-временные профили для первого кольца $\gamma = 0.2$ (а) и $\gamma = 0.5$ (е), пространственно-временные профили для колец x (б) и y (д) при $\gamma = 0.1$, зависимости $\Delta(\gamma)$ (е, е). Параметры: $\alpha_1 = 3.7$, $\alpha_2 = 3.85$, $\sigma_1 = 0.23$, $\sigma_2 = 0.15$, $P = R = 320$

Fig. 5. Illustration of mutual synchronization effect of nonidentical ensembles (1) for dissipative (left column) and inertial (right column) coupling. Space-time profiles for the first ring at $\gamma = 0.2$ (a) and $\gamma = 0.5$ (c), space-time profiles for the rings x (b) and y (d) at $\gamma = 0.1$, and dependences $\Delta(\gamma)$ (e, f). Parameters: $\alpha_1 = 3.7$, $\alpha_2 = 3.85$, $\sigma_1 = 0.23$, $\sigma_2 = 0.15$, $P = R = 320$



ли синхронных структур для двух значений силы межслойной связи. Как видно из рисунка, профили реализуемых во взаимодействующих ансамблях структур существенно изменяются при увеличении силы связи, но остаются синхронными. Данное наблюдение подтверждается расчетами среднеквадратичного отклонения по времени и элементам ансамбля Δ при вариации параметра связи γ (рис. 5, д). В силу неидентичности взаимодействующих ансамблей величина Δ не может быть строго равной нулю. Если в качестве критерия взаимной синхронизации принять выполнение условия $\Delta < 0.02$, то на графике зависимости $\Delta(\gamma)$ (рис. 5, д) можно выделить конечную область значений параметра связи $\gamma \in [0.1, 0.6]$, отвечающую конечной области эффективной взаимной синхронизации.

Проведенные расчеты показали, что в случае взаимной инерционной связи между неидентичными ансамблями достичь взаимной синхронизации не удастся. Из сравнения пространственно-временных профилей, приведенных на рис. 5, б, г для первого и второго колец соответственно, пространственно-временные структуры, реализующиеся во взаимосвязанных ансамблях при увеличении силы межслойной связи, сильно отличаются друг от друга. При этом среднеквадратичное отклонение по времени и элементам ансамбля Δ (рис. 5, е) является существенным, а при $\gamma > 0.1$ траектории подсистем уходят на бесконечность.

Заключение

В настоящей работе проведено численное моделирование эффектов синхронизации в системе двух взаимодействующих ансамблей нелокально связанных логистических отображений. Была рассмотрена динамика ансамблей в случаях диссипативной и инерционной связи между идентичными и неидентичными ансамблями. Показано, что при различных значениях управляющих параметров системы можно наблюдать такие структуры, как пространственно-временной хаос, пространственно-однородный режим, а также амплитудные и фазовые химерные состояния.

Установлено, что эффекты внешней и взаимной синхронизации легко достижимы при диссипативной межслойной связи. При этом в случае идентичных ансамблей наблюдается явление полной синхронизации (значения среднеквадратичного отклонения по времени и элементам ансамбля близки к нулю). В случае неидентичных ансамблей значения статистических характери-

стик не равны нулю, что объясняется наличием расстройки по параметрам взаимодействующих ансамблей. В этом случае имеет место эффективная синхронизация с заданной точностью.

Проведенные исследования и сравнительный анализ показали, что при наличии инерционной межслойной связи как между идентичными, так и неидентичными ансамблями эффектов вынужденной и взаимной синхронизации достичь практически невозможно.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Немецкого Физического Общества (проект 163436311-SFB 910). В.С.А. и Г.И.С. благодарят за финансовую поддержку РФФИ и DFG (проект № 20-52-12004, получение результатов, написание текста). А.В.Б. благодарит за финансовую поддержку РФФИ (проект № 19-32-90005, анализ результатов).

Список литературы

1. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1951. 380 с.
2. Андронов А. А. Собрание трудов. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1956. 538 с.
3. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М. : Гостехиздат, 1952. 272 с.
4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М. : Мир, 1968. 432 с.
5. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М. : Наука, 1971. 896 с.
6. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математические модели в биофизике. М. : Наука, 1975. 344 с.
7. Демьянченко А. Г. Синхронизация генераторов гармонических колебаний. М. : Энергия, 1976. 240 с.
8. Winfree A. T. The geometry of biological time. N.Y. : Springer, 1980. 779 p.
9. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М. : Наука, 1980. 359 с.
10. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М. : Наука, 1981. 351 с.
11. Kuramoto Y. Chemical Oscillations Waves and Turbulence. Berlin : Springer, 1984. 176 p.
12. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М. : Наука, 1997. 496 с.
13. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М. : Техносфера, 2003. 496 с.
14. Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Стрелкова Г. И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М. ; Ижевск : Науч.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 144 с.



15. Анищенко В. С., Постнов Д. Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569–573.
16. Tass P., Rosenblum M. G., Weule J., Kurths J., Pikovsky A., Volkman J., Schnitzler A., Freund H. J. Detection of Phase Locking from Noisy Data : Application to Magnetoencephalography // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 3291.
17. Rothkegel A., Lehnertz K. Irregular macroscopic dynamics due to chimera states in small-world networks of pulse-coupled oscillators // New J. Phys. 2014. Vol. 16. P. 055006.
18. Andrzejak R. G., Rummel C., Mormann F., Schindler K. All together now : Analogies between chimera state collapses and epileptic seizures // Sci. Rep. 2016. Vol. 6. P. 23000.
19. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // Nonlinear Phenom. in Complex Syst. 2002. Vol. 5, № 4. P. 380–385.
20. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera States for Coupled Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93, iss. 17. P. 174102.
21. Andrzejak R. G., Ruzzene G., Malvestio I. Generalized Synchronization between Chimera States // Chaos. 2017. Vol. 27, № 5. P. 053114.
22. Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Synchronization of Chimera States in Coupled Networks of Nonlinear Chaotic Oscillators // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, № 4. P. 419–433.
23. Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Synchronization of Chimera States in a Network of Many Unidirectionally Coupled Layers of Discrete Maps // Reg. and Chaot. Dyn. 2018. Vol. 23, № 7–8. P. 948–960.
24. Leyva I., Sendica-Nadal I., Sevilla-Escoboza R., Vera-Avila V. P., Chholak P., Boccaletti S. Relay synchronization in multiplex networks // Sci. Rep. 2018. Vol. 8. P. 8629.
25. Boccaletti S., Almendral J. A., Guana S., Leyva I., Liu Z., Sendiña-Nadal I., Wang Z., Zou Y. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics : Percolation and synchronization // Phys. Rep. 2016. Vol. 660. P. 1–94.
26. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. of Stat. Phys. 1978. Vol. 19, iss. 1. P. 25–52.
27. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems // Physica D. 1983. Vol. 7. P. 16–39.
28. May R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics // Nature. 1976. Vol. 26. P. 457.
29. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. 2-е изд. М. : Физматлит, 2006. 309 с. (Сер. Современная теория колебаний и волн).
30. Бух А. В., Анищенко В. С. Компьютерная программа для моделирования сетей динамических элементов со сложными связями. Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018618877 от 23 июля 2018 г.
31. Bogomolov S. A., Slepnev A. V., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2017. Vol. 43. P. 25–36.
32. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel Ph., Schöll E. Loss of Coherence in Dynamical Networks : Spatial Chaos and Chimera States // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 234102.
33. Богомолов С. А., Стрелкова Г. И., Schöll E., Анищенко В. С. Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, вып. 14. С. 103–110.

Образец для цитирования:

Богатенко Т. Р., Бух А. В., Анищенко В. С., Стрелкова Г. И. Эффекты синхронизации двухслойной сети нелокально связанных хаотических отображений с диссипативной и инерционной связью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 42–54. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-1-42-54>

Synchronization Effects in a Two-Layer Network of Nonlocally Coupled Chaotic Maps with Dissipative and Inertial Intercoupling

T. R. Bogatenko, A. V. Bukh,
V. S. Anishchenko, G. I. Strelkova

Tatiana R. Bogatenko, <https://orcid.org/0000-0002-4007-7649>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, tatiana_bogatenko@rambler.ru

Andrei V. Bukh, <https://orcid.org/0000-0002-4786-6157>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, buh.andrey@yandex.ru

Vadim S. Anishchenko, <http://orcid.org/0000-0003-2255-1498>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, wadim@info.sgu.ru

Galina I. Strelkova, <http://orcid.org/0000-0002-8667-2742>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, strelkovagi@info.sgu.ru

Background and Objectives: As external and mutual synchronisation effects are conventional, the study of these phenomena in networks of nonlocally coupled chaotic maps is of much interest. In this paper we study the effects of synchronization in a two-layer network of nonlocally coupled discrete-time systems. Each layer represents a ring of nonlocally coupled logistic maps in the chaotic



regime. Depending on the initial conditions and parameter values, they can demonstrate various spatiotemporal patterns, including amplitude and phase chimera structures. The network equations are being solved numerically for periodic boundary conditions and randomly distributed initial conditions. We consider interaction between identical and nonidentical ensembles for dissipative and inertial intercoupling.

Materials and Methods: The analysis is carried out with the use of a set of programs in C++ which was developed for modelling dynamic systems with complex intercoupling definition. Synchronization effect is estimated by calculating root-mean-square deviations between the symmetric elements of the rings. The first characteristic to consider is the time deviation which is used to determine the clusters that respond to the impact and synchronize faster as the intercoupling strength grows. The second quantity is the time and ensemble deviation and it is used for quantifying the synchronization effect and estimating the synchronization region in dependence of the interlayer coupling.

Results: The numerical research has shown that the effects of external and mutual synchronisation are clearly visible in the case of dissipative intercoupling. The best results were obtained for identical ensembles, however, nonidentical ensembles can be synchronized as well with a given accuracy. In the case of external synchronisation of nonidentical ensembles for dissipative intercoupling we have ascertained that amplitude chimera structures synchronize faster than the phase ones. Both systems are much harder or impossible to synchronize for the case of inertial intercoupling. **Conclusion:** The numerical results obtained in this paper allow to understand the course of synchronization effects of chimera states appearing in a two-layer network of nonlocally coupled chaotic oscillators for dissipative and inertial intercoupling.

Keywords: ensemble of coupled oscillators, synchronisation, nonlocal coupling, phase and amplitude chimeras, dissipative and inertial intercoupling.

Received: 16.11.2019 / Accepted: 25.12.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This work was funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) – Projektnummer 163436311-SFB 910. V.S.A. and G.I.S. thank for the financial support provided by RFBR and DFG according to the research project No. 20-52-12004 (obtaining results, writing the manuscript). A.V.B. thanks for the financial support provided by RFBR, project No. 19-32-90005 (analysis of the results).

References

1. Ch. Huygens (Hugenii). *Horologium Oscillatorium*. Parisii, France, 1673. (Eng. ed.: *The Pendulum Clock*. Ames, Iowa State Univ. Press, 1986. 182 p.).
2. Andronov A. A. *Sobranie trudov* [Collection Works]. Moscow, Leningrad, Izdatel'stvo AN USSR, 1956. 538 p. (in Russian).
3. Teodorichik K. F. *Avtokolebatelnye sistemy* [Self-oscillating Systems]. Moscow, Gostechizdat Publ., 1952. 272 p. (in Russian).
4. Hayashi C. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. Princeton University Press, 1986. 432 p.
5. Blekhman I. I. *Sinkhronizacija dinamičeskikh sistem* [Synchronization of Dynamic Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 896 p. (in Russian).
6. Romanovskii Yu. M., Stepanova N. V., Chernavskij D. S. *Matematicheskie modeli v biofizike* [Mathematical Models in Biophysics]. Moscow, Nauka Publ., 2003. 344 p. (in Russian).
7. Dem'jančenko A. G. *Sinkhronizacija generatorov garmoničeskikh kolebanij* [The Synchronization of Harmonic Oscillation Generators]. Moscow, Energija Publ., 1976. 240 p. (in Russian).
8. Winfree A. T. *The Geometry of Biological Time*. New York, Springer, 1980. 779 p.
9. Landa P. S. *Avtokolebanija v sistemakh s konečnym čislom stepenej svobody* [Self-Oscillatory Systems with a Finite Number of Degrees of Freedom]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 359 p. (in Russian).
10. Blekhman I. I. *Sinkhronizacija v prirode i tekhnike* [Synchronization in Nature and Technology]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 351 p. (in Russian).
11. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations Waves and Turbulence*. Berlin, Springer, 1984. 176 p.
12. Landa P. S. *Nelineinye kolebanija i volny* [Nonlinear Oscillations and Waves]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 496 p. (in Russian).
13. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Sinkhronizacija. Fundamental'noe nelinejnoe javlenie* [Synchronization. A Fundamental Nonlinear Phenomenon]. Moscow, Technosfera Publ., 2003. 496 p. (in Russian).
14. Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. *Sinkhronizacija reguljarnykh, khaotičeskikh i stokhastičeskikh kolebanij* [Synchronization of regular, chaotic and stochastic oscillations]. Moscow, Izhevsk, Nauchno-izdatel'skiy tsentr "Reguljarnaya i khaotičeskaya dinamika", 2008. 144 p. (in Russian).
15. Anishchenko V. S., Postnov D. E. Effect of basic frequency locking of chaotic self-oscillations. Synchronization of strange attractors. *Pis'ma v ZhTF* [Letters to ZhTF], 1988, vol. 14, iss. 6, pp. 569–573.
16. Tass P., Rosenblum M. G., Weule J., Kurths J., Pikovsky A., Volkman J., Schnitzler A., Freund H. J. Detection of Phase Locking from Noisy Data: Application to Magnetoencephalography. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, vol. 81, pp. 3291.
17. Rothkegel A., Lehnertz K. Irregular macroscopic dynamics due to chimera states in small-world networks of pulse-coupled oscillators. *New J. Phys.*, 2014, vol. 16, pp. 055006.
18. Andrzejak R. G., Rummel C., Mormann F., Schindler K. All together now: Analogies between chimera state collapses and epileptic seizures. *Sci. Rep.*, 2016, vol. 6, pp. 23000.
19. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. *Nonlinear Phenom. in Complex Syst.*, 2002, vol. 5, no. 4, pp. 380–385.



20. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera States for Coupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, iss. 17, pp. 174102.
21. Andrzejak R. G., Ruzzeno G., Malvestio I. Generalized Synchronization between Chimera States. *Chaos*, 2017, vol. 27, no. 5, pp. 053114.
22. Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Synchronization of Chimera States in Coupled Networks of Nonlinear Chaotic Oscillators. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 419–433.
23. Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Synchronization of Chimera States in a Network of Many Unidirectionally Coupled Layers of Discrete Maps. *Reg. and Chaot. Dyn.*, 2018, vol. 23, nos. 7–8, pp. 948–960.
24. Leyva I., Sendica-Nadal I., Sevilla-Escoboza R., Vera-Avila V. P., Chholak P., Boccaletti S. Relay synchronization in multiplex networks. *Sci. Rep.*, 2018, vol. 8, pp. 8629.
25. Boccaletti S., Almendral J. A., Guana S., Leyva I., Liu Z., Sendiña-Nadal I., Wang Z., Zou Y. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization. *Phys. Rep.*, 2016, vol. 660, pp. 1–94.
26. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. of Stat. Physics*, 1978, vol. 19, iss. 1, pp. 25–52.
27. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D*, 1983, vol. 7, pp. 16–39.
28. May R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 1976, vol. 26, pp. 457.
29. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Ryskin N. M. *Nelinejnye kolebanija. 2-e izd.* [Nonlinear oscillations. 2nd ed.]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 309 p. (in Russian).
30. Bukh A. V., Anishchenko V. S. *Programma dlja modelirovanija setej dinamicheskikh elementov so slozhnymi svyazjami* [Program for modelling networks of dynamic elements with complex connections]. Certificate on state registration of a computer program no. 2018618877 dated 23.07.2018 г. (in Russian).
31. Bogomolov S. A., Slepnev A. V., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2017, vol. 43, pp. 25–36.
32. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel Ph., Schöll E. Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, pp. 234102.
33. Bogomolov S. A., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S. Amplitude and phase chimeras in an ensemble of chaotic oscillators. *Technical Physics Letters*, 2016, vol. 42, iss. 7, pp. 765–768. DOI: 10.1134/S1063785016070191

Cite this article as:

Bogatenko T. R., Bukh A. V., Anishchenko V. S., Strelkova G. I. Synchronization Effects in a Two-Layer Network of Nonlocally Coupled Chaotic Maps with Dissipative and Inertial Intercoupling. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 42–54 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-1-42-54>
