



ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 537.8+537.9+621.371

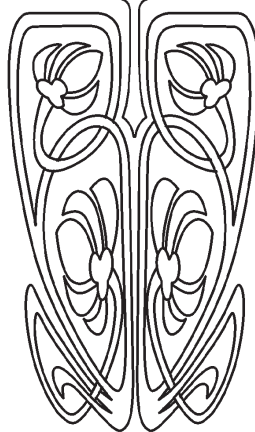
Плазмон-поляритоны вдоль поверхности асимметричного гиперболического метаматериала

М. В. Давидович

Давидович Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиотехники и электродинамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, DavidovichMV@info.sgu.ru



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



Рассмотрены плазмон-поляритоны вдоль поверхности гиперболического метаматериала и вдоль слоя из него, распространяющиеся в плоскости оси анизотропии (ось в плоскости поляризации составляет произвольный угол с направлением распространения). Использован строгий подход на основе уравнений Максвелла. Параметры гиперболического метаматериала в виде тензора эффективной диэлектрической проницаемости определены путем гомогенизации. Диэлектрическая проницаемость металлических слоев определена по модели Друде–Лоренца. Изменение оси производится с использованием матрицы поворота системы координат, при этом соответствующим образом преобразуется тензор эффективной диэлектрической проницаемости. Рассмотрена возможность использования графеновых слоев с проводимостью листа графена на основе модели Кубо. Найдены условия существования быстрых, медленных, втекающих, вытекающих, прямых и обратных плазмон-поляритонов. Обратным плазмонам соответствует волна, в которой фазовая скорость противоположна скорости переноса энергии. Классификация волн произведена как на основе вычисления вектора Пойнтинга, так и путем решения дисперсионного уравнения и определения знаков действительной и мнимой частей постоянной распространения. Получены формулы Френеля для дифракции плоской волны произвольной поляризации на такой структуре. Применены методы аналитического и численного решения дисперсионных уравнений. Получены частные аналитические решения дисперсионных уравнений. Найден новый тип обратных плазмон-поляритонов, распространяющийся вдоль плоской границы массивного образца гиперболического метаматериала с вакуумом, не существующий для сплошного металлического образца. Рассмотрена возможность управления дисперсией путем приложения внешнего магнитного поля, а также возможность усиления плазмон-поляритонов в волноводах из метаматериала с оптически накачанными листами графена, а также при дифракции на плоскостных структурах.

Ключевые слова: гиперболический метаматериал, гомогенизация, плазмон-поляритоны, дисперсионное уравнение, уравнение Френеля, формулы Френеля.

Поступила в редакцию: 07.08.2019 / Принята: 12.10.2019 / Опубликовано: 02.12.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-4-288-303>

Введение

В последнее время возрос интерес к метаматериалам или искусственным средам (ИС) с гиперболическим законом дисперсии [1–22], получившим название гиперболических метаматериалов (ГММ), включая ГММ в области, где одна из компонент тензора эффективной диэлектрической проницаемости (ДП) близка к нулю, или так



называемых ENZ (epsilon-near-zero) ИС [23]. ГММ есть ИС, обычно одноосный электромагнитный или фотонный кристалл (ФК), в которой гомогенизация дает различные по знаку реальные части двух главных диагональных компонент тензора эффективной ДП. Обычно он изготавливается из периодически внедренных в диэлектрическую основу тонких проводящих металлических, полупроводниковых или графеновых слоев (рис. 1). В таком одноосном электромагнитном кристалле ось направлена перпендикулярно слоям, и две поперечные к оси компоненты ДП $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon'_{\perp} - i\varepsilon''_{\perp}$ могут обладать свойством $\varepsilon'_{\perp} < 0$, тогда как для продольной компоненты выполнено $\varepsilon'_{\parallel} > 0$ (ГММ второго типа). ГММ первого типа обычно изготавливают из проводящих наноцилиндров, периодически внедренных в диэлектрическую основу [1–6]. Для них возможно условие $\varepsilon'_{\parallel} = \varepsilon'_{\perp} < 0$, где ось ГММ направлена по оси цилиндров. Мы будем рассматривать ГММ второго типа в виде плоскостной периодической ИС, но покажем, что при некоторых условиях он ведет себя как ГММ первого типа. Пусть среда состоит из тонких металлических слоев наноразмерной толщины t_m , периодически внедренных с периодом $t_p = t_m + t_d$ в недиссипативный диэлектрик с ДП $\varepsilon_d > 1$. Здесь t_d – расстояние между слоями металла или толщина слоя диэлектрика (см. рис. 1). ДП металла возьмем в форме ДрUDE–Лоренца $\varepsilon_m = \varepsilon_L - \omega_p^2 / (\omega^2 - i\omega\omega_c)$ или $\varepsilon_m = \varepsilon' - i\varepsilon''$, в которой обозначена плазменная частота и частота столкновений. Реально ДП тонких слоев зависит от их толщины и определяется квантовыми эффектами. Мы будем использовать приближенные параметры для массивного серебряного образца $\omega_p = 1.6 \cdot 10^{16}$ Гц, $\omega_c = 4.5 \cdot 10^{13}$ Гц, $\varepsilon_L = 9$. Направим ось z перпендикулярно слоям. Величина $\varepsilon' = \varepsilon_L - \omega_p^2 / (\omega^2 + \omega_c^2)$ будет отрицательной для частот $\omega < \sqrt{\omega_p^2 / \varepsilon_L - \omega_c^2}$ или длин волн λ примерно больше 350 нм, при этом $\varepsilon'' = \omega_p^2 \omega_c / (\omega^3 + \omega\omega_c^2)$ величина малая. Рассмотрим условия слабой диссипации. Очевидно, это $\omega_c \ll \omega < \sqrt{\omega_p^2 / (\varepsilon_L + 1) - \omega_c^2} \approx \omega_p / \sqrt{\varepsilon_L + 1}$. Это условие существования медленных ПП на границе металл–вакуум. В этом случае $\varepsilon' < -1$, $\varepsilon'' / |\varepsilon'| \ll 1$.

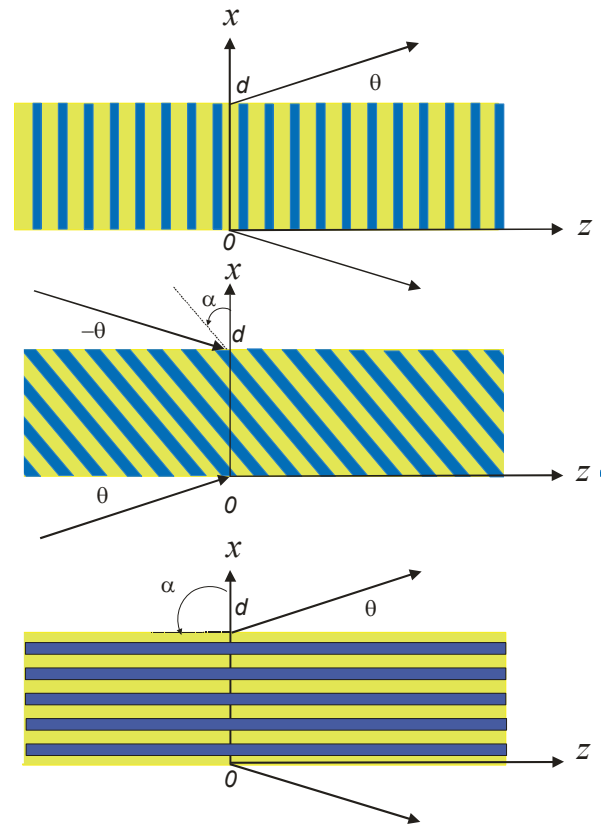


Рис. 1. Слой ГММ толщины d из проводящих листов металла или графена, периодически внедренных в диэлектрик сверху, и такие же слои, полученные разрезами ГММ под углом $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/2$ к кристаллографической оси

Fig. 1. HMM layer with thickness d of conductive metal or graphene sheets periodically embedded in the dielectric from above, and the same layers obtained by HMM sections at an angle $\alpha = \pi/4$ and $\alpha = \pi/2$ to the crystallographic axis

1. Метод исследования

Для рассматриваемой ИС в приближении отсутствия пространственной дисперсии (ПД) гомогенизация дается простыми формулами [13–16]

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = (t_m \varepsilon_m + t_d \varepsilon_d) / t_p,$$

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{zz} = \left((t_m / t_p) \varepsilon_m^{-1} + (t_d / t_p) \varepsilon_d^{-1} \right)^{-1}.$$

Формулы с учетом ПД можно посмотреть в [16] и в ряде других работ. Далее считаем ε_d порядка 2–5. Найдем условие, когда $\varepsilon'_{\perp} < 0$. Обозначив коэффициент заполнения металлом $K = t_m / t_p$, получаем:

$$\omega < \sqrt{\frac{\omega_p^2}{(\varepsilon_L + (1/K - 1)\varepsilon_d)} - \omega_c^2}.$$

Если пренебречь диссипацией и взять $K = 0.5$, будем иметь $\omega < \omega_p / \sqrt{12}$, т.е. это длины волн



более 400 нм. Для выполнения гомогенизации в оптическом диапазоне вполне достаточно использовать структуры с периодом $t < 40$ нм, т.е. с толщинами слоев порядка 20 нм и менее. Для простоты положим $K = 0.5$ и получим параметры эффективной ДП при слабой диссипации. Рассмотрим несколько случаев. Пусть сначала $\varepsilon' = -\varepsilon_d$. В этой области $\varepsilon_{xx} = -i\varepsilon''/2$, $\varepsilon_{zz} = 2\varepsilon_d(1 - i\varepsilon_d/\varepsilon'')$, т.е. поперечная компонента мала и мнимая, а продольная компонента сильно диссипативная. Пусть теперь $\varepsilon' \ll -\varepsilon_d$. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= (\varepsilon' + \varepsilon_d - i\varepsilon'')/2, \\ \varepsilon'_{zz} &= \frac{2\varepsilon_d}{(\varepsilon' - \varepsilon_d)} \left(|\varepsilon'| + \varepsilon''^2 / (|\varepsilon'| - \varepsilon_d) \right), \\ \varepsilon''_{zz} &= \frac{2\varepsilon_d\varepsilon''}{(|\varepsilon'| - \varepsilon_d)} \left(|\varepsilon'| / (|\varepsilon'| - \varepsilon_d) - 1 \right). \end{aligned}$$

Если $-\varepsilon_d < \varepsilon' < 0$ и $\varepsilon_d - |\varepsilon'_m| \gg \varepsilon''$, то $\varepsilon'_{xx} = (\varepsilon_d - |\varepsilon'|)/2 > 0$, и имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{zz} &= \frac{2\varepsilon_d}{(\varepsilon_d - |\varepsilon'|)} \left(-|\varepsilon'| + \varepsilon''^2 / (\varepsilon_d - |\varepsilon'|) \right), \\ \varepsilon''_{zz} &= \frac{2\varepsilon_d\varepsilon''}{(\varepsilon_d - |\varepsilon'|)} \left(1 + |\varepsilon'| / (\varepsilon_d - |\varepsilon'|) \right). \end{aligned}$$

В этом случае при условии $|\varepsilon'| > \varepsilon''^2 / (\varepsilon_d - |\varepsilon'|)$ получаем $\varepsilon'_{xx} > 0$ и $\varepsilon'_{zz} < 0$, т.е. ИС становится ГММ первого рода. Пусть, наконец, $\varepsilon' \approx 0$. В этой области при конечной диссипации $\varepsilon_{zz} = 2\varepsilon''(\varepsilon''/\varepsilon_d - i)$, $\varepsilon_{xx} = (\varepsilon_d - i\varepsilon'')/2$, т.е. продольная компонента мала и сильно диссипативная. Это так называемая область ENZ [23]. Нам далее будет интересен случай $\varepsilon'_{zz} = -\varepsilon'_{xx}$. Это уравнение легко решается. Если $\varepsilon' \ll -\varepsilon_d$, условие $\varepsilon'_{zz} = -\varepsilon'_{xx}$ выполнено с точностью до малого члена $\varepsilon''^2 / (2\varepsilon'^2)$, если $\varepsilon_d = (3 - \sqrt{8})|\varepsilon'|$ или $\varepsilon' = -\varepsilon_d(3 + 2\sqrt{2})$. В этом случае имеем $\varepsilon'_{zz} = -\varepsilon'_{xx} + \varepsilon''^2 / (2\varepsilon'^2)$, $\varepsilon''_{zz} = \varepsilon'' \left(1/2 - \sqrt{3 - \sqrt{8}} \right) = 0.086\varepsilon''$.

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha)\varepsilon_{xx} + \sin^2(\alpha)\varepsilon_{zz} & 0 & \sin(\alpha)\cos(\alpha)(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}) \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha)(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}) & 0 & \cos^2(\alpha)\varepsilon_{zz} + \sin^2(\alpha)\varepsilon_{xx} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Если $-\varepsilon_d < \varepsilon' < 0$, то условие $\varepsilon'_{zz} = -\varepsilon'_{xx}$ приводит к решению $\varepsilon_d = (3 + \sqrt{8})|\varepsilon'|$. В этом случае опять $\varepsilon'_{zz} = -|\varepsilon'_{xx}| + \varepsilon''^2 / (2\varepsilon'^2)$, и $\varepsilon''_{zz} = \varepsilon'' \left(\sqrt{3 + \sqrt{8}} + (3 + \sqrt{8})/2 \right) = 5.32\varepsilon''$, т.е. диссипация здесь выше. Очевидно, при сдвиге частоты условие $\varepsilon'_{zz} = -\varepsilon'_{xx}$ может быть выполнено точно, при этом несколько изменится диссипация.

В бесконечной среде из ГММ мы рассматриваем электромагнитную волну вида

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, z, t) &= \mathbf{E}_0 \exp(i(\omega t - k_x x - k_z z)), \\ \mathbf{H}(x, z, t) &= \mathbf{H}_0 \exp(i(\omega t - k_x x - k_z z)). \end{aligned}$$

Такая среда описывается гомогенизированным тензором эффективной диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

в котором для ГММ из периодических плосколоистых структур с проводящими пленками, нормаль к которым ориентирована по оси z , имеем $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon'_\perp - i\varepsilon''_\perp$, причем величина ε'_\perp может быть отрицательной. Рассмотрим матрицу поворота структуры вокруг оси y на угол α :

$$\hat{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Действуя на вектор \mathbf{E} , она дает:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \cos(\alpha) - E_z \sin(\alpha), \quad E'_y = E_y, \\ E'_z &= E_x \sin(\alpha) + E_z \cos(\alpha), \end{aligned}$$

т.е. имеет место поворот против часовой стрелки. При этом матрица (1) примет вид $\tilde{\varepsilon} = \hat{T}^{-1}(\alpha)\hat{\varepsilon}\hat{T}(\alpha) = \hat{T}(-\alpha)\hat{\varepsilon}\hat{T}(\alpha)$ или



Запишем однородные уравнения Максвелла в такой ИС: $\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E}$, $\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mathbf{H}$.

Расписывая их по компонентам, имеем:

$$\begin{aligned} \partial_y H_z - \partial_z H_y &= -\partial_x H_y = i\omega \varepsilon_0 (\tilde{\varepsilon}_{xx} E_x + \tilde{\varepsilon}_{xz} E_z), \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z &= i\omega \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_{xx} E_y, \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x &= \partial_x H_y = i\omega \varepsilon_0 (\tilde{\varepsilon}_{xx} E_x + \tilde{\varepsilon}_{zz} E_z), \\ \partial_y E_z - \partial_z E_y &= -\partial_x E_y = -i\omega \mu_0 H_x, \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z &= -i\omega \mu_0 H_y, \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x &= \partial_x E_y = -i\omega \mu_0 H_z. \end{aligned}$$

В этих уравнениях мы учли, что поля не зависят от y . Эти уравнения разбиваются на две системы уравнений: $E_y \neq 0$, $H_y = 0$ и $H_y \neq 0$, $E_y = 0$. Первая имеет вид:

$$\begin{aligned} Z_0(k_x H_z - k_z H_x) &= k_0 \tilde{\varepsilon}_{xx} E_y, \\ k_z E_y &= -Z_0 k_0 H_x, \\ k_x E_y &= Z_0 k_0 H_z, \\ H_y &= E_x = E_z = 0. \end{aligned}$$

Вторая, в которой $E_y = H_x = H_z = 0$, записывается как

$$\begin{aligned} Z_0 k_z H_y &= k_0 (\tilde{\varepsilon}_{xx} E_x + \tilde{\varepsilon}_{xz} E_z), \\ -Z_0 k_x H_y &= k_0 (\tilde{\varepsilon}_{xz} E_x + \tilde{\varepsilon}_{zz} E_z), \\ k_z E_x - k_x E_z &= Z_0 k_0 H_y. \end{aligned}$$

Здесь $Z_0 = c\mu_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$. Первый тип уравнений дает Н-волну относительно оси z , а второй – Е-волну. Рассмотрим сначала последнюю. Равенство нулю ее определителя дает дисперсионное уравнение (ДУ) Френеля $\tilde{\varepsilon}_{xx} k_x^2 + \tilde{\varepsilon}_{zz} k_z^2 + 2\tilde{\varepsilon}_{xz} k_x k_z = k_0^2 (\tilde{\varepsilon}_{xx} \tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{xz}^2)$. Из двух уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{xx} E_x + \tilde{\varepsilon}_{xz} E_z &= Z_0 H_y k_z / k_0, \\ \tilde{\varepsilon}_{xz} E_x + \tilde{\varepsilon}_{zz} E_z &= -Z_0 H_y k_x / k_0 \end{aligned}$$

следуют соотношения

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{Z_0 H_y}{k_0} \frac{\tilde{\varepsilon}_{zz} k_z + \tilde{\varepsilon}_{xz} k_x}{\tilde{\varepsilon}_{xx} \tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{xz}^2}, \\ E_z &= -\frac{Z_0 H_y}{k_0} \frac{\tilde{\varepsilon}_{xz} k_z + \tilde{\varepsilon}_{xx} k_x}{\tilde{\varepsilon}_{xx} \tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{xz}^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя их в третье, имеем это ДУ, которое запишем в форме

$$\frac{k_x^2}{\tilde{\varepsilon}_{zz}} + \frac{k_z^2}{\tilde{\varepsilon}_{xx}} + \frac{2\tilde{\varepsilon}_{xz}}{\tilde{\varepsilon}_{xx}\tilde{\varepsilon}_{zz}} k_x k_z = k_0^2 \frac{\Delta}{\tilde{\varepsilon}_{xx}\tilde{\varepsilon}_{zz}}. \quad (5)$$

Здесь обозначено $\Delta = \tilde{\varepsilon}_{xx}\tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{xz}^2$. Из этого уравнения Френеля для необыкновенной волны определяем два значения

$$k_x^\pm = -k_z \tilde{\varepsilon}_{xz} / \tilde{\varepsilon}_{xx} \pm \sqrt{(k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{xx} - k_z^2) \Delta} / \tilde{\varepsilon}_{xx}. \quad (6)$$

Два значения соответствуют противоположным волнам вдоль $\pm x$. В симметричном ГММ $k_x^- = -k_x^+$. Второе уравнение в (4) позволяет найти импеданс:

$$\begin{aligned} Z^\pm &= -E_z / H_y = \frac{Z_0}{k_0} \frac{\tilde{\varepsilon}_{xz} k_z + \tilde{\varepsilon}_{xx} k_x^\pm}{\Delta} = \\ &= \pm Z_0 \sqrt{(\tilde{\varepsilon}_{xx} - k_z^2 / k_0^2) / \Delta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Его знак зависит от направления: $Z^\pm = \pm Z_0 \rho$, $\rho = \sqrt{(\tilde{\varepsilon}_{xx} - k_z^2 / k_0^2) / \Delta}$. Приравняв $Z_0 \rho$ импедансу Е-волны в вакууме $Z_0 \rho_0 = Z_0 \sqrt{1 - k_z^2 / k_0^2}$, распространяющейся вдоль оси x , получаем дисперсионное уравнение (ДУ) для Е-плазмон-поляритона (ЕПП) вдоль поверхности

$$\rho = \sqrt{1 - k_z^2 / k_0^2}. \quad (8)$$

Оно определяет две взаимно-противоположные волны вдоль каждого из направлений $\pm z$: $k_z = \pm k_0 \sqrt{(\Delta - \tilde{\varepsilon}_{xx}) / (\Delta - 1)}$. В случае симметрии $\tilde{\varepsilon}_{xz} = 0$ имеем решение $k_z = \pm k_0 \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{xx}(\tilde{\varepsilon}_{zz} - 1) / (\tilde{\varepsilon}_{xx}\tilde{\varepsilon}_{zz} - 1)}$. Этот ПП очень медленный, если $\tilde{\varepsilon}_{xx}\tilde{\varepsilon}_{zz} \approx 1$ (рис. 2). В случае $\tilde{\varepsilon}_{xx} = \tilde{\varepsilon}_{zz}$ это ДУ поляритона Ценнека [24–29]. В слоистой структуре это равенство не возможно. Такой слой должен быть однородным, либо диэлектрическим, либо металлическим. В последнем случае максимальное замедление будет при $\varepsilon' = -1$, т.е. на частоте плазмонного резонанса.

В случае волны в пластине решение имеет вид

$$H_y = \exp(-ik_z z) [A^+ \exp(-ik_x^+ x) + A^- \exp(-ik_x^- x)], \quad (9)$$

а компоненты электрического поля определяются по формулам (4). Нам потребуется компонента

$$E_z = \frac{\exp(-ik_z z)}{-c\varepsilon_0 k_0} [A^+ \rho \exp(-ik_x^+ x) - A^- \rho \exp(-ik_x^- x)] \quad (10)$$

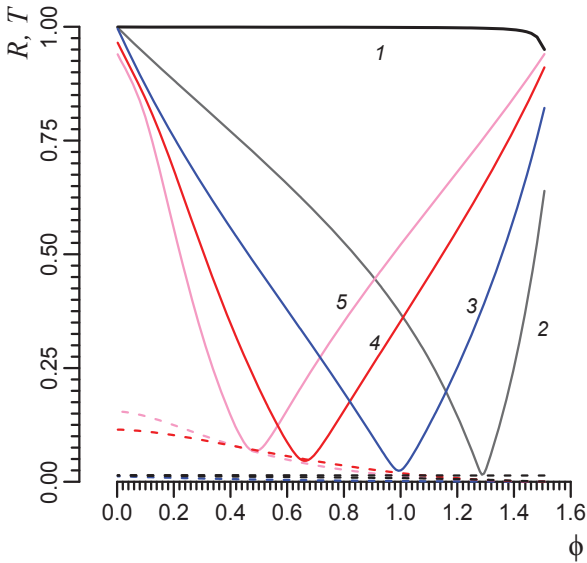


Рис. 2. Зависимость коэффициентов отражения R (сплошные кривые) и прохождения T (штриховые кривые) от угла падения ϕ для структуры ГММ с $d = 420$ нм, $t_m = t_d = 20$ нм, $\epsilon_d = 3$ при различных значениях угла α : $\alpha = 0$ (кривая 1), $\alpha = \pi/12$ (2), $\alpha = \pi/8$ (3), $\alpha = \pi/4$ (4), $\alpha = \pi/3$ (5)
 Fig. 2. Dependence of the reflectance R (solid curves) and transmission T (dashed curves) coefficients on the angle of incidence ϕ for the HMM structure with $d = 420$ nm, $t_m = t_d = 20$ nm, $\epsilon_d = 3$ at different values of angle α : $\alpha = 0$ (curve 1), $\alpha = \pi/12$ (2), $\alpha = \pi/8$ (3), $\alpha = \pi/4$ (4), $\alpha = \pi/3$ (5)

В вакууме нам также потребуются решения волнового уравнения в таком виде:

$$\begin{aligned} H_y &= B \exp(-ik_z z) \exp(-ik_{0x}(x-d)), \\ E_z &= -BZ_0(k_{0x}/k_0) \exp(-ik_z z) \exp(-ik_{0x}(x-d)), \\ H_y &= C \exp(-ik_z z) \exp(ik_{0x}x), \\ E_z &= CZ_0(k_{0x}/k_0) \exp(-ik_z z) \exp(ik_{0x}x). \end{aligned} \quad (11)$$

Они записаны для областей $x > d$ и $x < 0$. Для них $k_{0x}^2 + k_z^2 = k_0^2$, причем направление движения энергии быстрой волны ($\text{Re}(k_z^2) < k_0^2$) принято от пластины в вакуум (вытекание). Для симметричной структуры $k_x^+ = -k_x^-$. Поля на обеих сторонах имеют идентичные зависимости и могут иметь либо экспоненциальное убывание в сторону вакуума (поверхностная втекающая волна), либо экспоненциальное нарастание (антиповерхностная вытекающая волна). Поэтому достаточно ввести одну константу в (11) и считать поля на одной поверхности [24]. Втекание означает движение энергии из вакуума с обеих сторон и поглощение в пластине. При слабом втекании поверхностная волна может быть слабо диссипативной. Выте-

кание означает излучение запасенной энергии из пластины в вакуум. Сильное вытекание даже при слабой диссипации сопровождается большими радиационными потерями. Знаки в (11) выбраны согласно условиям излучения, т.е. вытекания. Вытекание может смениться втеканием при повышении частоты. Втекающие с одной стороны и вытекающие с другой стороны (или в другую сторону) моды для рассматриваемой структуры не возможны. Для симметричного случая доказательство простое. Ее ДУ получается приравнением входного импеданса с одной стороны импедансу волны в вакууме [24–29], т.е. наложением условия $R = 0$. Трансформируя импеданс волны в вакууме и приравнявая его такому же импедансу, получаем $\tan(k_x d) = 0$. Это не ДУ, а условие согласования, при котором коэффициент отражения R равен нулю. Для прозрачного слоя это условие баночного согласования в линии передачи при полуволновой толщине диэлектрика слоя (банки). Трансформация означает однонаправленную передачу энергии. ДУ получается, если изменить знак у одного из импедансов. Для несимметричного случая разные условия втекания-вытекания приводят к изменению знака импеданса и k_{0x} в одном из уравнений (11). Такая система уравнений не имеет решения.

Определяя $k_{0x} = \pm \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$, следует учесть, что знак надо выбирать так, чтобы медленная волна в диссипативную структуру ГММ из вакуума была втекающая ($k'_{0x} < 0$), т.е. энергия из вакуума должна втекать в пластину [24–29]. В этом смысле, взяв $k_{0x} = k'_{0x} - ik''_{0x}$, следует потребовать выполнение $k'_{0x} < 0$ и $k''_{0x} > 0$ для втекающей волны и $k'_{0x} > 0$, $k''_{0x} < 0$ для вытекающей. Видим, что втекающая волна поверхностная (убывающая от поверхностей в сторону вакуума), а вытекающая волна антиповерхностная (экспоненциально нарастающая). Берем $k_z = k'_z - ik''_z$. При слабой диссипации в медленной волне $k_z'^2 > k_0^2$ имеем

$$\begin{aligned} k_{0x} &= \mp i \sqrt{k_z'^2 - k_0^2} = \mp i \sqrt{k_z'^2 - k_z''^2 - k_0^2 - 2ik'_z k''_z} \approx \\ &\approx \mp i \sqrt{k_z'^2 - k_0^2 - 2ik'_z k''_z} \approx \mp i \sqrt{k_z'^2 - k_0^2} \left(1 - \frac{ik'_z k''_z}{k_z'^2 - k_0^2} \right), \end{aligned}$$

поэтому $k'_{0x} = -\sqrt{k_z'^2 - k_0^2}$, $k''_{0x} = -k'_z k''_z / \sqrt{k_z'^2 - k_0^2}$, т.е. взят знак минус, и волна действитель-



но втекающая. Сверху волна падает из вакуума под углом вытекания (см. рис. 1) $\theta = \arctan(k'_{0x} / k'_z) = -\arctan(\sqrt{1 - k_0^2 / k_z'^2})$, а снизу – под углом $-\theta$. В случае $k_z'^2 < k_0^2$ волна быстрая. Для нее $k_{0x} = \pm\sqrt{k_0^2 - k_z'^2 - k_z''^2 + 2ik_z'k_z''} \approx \pm\sqrt{k_0^2 - k_z'^2} (1 + ik_z'k_z'' / (k_0^2 - k_z'^2))$. В этом случае следует взять знак «плюс», $k'_{0x} = \sqrt{k_0^2 - k_z'^2}$, $k''_{0x} = k_z'k_z'' / \sqrt{k_0^2 - k_z'^2}$, и волна вытекает (см. рис. 1) под углом вытекания $\theta = \arctan(k'_x / k'_z) = \arctan(\sqrt{k_0^2 / k_z'^2 - 1})$. Следует отметить, что направление волны вдоль z мы определяем по направлению движения энергии, т.е. за положительное берем такое, когда $k_z'' > 0$ и имеет место зависимость $\exp(-k_z''z)$. Следовательно, затухание в сторону движения энергии. Если при этом $k_z' > 0$, то такая волна прямая. Если же $k_z' < 0$, то волна обратная. В ней фаза и энергия движутся противоположно. Видим, что в обратной волне со слабой диссипацией втекание заменяется вытеканием и наоборот. Однако при сильной диссипации извлечение корня может не приводить к такому эффекту, т.е. возможны все режимы. Сшивая касательные компоненты, получаем:

$$\begin{aligned} B &= A^+ \exp(-ik_x^+ d) + A^- \exp(-ik_x^- d), \\ C &= A^+ + A^-, \\ B\rho_0 &= \rho [A^+ \exp(-ik_x^+ d) - A^- \exp(-ik_x^- d)], \\ -C\rho_0 / \rho &= A^+ - A^-. \end{aligned} \quad (12)$$

Имеем $A^\pm = C(1 \mp \rho_0 / \rho)$. Делим третье уравнение на первое и получаем ДУ в форме

$$\rho_0 = \rho \frac{(\rho - \rho_0) \exp(-ik_x^+ d) - (\rho + \rho_0) \exp(-ik_x^- d)}{(\rho - \rho_0) \exp(-ik_x^+ d) + (\rho + \rho_0) \exp(-ik_x^- d)}. \quad (13)$$

В случае симметрии оно принимает вид

$$\rho_0 = -\rho \frac{\rho_0 + i\rho \tan(k_x d)}{\rho + i\rho_0 \tan(k_x d)},$$

или $2i\rho_0\rho = (\rho^2 + \rho_0^2) \tan(k_x d)$. Имеем решение $\rho_0 = \rho [i \tan(k_x d / 2)]^{\pm 1}$. Верхний знак соответствует электрической стенке в центре, а нижний – магнитной. В общем случае

$$2\rho\rho_0\alpha = \rho^2 + \rho_0^2, \quad \alpha = \frac{\exp(-ik_x^+ d) + \exp(-ik_x^- d)}{\exp(-ik_x^+ d) - \exp(-ik_x^- d)}$$

Имеем два ДУ: $\rho_0 = \rho(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1})$. Обозначим

$\beta_\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Тогда для квадрата замедления найдем $n^2 = (\tilde{\epsilon}_{xx}\tilde{\epsilon}_{zz} - \tilde{\epsilon}_{xz}^2 - \tilde{\epsilon}_{xx}\beta_\pm^2) / (\tilde{\epsilon}_{xx}\tilde{\epsilon}_{zz} - \tilde{\epsilon}_{xz}^2 - \beta_\pm^2)$. Большое замедление возможно, если мал знаменатель или велик числитель.

Рассмотрим ДУ для Н-ПП. Подставляя компоненты магнитного поля в первое уравнение, имеем ДУ $k_x^2 + k_z^2 = k_0^2 \tilde{\epsilon}_{xx}$. Это уравнение Френеля обыкновенной волны. Для нее импеданс вдоль оси x имеет вид $Z = E_y / H_z = Z_0 k_0 / \sqrt{k_0^2 \tilde{\epsilon}_{xx} - k_z^2}$. Он не может быть согласован с соответствующим импедансом в вакууме, поэтому Н-ПП вдоль плоскости с бесконечным образом ГММ не существует. Однако он имеет место, если имеется конечный слой ГММ. В этом случае, так же как и для одиночного металлического слоя [25–29], имеем два решения:

$$\sqrt{k_0^2 \tilde{\epsilon}_{xx} - k_z^2} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2} \left[i \tan \left(d \sqrt{k_0^2 \tilde{\epsilon}_{xx} - k_z^2} / 2 \right) \right]^{\pm 1}. \quad (14)$$

Решение со знаком «плюс» соответствует электрической стенке, а со знаком «минус» – магнитной стенке в центре слоя. Эти уравнения такие же, как и для металлического слоя с заменой $\tilde{\epsilon}_{xx} \rightarrow \epsilon_m$ [25, 26]. Поскольку возможны медленные ПП с $k_z'^2 > k_0^2$, ДУ (14) удобно преобразовать к виду

$$\sqrt{k_z^2 - k_0^2 \tilde{\epsilon}_{xx}} = \sqrt{k_z^2 - k_0^2} \left[\tanh \left(d \sqrt{k_z^2 - k_0^2 \tilde{\epsilon}_{xx}} / 2 \right) \right]^{\pm 1}. \quad (15)$$

Обозначим гиперболический тангенс как T , возведем уравнение (15) в квадрат и будем считать, что плазмон достаточно медленный. Тогда $k_z^2 = k_0^2 (1 - \tilde{\epsilon}_{xx} T^{\mp 2}) / (1 + T^{\mp 2})$. Если диссипацией можно пренебречь, $k_z^2 = k_0^2 (1 + |\tilde{\epsilon}'_{xx}| T^{\mp 2}) / (1 - T^{\mp 2})$. В этом случае для медленного ПП величина T должна быть меньше единицы и близка к ней. Видим, что возможно решение $k_z^- = k_0 \sqrt{(1 + |\tilde{\epsilon}'_{xx}| T^2) / (1 - T^2)}$ с медленным ПП, а плазмон k_z^+ очень медленным и слабо диссипативным быть не может.

2. Исследование частных случаев

Рассмотрим частные случаи. Они возникают при разных углах оптической оси с осью z или между нормалью к поверхности и плоскостями слоев.



Угол $\alpha = 0$. Для него $\tilde{\varepsilon}_{xz} = 0$ и $k_x^\pm = \pm k_x = \pm \sqrt{\varepsilon_{zz}(k_0^2 - k_z^2 / \varepsilon_{xx})}$. ДУ для слоя можно записать в виде

$$k_z^2 / k_0^2 = \varepsilon_{xx} \frac{\varepsilon_{zz} + \tan^2(k_x d / 2)}{\tan^2(k_x d / 2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz}}$$

Пусть $\varepsilon' = 0$. Тогда $\varepsilon_{xx} = (\varepsilon_d - i\varepsilon'')/2$, а продольная компонента $\varepsilon_{zz} = -2i\varepsilon''\varepsilon_d / (\varepsilon_d - i\varepsilon'') \approx -2i\varepsilon'' / \varepsilon_d$ мала и сильно диссипативная. Обыкновенная волна в таком ГММ ведет себя как в диэлектрике. Для необыкновенной волны при этих условиях из (8) следует приближенное решение для ПП вдоль поверхности полубесконечного образца

$$k_z = \pm k_0 \sqrt{\varepsilon_d (1 - i\varepsilon''(\varepsilon_d + 1/\varepsilon_d)/2)}. \quad (16)$$

Это медленный ПП вдоль поверхности бесконечно толстого образца. Для него из уравнения Френеля следует $k_x = (1 - i)k_0 \sqrt{\varepsilon'' / \varepsilon_d} / 2$, т.е. он затухает в глубь образца. Имеем также

$$k_{0x} = \sqrt{k_0^2 - k_0^2 \varepsilon_d (1 - \varepsilon''^2(\varepsilon_d + 1/\varepsilon_d)^2 / 4 - i\varepsilon''(\varepsilon_d + 1/\varepsilon_d)/2)} \approx -ik_0 \sqrt{\varepsilon_d - 1},$$

т.е. ПП затухает и в сторону вакуума. Рассмотрим теперь область $\varepsilon' = -\varepsilon_d$. Для нее $\varepsilon_{xx} = -i\varepsilon''/2$, $\varepsilon_{zz} = 2\varepsilon_d(1 - i\varepsilon_d / \varepsilon'')$. Из ДУ (8) следует

$$k_z = \pm k_0 \frac{\varepsilon_d}{\sqrt{1 + \varepsilon_d^2}} \left(1 + i\varepsilon'' \frac{\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)(1 + \varepsilon_d^2)}{4\varepsilon_d^2(1 + \varepsilon_d^2)} \right).$$

Это обратный быстрый слабо диссипативный ПП. ДУ (13) удобно анализировать в случае малой толщины слоя. В этом случае заменяем тангенс его аргументом

$$\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (1 - k_z^2 / k_0^2) = \left[(k_z^2 / k_0^2 - \varepsilon_{xx}) \varepsilon_{zz} (1 - k_z^2 / k_0^2 / \varepsilon_{xx}) (k_0 d / 2)^2 \right]^{1/2}. \quad (17)$$

Считаем квадратную скобку малой. Также считаем $k_0 d \ll 1$. В случае верхнего знака ПП быстрый. Его дисперсия определяется из квадратного уравнения. Заменяя в правой части k_z^2 / k_0^2 единицей, приближенно в области малых частот получаем $k_z^2 / k_0^2 = 1 + (1 - \varepsilon_{xx})^2 (k_0 d / (2\varepsilon_{xx}))^2$. Здесь предположено, что величина $|\varepsilon_{xx}|$ не мала. В случае нижнего знака (магнитной стенки) ПП более медленный, и на низких частотах $k_z \approx k_0 \sqrt{\varepsilon_{xx}}$. Обозначим

$T = i \tan(k_x d / 2) = \tanh(d \sqrt{\varepsilon_{zz}(k_x^2 - \varepsilon_{xx} k_0^2)}) = 1 - \delta$. Если $|\varepsilon_{zz}| \neq 0$, то в области больших замедлений тангенс гиперболический близок к единице, т.е. δ – малая величина. Поэтому

$$k_z^2 / k_0^2 \approx \varepsilon_{xx} \frac{\varepsilon_{zz} - 1}{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - 1} \pm 2\delta \frac{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx} - 1)}{(\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - 1)^2}.$$

Условие медленности здесь то же, что и для полуплоскости: это плазмонный резонанс $\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} \rightarrow 1$. Около него $|\delta| < |\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - 1| \ll 1$, поскольку гиперболический тангенс стремится к единице экспоненциально быстро.

Угол $\alpha = \pm\pi/2$. Этот случай соответствует нижнему рис. 1, т.е. структура превращается в плоскостойкий волновод. Возможен его строгий анализ без гомогенизации [16]. В области $\varepsilon'_{xx} < 0$ возможны ПП, аналогичные ПП вдоль металлического слоя. Этот случай интересен в плане сравнения строгого решения для дисперсии с полученным на основе гомогенизации и будет рассмотрен ниже.

Угол $\alpha = \pm\pi/4$. В этом случае матрица (3) принимает вид

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) & 0 & \pm(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}) \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ \pm(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}) & 0 & (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Он упрощается, если $\varepsilon'_{zz} = -\varepsilon'_{xx} > 0$, поскольку тогда $\tilde{\varepsilon}_{xx} = \tilde{\varepsilon}_{zz} \approx -0.3i\varepsilon''$, $\tilde{\varepsilon}_{xz} \approx \pm(\varepsilon'_{zz} + i\varepsilon''/4)$. Другой режим $\varepsilon'_{zz} = -\varepsilon'_{xx} < 0$ приводит к значениям $\tilde{\varepsilon}_{xx} = \tilde{\varepsilon}_{zz} = -2.9li\varepsilon''$, $\tilde{\varepsilon}_{xz} \approx \pm(-\varepsilon'_{xx} - i2.41\varepsilon'')$. В этом случае тензор ДП (18) более диссипативный. В отсутствие диссипации ДУ (5) приобретает вид $k_x k_z = \mp k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{xz} / 2$ и определяет асимптоты гиперболического закона дисперсии. В таком приближении компоненты волнового вектора не ограничены. ДУ для ПП вдоль границы бесконечно толстого образца ГММ теперь примет вид

$$k_z^2 / k_0^2 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz} - 2\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz}}{2(1 - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz})}. \quad (19)$$

В указанной выше области этот ПП быстрый:

$$k_z^2 / k_0^2 \approx \frac{\varepsilon_d^2 (3 + 2\sqrt{2})}{1 + \varepsilon_d^2 (3 + 2\sqrt{2})}.$$

Из уравнения Френеля (6) имеем

$$k_x^+ = -k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{xx} / 2k_z, \quad k_x^- = -2k_z (1 - k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{xx} / (4k_z^2)).$$



Рассмотрим ДУ (13) и ПП, распространяющийся вдоль слоя. В рассмотренной области $\beta_{\pm}^2 \approx -[1 \pm \cos(k_z d)]^2 / \sin^2(k_z d)$, поэтому ПП медленным быть не может. Быстрые волны при ненулевом угле связаны с ПП, идущими вдоль слоев металла под углом к оси. Поскольку $\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} = \varepsilon_m\varepsilon_d$, ПП при данном угле может быть медленным, если $\varepsilon_m \approx 1/\varepsilon_d$, т.е. выше частоты $\omega_p / \sqrt{\varepsilon_L}$. Это уже высокочастотный оптический поляритон. Решение вопроса о прямой или обратной волне получается вычислением $k'_z = k_z - ik''_z$ и определением знака отношения k'_z/k''_z [24–29]. Величина k'_z определяет движение фазы, а k''_z – затухание или движение энергии в сторону затухания. Поэтому $k'_z/k''_z > 0$ означает прямую волну, а $k'_z/k''_z < 0$ – обратную. Другой способ определения – вычисление компоненты вектора Пойнтинга для необыкновенной волны

$$S_z = \text{Re}(E_x H_y^*)/2 = \frac{Z_0 |H_y|^2}{2k_0} \text{Re} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_{zz} k_z + \tilde{\varepsilon}_{xz} k_x}{\tilde{\varepsilon}_{xx} \tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{xz}^2} \right) \quad (20)$$

и аналогичной компоненты для обыкновенной волны

$$S_z = \text{Re}(E_y H_x^*)/2 = Z_0^{-1} |E_y|^2 k'_z / (2k_0). \quad (21)$$

Заметим, что здесь

$$|H_y(x, z)|^2 = |H_y(x, 0)|^2 \exp(-2k''_z z),$$

$$|E_y(x, z)|^2 = |E_y(x, 0)|^2 \exp(-2k''_z z).$$

Сразу видим, что для обыкновенной волны и Н-ПП направление потока мощности дает величина k'_z . В вакууме обыкновенной волне соответствует s -поляризация и та же компонента (21) вектора Пойнтинга. Для p -поляризации в вакууме $S_z = \text{Re}(E_x H_y^*)/2 = Z_0 |H_y|^2 k'_z / (2k_0)$, поэтому определение направления движения энергии для Е-ПП требует решения ДУ и вычисления интеграла от S_z по бесконечному поперечному сечению, что является более сложной процедурой. Кроме того, формула (20) записана для бесконечного образца, и тогда в нее можно подставлять любое из двух значений k_x^{\pm} из (6). Для конечного образца следует учесть две волны в поперечном направлении и определить их амплитуды (см. далее), что еще более усложняет задачу. Поэтому

будем пользоваться методом на основе определения знака k'_z/k''_z . Его неудобство проявляется лишь в области перехода от быстрой волны к медленной, где $k'_z \approx \pm k_0$, $k''_z \approx 0$. Для простых волноведущих структур типа металлической полоски эквивалентность обоих подходов доказана. Для решения вопроса о втекании или вытекании следует вычислять компоненту вектора Пойнтинга S_x в вакууме при полученном из ДУ значении k_z . Это более простая процедура. Для верхнего полупространства с Е-ПП имеем $S_x = -\text{Re}(E_z H_y^*)/2 = Z_0 |H_y|^2 k'_x / (2k_0)$, т.е. при $k'_x > 0$ волна вытекает, а при $k'_x < 0$ – втекает. Соотношения (11) записаны так, что имеет место одновременное втекание или вытекание в обоих полупространствах. Условия втекания и вытекания изменяются с изменением частоты. Можно рассмотреть случай, когда слой окружен полупространствами из разных материалов и эти условия противоположны в обоих полупространствах. В этом случае имеющаяся симметрия исчезает, и возможно втекание энергии их одного полупространства в слой и ее вытекание из слоя в другое полупространство. В случае слоя в вакууме это возможно, только если приложить внешнее постоянное магнитное поле, что будет рассмотрено далее. Для такого решения следует поменять знак у k_{0x} либо в первых двух, либо в последних двух уравнениях из системы (11). Соответствующее ДУ будет содержать уже четыре различных корня.

Пусть $\alpha = \pi/2$. Опять считаем диссипацию малой, а $K = 0.5$. Заметим, что при другом коэффициенте заполнения соотношения усложняются. Если же использовать гомогенизацию с учетом ПД, то все компоненты тензоров становятся сложными функциями k_x и k_z , поэтому аналитическое исследование становится крайне затруднительным. Теперь компоненты меняются местами, а тензор приобретает вид

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

В нем $\varepsilon_{zz} = (\varepsilon_m + \varepsilon_d)/2$, $\varepsilon_{xx} = 2(\varepsilon_m \varepsilon_d)/(\varepsilon_m + \varepsilon_d)$. Данный случай отличается от случая $\alpha = 0$ про-



сто заменой компонент. Для него можно построить строгую модель без гомогенизации. Именно: вводим матрицу передачи диэлектрического слоя

$$\hat{a}_d = \begin{bmatrix} \cos(t_d \sqrt{k_0^2 \varepsilon_d - k_z^2}) & i \rho_d \sin(t_d \sqrt{k_0^2 \varepsilon_d - k_z^2}) \\ i \sin(t_d \sqrt{k_0^2 \varepsilon_d - k_z^2}) / \rho_d & \cos(t_d \sqrt{k_0^2 \varepsilon_d - k_z^2}) \end{bmatrix}$$

и аналогичную матрицу металлического слоя \hat{a}_m подстановкой $d \rightarrow m$, $\varepsilon_d \rightarrow \varepsilon_m$. Здесь $\rho_d = \sqrt{(\varepsilon_d - k_z^2 / k_0^2) / (1 - k_z^2 / k_0^2)} / \varepsilon_d$ – нормированный к импедансу вакуума импеданс Е-волны в диэлектрике. Будем рассматривать симметричные структуры, начинающиеся со слоя металла и заканчивающиеся им, или начинающиеся со слоя диэлектрика и заканчивающиеся им. В первом случае число металлических слоев на единицу больше, а во втором случае – число диэлектрических слоев на единицу больше. В первом случае матрица структуры имеет вид $\hat{a} = (\hat{a}_m \hat{a}_d)^n \hat{a}_m$, а во втором случае $\hat{a} = \hat{a}_d (\hat{a}_m \hat{a}_d)^n$, где n – число полных периодов. Если для такой структуры решать задачу Френеля, имеют место соотношения

$$1 + R = \hat{a}_{11} T + \hat{a}_{12} T, \quad (23)$$

$$(1 - R) / \rho_0 = (\hat{a}_{21} T + \hat{a}_{22} T) / \rho_0, \quad (24)$$

которые приводят к решению

$$T = 2 / (\hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{a}_{12} + \hat{a}_{21}),$$

$$R = (Z_{in} - 1) / (Z_{in} + 1),$$

$$Z_{in} = (\hat{a}_{11} + \hat{a}_{12}) / (\hat{a}_{21} + \hat{a}_{22}).$$

Очевидно, результат зависит от симметрии структуры, т.е. от того, оканчивается она металлическим или диэлектрическим слоем. Величина Z_{in} по смыслу есть входной импеданс структуры, когда на выходе волна излучается в вакуум. Для получения ДУ ПП следует учесть, что направление передачи энергии в (23), (24) взято слева – направо (в нашем случае снизу – вверх, т.е. волна падает вдоль оси x). В симметричной структуре возможны либо втекающие, либо вытекающие волны. Они получаются путем согласования импедансов, т.е. отсутствия отражения $R = 0$. Поэтому в соотношении (24) либо слева, либо справа следует изменить знак у ρ_0 . Это приводит к ДУ $\hat{a}_{11} + \hat{a}_{12} + \hat{a}_{21} + \hat{a}_{22} = 0$. В случае одного диэлектрического слоя оно имеет вид

$$1 + i(\rho_d + 1 / \rho_d) \tan(t_d \sqrt{k_0^2 \varepsilon_d - k_z^2}) / 2 = 0.$$

Оно может быть разделено на два с учетом симметрии, используя формулу тангенса половинного аргумента и решая квадратное уравнение. Они имеют известный вид [24]. Это же уравнение получаем путем трансформации импеданса $-\rho_0 = -\sqrt{1 - k_z^2 / k_0^2}$ слоем и приравниванием его импедансу ρ_0 . В случае большого числа периодов структура приобретает свойства ФК. Для него уравнение Флоке–Блоха имеет вид

$$\cos(k_x(k_0, k_x)t) = X = (a_{11} + a_{22}) / 2. \quad (25)$$

Здесь взяты элементы матрицы одного периода, т.е. либо $a = a_d a_m$, либо $a = a_m a_d$. В результате находим $k_x^\pm = \pm \arccos(X) + 2n\pi$. Будем использовать $n = 0$. Заметим, что уравнение Френеля дает $k_x^\pm = \pm \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{xx} - k_z^2 \varepsilon_{xx} / \varepsilon_{zz}}$. Взяв матрицу периода $a = \hat{a}_d \hat{a}_m$ и учитывая малость периода по сравнению с длиной волны, имеем $X = 1 - t_d t_m \sqrt{k_0^2 \varepsilon_d - k_z^2} \sqrt{k_0^2 \varepsilon_m - k_z^2} (\rho_d / \rho_m + \rho_m / \rho_d) / 2$. Полагая $K = 0.5$, получаем $X = 1 - u$, где $u = (tk_0)^2 \sqrt{\varepsilon_d - k_z^2 / k_0^2} \sqrt{\varepsilon_m - k_z^2 / k_0^2} (\rho_d / \rho_m + \rho_m / \rho_d) / 8$. В силу малости $(tk_0)^2$ и u окончательно получаем $k_x^\pm = \pm k_x$, где $k_x = k_0 \sqrt{u / 2}$. Рассмотрим очень медленный ПП. Для него $\rho_d = 1 / \varepsilon_d$, $\rho_m = 1 / \varepsilon_m$, $u = (tk_0)^2 k_z^2 / k_0^2 (|\rho_d| + |\rho_m| / \rho_d) / 8$, $k_x^\pm = \pm tk_0 k_z \sqrt{\varepsilon_d / \varepsilon_m + |\varepsilon_m| / \varepsilon_d} / 4$. Здесь мы учли, что ДП металла приблизительно отрицательная. Формулы справедливы, если $|tk_z| \ll 1$. Указанная гомогенизация более точно учитывает структуру. Теперь можно построить решение и найти дисперсионное уравнение. Внутри структуры его ищем также в форме (9), но с учетом соотношения $k_x^\pm = \pm k_x$. Это позволяет записать

$$H_y = A^\pm \begin{pmatrix} \cos(k_x x) \\ \sin(k_x x) \end{pmatrix} \exp(-ik_z z),$$

выразить остальные компоненты через H_y и построить четное по $H_y(x)$ решение (с электрической стенкой в плоскости $x = 0$) и нечетное по $H_y(x)$ решение (с магнитной стенкой). Оно имеет форму (14) и может быть представлено в виде

$$\sqrt{k_0^2 - k_z^2} = \frac{k_x}{\varepsilon_{xx}} [i \tan(k_x d / 2)]^{\pm 1}, \quad (26)$$

где $k_x = k_0 \sqrt{u / 2}$. Если вместо уравнения Фло-



ке–Блоха использовать уравнение Френеля, то $k_x = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{xx} - k_z^2 \varepsilon_{xx} / \varepsilon_{zz}}$, и тогда

$$k_z = \pm k_0 \sqrt{\frac{1 - T^{\pm 2} / \varepsilon_{xx}}{1 - T^{\pm 2} / (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz})}} = \pm k_0 \sqrt{\frac{1 + 2T^{\pm 2} / (|\varepsilon'| - \tilde{\varepsilon}_d)}{1 + T^{\pm 2} / (\varepsilon_d (|\varepsilon'| + i\varepsilon''))}}.$$

Этот ПП может быть медленным в области $|\varepsilon'| \approx \varepsilon_d$, но при этом он диссипативный. Аналогичное уравнение для случая $\alpha = 0$ имеет вид

$$\sqrt{k_0^2 - k_z^2} = \frac{k_x}{\varepsilon_{zz}} [i \tan(k_x d / 2)]^{\text{th}}. \quad (27)$$

В нем $k_x = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{zz} - k_z^2 \varepsilon_{zz} / \varepsilon_{xx}}$. В этих двух случаях имеет место симметрия по x . Для (27)

$$k_z = \pm k_0 \sqrt{\frac{1 - T^{\pm 2} / \varepsilon_{zz}}{1 - T^{\pm 2} / (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz})}} = \pm k_0 \sqrt{\frac{1 - T^{\pm 2} (\tilde{\varepsilon}_d - |\varepsilon'|) / (2\varepsilon_m \varepsilon_d)}{1 - T^{\pm 2} / (\varepsilon_d \varepsilon_m)}}.$$

Этот ПП медленным будет в области $\varepsilon' = 0$ с значением в этой области $k_z = \pm k_0 \sqrt{\varepsilon_d / 2}$.

3. Формулы Френеля

Структура из ГММ эквивалентна набору плоскопараллельных волноводов или решеток, повернутых под углом и способна эффективно управлять дифракцией плоской волны, особенно если использовать оптически накапливаемые полупроводниковые слои или графеновые листы. Тензорная проводимость графена от ТГц до УФ диапазонов получена в ряде работ [30–33]. В первом приближении в модели Кубо–Гринвуда ее можно считать скалярной [30]. На низких частотах она индуктивная, но с учетом межзонных переходов может иметь емкостную область и даже стать отрицательной при внешней накачке [33]. Возможна гомогенизация как с учетом тензорного характера проводимости $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, так и для скалярной проводимости [12–14, 34, 35]. Однако следует учесть, что при тензорной проводимости графена разделение на Е-волны и Н-волны не происходит, поэтому следует сшивать все четыре касательные к границам компоненты полей или использовать матрицы передачи 4×4. Это усложняет ДУ и формулы Френеля. Металлические ленты при малой толщине t_m можно рассматривать как поверхностные токи $\mathbf{J} = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_m - 1)t_m \mathbf{E} = \sigma(\omega)\mathbf{E}$. Р-поляризация возбуждает только токи J_x и J_z или Е-волну,

s-поляризация – ток J_y или Н-волну. Тензорная проводимость связывает все три компоненты тока с полем. При нормальном падении на платину с $\alpha = 0$ волна с поляризацией электрического вектора нормально к слоям, проходит со значительно меньшими потерями, чем волна с ортогональной поляризацией. В несимметричном случае это работает для волн р-поляризации и s-поляризации, падающих под определенным углом.

Получим формулы Френеля при падении снизу на структуру с произвольным углом α под углом φ волны р- и s-поляризации. Используем импедансный подход, рассматривая движение по оси x . Снизу имеем волну

$$E_q = \exp(-ik_{0x}x) + R_q \exp(ik_{0x}x),$$

$$Z_0 H_q = [\exp(-ik_{0x}x) - R_q \exp(ik_{0x}x)] / \rho_{0q}.$$

Сверху имеем

$$E_q = T_q \exp(-ik_{0x}(x-d)),$$

$$Z_0 H_q = T_q \exp(-ik_{0x}(x-d)) / \rho_{0q}.$$

В структуре пишем

$$E_q = A_q^+ \exp(-ik_x^+ x) + A_q^- \exp(-ik_x^- x),$$

$$Z_0 H_q = A_q^+ \exp(-ik_x^+ x) / \rho_q - A_q^- \exp(-ik_x^- x) / \rho_q.$$

Здесь при $q = p$ имеем $E_q = -E_z$, $H_q = H_y$, $\rho_{0p} = \sqrt{1 - k_z^2 / k_0^2}$, а также $\rho_q = \sqrt{(\tilde{\varepsilon}_{xx} - k_z^2 / k_0^2) / \Delta}$. При $q = s$ имеем $E_q = E_y$, $H_q = H_z$, $\rho_{0s} = 1 / \sqrt{1 - k_z^2 / k_0^2}$, $\rho_s = k_0 / \sqrt{k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{xx} - k_z^2}$. Сшивая компоненты полей, получаем решение:

$$T_q = \frac{4\rho_q \rho_{0q}}{\exp(ik_x^+ d) (\rho_q + \rho_{0q})^2 + \exp(ik_x^- d) (\rho_q^2 - \rho_{0q}^2)},$$

$$A_q^+ = \exp(ik_x^+ d) T_q (1 + \rho_q / \rho_{0q}) / 2, \quad (28)$$

$$A_q^- = T_q \exp(ik_x^- d) (1 - \rho_q / \rho_{0q}) / 2.$$

Используя его, находим

$$Z_q = (1 + R_q) / (1 - R_q) = \frac{A_q^+ + A_q^-}{(\rho_{0q} / \rho_q) (A_q^+ - A_q^-)},$$

и коэффициент отражения $R_q = (Z_q - 1) / (Z_q + 1)$ или $R_q = A_q^+ + A_q^- - 1$. Следует иметь в виду, что в этих соотношениях величина $k_z < k_0$ и действительная, а угол падения определяется как



$\phi = \arctan(k_z / \sqrt{k_0^2 - k_z^2})$. В случае симметрии уравнение упрощается и принимает вид

$$T_q = \frac{4\rho_q\rho_{0q}\exp(-ik_x d)}{(\rho_{0q} + \rho_q)^2 + \exp(-2ik_x d)(\rho_q^2 - \rho_{0q}^2)}. \quad (29)$$

4. Слой во внешнем магнитном поле

Внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 приводит к тому, что ДП металла становится тензорной величиной. Изменяя величину и направления магнитного поля, можно управлять дисперсией и волнами в слое из ГММ. Соответственно изменяется и тензор эффективной ДП (1). При произвольном угле α и направлении магнитного поля соотношения становятся весьма сложными. Рассмотрим случай направления магнитного поля по оси x : $\mathbf{H}_0 = \mathbf{x}_0 H_0$ и $\alpha = 0$. В этом случае для металлического образца

$$\hat{\epsilon}_m = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{zz}^m & -ib \\ 0 & ib & \epsilon_{zz}^m \end{bmatrix},$$

где

$$\epsilon_{xx}^m = 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - i\omega\omega_c),$$

$$\epsilon_{zz}^m = 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - \omega_M^2 - i\omega\omega_c),$$

$$b = \omega_M \omega_p^2 / (\omega^3 - \omega\omega_M^2 - i\omega^2\omega_c).$$

Теперь для тензора ДП слоя ГММ (1) имеем

$$\epsilon_{xx} = (\epsilon_{xx}^m + \epsilon_d) / 2, \quad \epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} = -ib / 2,$$

$$\epsilon_{zz} = 2\epsilon_{zz}^m \epsilon_d / (\epsilon_{zz}^m + \epsilon_d),$$

при этом он перестает быть диагональным. Такая искусственная среда не подлежит формально под определению ГММ, однако, как и в последнем, в ней возможны большие значения компонент вектора \mathbf{k} . Магнитное поле приводит к возникновению вектора гирации и дополнительной пространственной дисперсии. Расписывая по координатам уравнения Максвелла, получим уравнение Френеля и связь полей через импедансы. Уравнение Френеля имеет вид $\det[\hat{k}^2 - k_0^2 \hat{\epsilon}] = 0$, где матрицы \hat{k} и \hat{k}^2 , содержащие компоненты k_i и $k_j k_m$, определяют операторы «ротор» и «ротор от ротора», т.е. действуют на произвольную плоскую волну $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ как $\nabla \times \mathbf{E} = \hat{k}\mathbf{E}$ и $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \hat{k}^2 \mathbf{E}$. Матрица \hat{k} особенная, а матрица \hat{k}^2 обратима. Отличие теперь состоит в том, что импедансы

разных направлений являются различными. Это приводит к тому, что в структуре возможны втекающие с одной стороны и вытекающие с другой стороны волны. Изменение направления магнитного поля изменяет условия втекания-вытекания. В этом смысле такая волноведущая структура обладает невзаимностью. Возбуждая, например, слой волноводом, можно создать антенну вытекающей волны, которая излучает в узком секторе под углом в сторону. Изменяя магнитное поле, можно изменять полуплоскость, в которую идет место излучение. Поскольку $\omega_M = e\mu_0 H_0 / m_e$, то для работы в оптическом диапазоне нужны весьма сильные магнитные поля. Если внешнее магнитное поле направить по оси z , то тензор ДП видоизменяется заменой $x \leftrightarrow z$. Для такого слоя волны разных направлений различны.

Для создания ламп бегущей волны ТГц диапазона перспективны замедляющие структуры с замедленными плазмонами [36]. Необходим коэффициент замедления порядка 3–4 и рабочая индукция магнитного поля порядка 1 Тл. Для этого удобно использовать рассмотренные структуры с $\alpha = \pi/2$ и продольным магнитным полем. От направления магнитного поля зависят замедление и потери плазмона, поэтому расчет дисперсии с учетом магнитного поля весьма важен. В случае произвольно направленного поля и произвольной ориентации α тензор ДП имеет все компоненты, а дисперсионные уравнения становятся весьма сложными.

5. Численные результаты и их обсуждение

На рис. 2 представлены результаты расчета $R = R_e$ и $T = T_e$ в зависимости от угла падения для $\lambda = 500$ нм. Отметим, что в теории дифракции на решетках подобные задачи для бесконечно тонких идеально проводящих полосок сводятся к интегральным уравнениям и решались. Можно учесть и конечный импеданс металлических лент. Однако учет диэлектрического слоя в таком подходе сложен и требует введения комбинированных объемно-поверхностных интегральных уравнений. Результаты расчета дисперсии и потерь для ПП при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ приведены на рис. 3, 4. Часть кривых левее $n' = 1$ соответствуют быстрым втекающим волнам, а правее – медленным. Волны в нижней плоскостной ИС ($\alpha = \pi/2$) более медленные, а в области выше частоты плазмонного резонанса обратные. Это отличает плоскостную ИС от металлической, для которой обратных

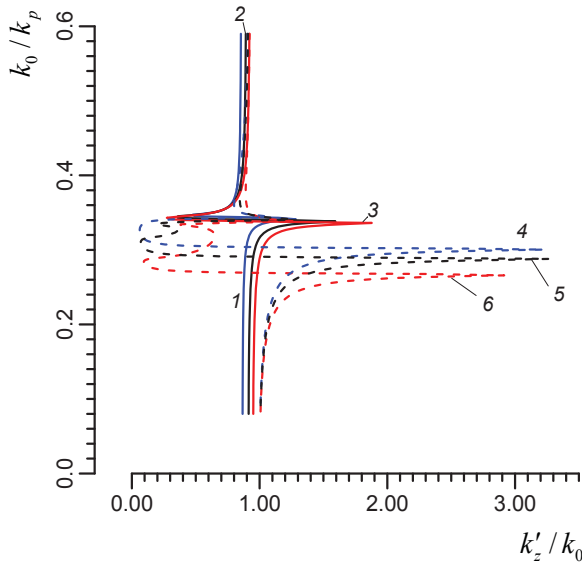


Рис. 3. Дисперсия Е-ПП вдоль полупространства ГММ со структурой, соответствующей рис. 2 для $\alpha=0$ (кривые 1–3) и $\alpha=\pi/2$ (кривые 4–6): зависимость нормированного волнового числа от замедления $n'=k'_z/k_0$ при разных ДП ϵ_d : 2.0 (кривые 1–4), 3.0 (кривые 2–5) и 5.0 (кривые 3–6) Fig. 3. Dispersion of E-PP along the half-space of HMM with the structure corresponding to Fig. 2 for $\alpha=0$ (curves 1–3) and $\alpha=\pi/2$ (curves 4–6): dependence of the normalized wave number on deceleration $n'=k'_z/k_0$ at different DP: ϵ_d : 2.0 (curves 1–4), 3.0 (curves 2–5), and 5.0 (curves 3–6)

волн нет. Для ГММ с $\alpha=0$ обратных волн нет, а максимальное замедление соответствует более высоким частотам, для которых $\epsilon' > 0$. Кривые построены так, что $k'_z > 0$, поэтому обратным волнам соответствуют как бы отрицательные потери. В вакууме энергия всегда переносится вдоль движения фазы. Наличие обратных волн – это интегральный эффект, связанный с тем, что в металлических структурах компонента вектора Пойнтинга может менять знак при $\epsilon' < 0$.

В области плазмонного резонанса $k'_z \approx k'_z \sim 1/\sqrt{\epsilon''}$, т.е. для получения больших замедлений следует снижать диссипацию. Оценка для первой структуры дает в области резонанса $k_z = k_0(1-i)\sqrt{(1+\epsilon_d^{-2}-2/\epsilon_d)/\epsilon''}/2$. Для второй структуры имеют место два резонанса: $k_z = k_0(1-i)\epsilon_d/\sqrt{(1+\epsilon_d^2)\epsilon''}$ – низкочастотный при $\epsilon_m \approx -\epsilon_d$ и $k_z = k_0(1+i)\sqrt{(1+\epsilon_d^2-\epsilon_d)/[(1+\epsilon_d^2)2\epsilon'']}$ – высокочастотный при $\epsilon_m \approx 1/\epsilon_d$. Непосредственно видно, что последний соответствует об-

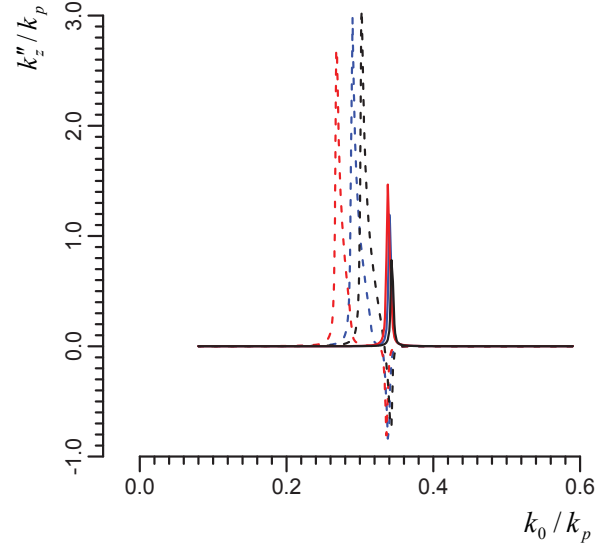


Рис. 4. Нормированные потери k''_z/k_p Е-ПП вдоль полупространства ГММ, соответствующие дисперсии рис. 2 для $\alpha=0$ (кривые 1–3) и $\alpha=\pi/2$ (кривые 4–6) в зависимости от нормированного волнового числа k_0/k_p при разных ДП ϵ_d : 2.0 (кривые 1–4), 3.0 (кривые 2–5) и 5.0 (кривые 3–6)

Fig. 4. Normalized E-PP losses k''_z/k_p along the half-space of HMM corresponding to the dispersion of Fig. 2 for $\alpha=0$ (curves 1–3) and $\alpha=\pi/2$ (curves 4–6) depending on the normalized wave number k_0/k_p at different DP: ϵ_d : 2.0 (curves 1–4), 3.0 (curves 2–5), and 5.0 (curves 3–6)

ратному ПП. Все исследованные ПП втекающие, поскольку вытекание из диссипативного полупространства невозможно.

Заключение

В работе с использованием простейшей гомогенизации получены точные решения для плазмон-поляритонов вдоль поверхности в общем случае асимметричного гиперболического метаматериала в виде плоскостройной периодической металл-диэлектрической структуры. Дополнительную степень свободы в уравнения можно ввести, если варьировать коэффициент заполнения или использовать многослойные в периоде структуры. Учет пространственной дисперсии, т.е. зависимости $\tilde{\epsilon}(k_0, k_x, k_z)$, приводит к сложным нелинейным дисперсионным уравнениям и уравнениям Френеля, анализировать которые возможно только численно. Как пространственная дисперсия, так и диссипация искажают гиперболический закон дисперсии и ограничивают по модулю компоненты волнового вектора, т.е. замыкают поверхность изочастот. Найдены условия



существования медленных и быстрых, втекающих и вытекающих, а также прямых и обратных поляритонов. Асимметричный слой гиперболического метаматериала интересен тем, что во внешнем магнитном поле поддерживает поляритоны, втекающие с одной стороны и вытекающие с другой. В плоскостной структуре найдены обратные поляритоны, отсутствующие вдоль металлического полупространства. Использование вместо металлических слоев графеновых листов позволяет при оптической накачке создавать активные структуры как дифракционные, так и волноведущие [35–38].

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-19-10033).

Список литературы

1. Guo Y., Newman W., Cortes C. L., Jacob Z. Applications of hyperbolic metamaterial substrates // *Advances in OptoElectronics*. 2012. Article ID 452502 (9 p.). DOI: 10.1155/2012/452502
2. Guo Y., Jakob Z. Thermal hyperbolic metamaterials // *Opt. Express*. 2013. Vol. 21. P. 15014–15019.
3. Cortes C. L., Newman W., Molesky S., Jacob Z. Quantum nanophotonics using hyperbolic metamaterials // *Journal of Optics*. 2012. Vol. 14. 063001 (15 p.).
4. Guo Y., Cortes C., Molesky S., Jakob Z. Broadband super-Planckian thermal emission from hyperbolic metamaterials // *Appl. Phys. Lett.* 2012. Vol. 101. 131106 (5 p.).
5. Poddubny A., Iorsh I., Belov P., Kivshar Yu. Hyperbolic metamaterials // *Nat. Photonics*. 2013. Vol. 7 (12). P. 948–957.
6. Noginov M., Lapine M., Podolskiy V., Kivshar Yu. Focus issue : hyperbolic metamaterials // *Optics Express*. 2013. Vol. 21(12). P. 14895–14897.
7. Drachev V. P., Podolskiy V. A., Kildishev A. V. Hyperbolic metamaterials: new physics behind a classical problem // *Optics Express*. 2013. Vol. 21, iss. 12. P. 15048–15064.
8. Shekhar P., Atkinson J., Zubin J. Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications // *Nano Convergence*. 2014. Vol. 1, № 1. P. 1–16.
9. Kidwai O., Zhukovsky S. V., Sipe J. E. Effective-medium approach to planar multilayer hyperbolic metamaterials : Strengths and limitations // *Phys. Rev. A*. 2012. Vol. 85. 053842 (11 p.).
10. Zhukovsky S. V., Kidwai O., Sipe J. E. Physical nature of volume plasmon polaritons in hyperbolic metamaterials // *Optics Express*. 2013. Vol. 21, iss. 12. P. 14982–14987.
11. Zapata-Rodriguez C. J., Miret J. J., Vukovic S., Belic M. R. Engineered surface waves in hyperbolic metamaterials // *Opt. Express*. 2013. Vol. 21, № 16. P. 19113–19127.
12. Nefedov I. S., Valagiannopoulos C. A., Hashemi S. M., Nefedov E. I. Total absorption in asymmetric hyperbolic media // *Scientific Reports*. 2013. Vol. 3. 2662 (4 p.).
13. Nefedov I. S., Melnikov L. A. Super-Planckian far-zone thermal emission from asymmetric hyperbolic metamaterials // *Appl. Phys. Lett.* 2014. Vol. 105, № 16. 161902 (5 p.).
14. Давидович М. В., Неведов И. С. Пространственно-временная дисперсия и волноведущие свойства 2D-периодических стержневых металлических фотонных кристаллов // *ЖЭТФ*. 2014. Т. 145, № 5. С. 771–786.
15. Ferrari L., Wu C. H., Lepage D., Zhang X., Liu Z. W. Hyperbolic metamaterials and their applications // *Prog. Quantum Electron.* 2015. Vol. 40. P. 1–40. DOI: 10.1016/j.pquantelec.2014.10.001
16. Давидович М. В. Анализ плазмонов и гомогенизация в плоскостных фотонных кристаллах и гиперболических метаматериалах // *ЖЭТФ*. 2016. Т. 160, вып. 6. С. 1069–1083.
17. Li T., Khurgin J. B. Hyperbolic metamaterials : beyond the effective medium theory // *Optica*. 2016. Vol. 3, iss. 12. P. 1388–1396.
18. Kristina K. H., Sreekanth K. V., Strangl G. Dye-embedded and nanopatterned hyperbolic metamaterials for spontaneous emission rate enhancement // *Journal of the Optical Society of America B*. 2016. Vol. 33, № 6. 1038 (6 p.).
19. Peragut F., Cerutti L., Baranov A., Hugonin J. P., Taliencio T., De Wilde Y., Greffet J. J. Hyperbolic metamaterials and surface plasmon polaritons // *Optica*. 2017. Vol. 4, iss. 11. P. 1409–1415.
20. Ferrari L., Smalley J. S. T., Fainman Y., Liu Z. Hyperbolic metamaterials for dispersion-assisted directional light emission // *Nanoscale*. 2017. Vol. 9, № 26. P. 9034–9048.
21. Давидович М. В. Гиперболическая среда из проводящих конечной длины // *ЖЭТФ*. 2018. Т. 154, вып. 1 (7). С. 5–25.
22. Boardman A. D., Alberucci A., Assanto G., Grimalsky V. V., Kibler B., McNiff J., Nefedov I. S., Rapoport Yu. G., Valagiannopoulos C. A. Waves in hyperbolic and double negative metamaterials including rogues and solitons // *Nanotechnology*. 2017. Vol. 28. 444001 (41 p.).
23. Alù A., Silveirinha M. G., Salandrino A., Engheta N. Epsilon-Near-Zero (ENZ) Metamaterials and Electromagnetic Sources : Tailoring the Radiation Phase Pattern // *Phys. Rev. B*. 2007. Vol. 75. 155410 (13 p.).
24. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988. 440 с.
25. Давидович М. В. Плазмоны в многослойных плоскостных структурах // *Квантовая электроника*. 2017. Т. 47, № 6. С. 567–579.
26. Davidovich M. V. Backward and forward plasmons in symmetric structures // *Proc. SPIE*. 2018. Vol. 10717. 1071714 (6 p.). DOI: 10.1117/12.2306067



27. Давидович М. В. Об условии перехода быстрой поверхностной волны в медленную // Радиотехника и электроника. 2018. Т. 63, № 6. С. 499–506.
28. Davidovich M. V. Backward plasmon-polaritons in multilayered dissipative structures // Proc. SPIE. 2019. Vol. 11066. 110660V (6 p.). DOI: 10.1117/12.2521632
29. Давидович М. В. Дисперсия поверхностных плазмонов в структурах с проводящей пленкой // Оптика и спектроскопия. 2019. Т. 126, № 3. С. 360–369.
30. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // J. Appl. Phys. 2008. Vol. 103. 064302 (8 p.).
31. Falkovsky L. A., Varlamov A. A. Space-time dispersion of graphene conductivity // Eur. Phys. J. 2007. Vol. B 56. P. 281–284.
32. Lovat G., Hanson G. W., Araneo R., Burghignoli P. Semiclassical spatially dispersive intraband conductivity tensor and quantum capacitance of graphene // Phys. Rev. B. 2013. Vol. 87. 115429 (11 p.).
33. Dubinov A. A., Aleshkin V. Y., Mitin V., Otsuji T., Ryzhii V. Terahertz surface plasmons in optically pumped graphene structures // J. Phys. : Condens. Matter. 2011. Vol. 23. 145302 (8 p.).
34. Iorsh I. V., Mukhin I. S., Shadrivov I. V., Belov P. A., Kivshar Y. S. Hyperbolic metamaterials based on multilayer graphene structures // Phys. Rev. B. 2013. Vol. 87. 075416 (6 p.).
35. Козина О. Н., Мельников Л. А. Оптические характеристики асимметричного гиперболического материала // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2019. Т. 19, вып. 2. С. 122–131. DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-2-122-131
36. Davidovich M. V. Amplification of optical and THz surface plasmon-polaritons by electron beams // Proc. SPIE. 2019. Vol. 11066. 1106614 (11 p.). DOI: 10.1117/12.2521234
37. Ляико Е. И., Маймистов А. И. Линейные направленные волны в гиперболическом планарном волноводе. Дисперсионные соотношения // Квантовая электроника. 2015. Т. 45, № 11. С. 1050–1054.
38. Ляико Е. И., Маймистов А. И. Моды нелинейного планарного волновода с диэлектрическим слоем, погруженным в гиперболическую среду // Квантовая электроника. 2017. Т. 47, № 11. С. 1053–1063.

Образец для цитирования:

Давидович М. В. Плазмон-поляритоны вдоль поверхности асимметричного гиперболического метаматериала // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 288–303. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-4-288-303>

Plasmon-polaritons Along the Asymmetric Hyperbolic Metamaterial

M. V. Davidovich

Michael V. Davidovich, <https://orcid.org/0000-0001-8706-8523>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, davidovichmv@yandex.ru

Background and Objectives: Plasmon-polaritons along a surface of bulk hyperbolic metamaterial and along a slab of such metamaterial with an arbitrary orientation of the crystallographic axis are considered (the axis in the polarization plane is an arbitrary angle with the direction of propagation). We use the rigorous approach based on Maxwell's equations. The parameters of the hyperbolic metamaterial in the form of the effective dielectric constant tensor are determined by homogenization. The dielectric permittivity of metal layers is determined by the Drude–Lorentz model. The axis change is made using the rotation matrix of the coordinate system, and the effective permittivity tensor is transformed accordingly. The possibility of using graphene layers with the conductivity of a graphene sheet based on the Kubo model is considered. The conditions of existence of fast, slow, flowing, forward and backward plasmon-polaritons are found. Backward plasmon-polaritons correspond to a wave in which the phase velocity is opposite to the energy transfer velocity. Classification of waves is made both on the basis of calculation of Poynting vector, and by the solution of the dispersion equation and definition of signs of real and imaginary

parts of a constant of propagation. The Fresnel formulas are also derived for the diffraction of a plane wave of arbitrary polarization on such a structure. Methods of analytical and numerical solution of dispersion equations are applied. Partial analytical solutions of dispersion equations are obtained. A new type of backward inverse plasmon-polaritons propagating along the flat boundary of a massive sample of a hyperbolic metamaterial with a vacuum, which does not exist for a solid metal sample, is found. The possibility of dispersion control by applying an external magnetic field is considered, as well as the possibility of plasmon-polariton amplification in waveguides from metamaterials with optically pumped graphene sheets, as well as in diffraction on plane-layered structures. **Methods:** We use the Maxwell equation, mode matching technique, the homogenization for hyperbolic metamaterials without spatial dispersion and construct the complex dispersion equation. We consider the asymmetric hyperbolic metamaterial with a rotated optical axis. The dispersion equation was solved analytically and numerically by the iterative method.

Keywords: hyperbolic metamaterial, homogenization, plasmon polaritons, dispersion equation, Fresnel equation, Fresnel formulas.

Received: 07.08.2019 / Accepted: 12.10.2019 / Published: 02.12.2019
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements: This work was supported by Russian Science Foundation (project No. 16-19-10033).



References

1. Guo Y., Newman W., Cortes C. L., Jacob Z. Applications of hyperbolic metamaterial substrates. *Advances in OptoElectronics*, 2012, Article ID 452502 (9 p.). DOI: 10.1155/2012/452502
2. Guo Y., Jakob Z. Thermal hyperbolic metamaterials. *Opt. Express*, 2013, vol. 21, pp. 15014–15019.
3. Cortes C. L., Newman W., Molesky S., Jacob Z. Quantum nanophotonics using hyperbolic metamaterials. *Journal of Optics*, 2012, vol. 14, no. 15, 063001 (15 p.).
4. Guo Y., Cortes C., Molesky S., Jakob Z. Broadband super-Planckian thermal emission from hyperbolic metamaterials. *Appl. Phys. Lett.*, 2012, vol. 101, 131106 (15 p.).
5. Poddubny A., Iorsh I., Belov P., Kivshar Yu. Hyperbolic metamaterials. *Nat. Photonics*, 2013, vol. 7, no. 12, pp. 948–957.
6. Noginov M., Lapine M., Podolskiy V., Kivshar Yu. Focus issue: hyperbolic metamaterials. *Optics Express*, 2013, vol. 21, no. 12, pp. 14895–14897.
7. Drachev V. P., Podolskiy V. A., Kildishev A. V. Hyperbolic metamaterials: new physics behind a classical problem. *Optics Express*, 2013, vol. 21, iss. 12, pp. 15048–1564.
8. Shekhar P., Atkinson J., Zubin J. Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications. *Nano Convergence*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 1–16.
9. Kidwai O., Zhukovsky S. V., Sipe J. E. Effective-medium approach to planar multilayer hyperbolic metamaterials: Strengths and limitations. *Phys. Rev. A*, 2012, vol. 85, 053842 (11 p.).
10. Zhukovsky S. V., Kidwai O., Sipe J. E. Physical nature of volume plasmon polaritons in hyperbolic metamaterials. *Optics Express*, 2013, vol. 21, iss. 12, pp. 14982–14987.
11. Zapata-Rodriguez C. J., Miret J. J., Vukovic S., Belic M. R. Engineered surface waves in hyperbolic metamaterials. *Opt. Express*, 2013, vol. 21, no. 16, pp. 19113–19127.
12. Nefedov I. S., Valagiannopoulos C. A., Hashemi S. M., Nefedov E. I. Total absorption in asymmetric hyperbolic media. *Scientific Reports*, 2013, vol. 3, 2662 (4 p.).
13. Nefedov I. S., Melnikov L. A. Super-Planckian far-zone thermal emission from asymmetric hyperbolic metamaterials. *Appl. Phys. Lett.*, 2014, vol. 105, no. 16, 161902 (5 p.).
14. Davidovich M. V., Nefedov I. S. Spatiotemporal Dispersion and Waveguide Properties of 2D Periodic Metallic Rod Photonic Crystals. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2014, vol. 118, no. 5, pp. 673–686.
15. Ferrari L., Wu C. H., Lepage D., Zhang X., Liu Z. W. Hyperbolic metamaterials and their applications. *Prog. Quantum Electron.*, 2015, vol. 40, pp. 1–40. DOI: 10.1016/j.pquantelec.2014.10.001
16. Davidovich M. V. Plasmon Analysis and Homogenization in Plane Layered Photonic Crystals and Hyperbolic Metamaterials // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2016, vol. 123, no. 6, pp. 928–941.
17. Li T., Khurgin J. B. Hyperbolic metamaterials: beyond the effective medium theory. *Optica*, 2016, vol. 3, iss. 12, pp. 1388–1396.
18. Kristina K. H., Sreekanth K. V., Strangl G. Dye-embedded and nanopatterned hyperbolic metamaterials for spontaneous emission rate enhancement. *Journal of the Optical Society of America B*, 2016, vol. 33, no. 6, 1038 (6 p.).
19. Peragut F., Cerutti L., Baranov A., Hugonin J. P., Taliercio T., De Wilde Y., Greffet J. J. Hyperbolic metamaterials and surface plasmon polaritons. *Optica*, 2017, vol. 4, iss. 11, pp. 1409–1415.
20. Ferrari L., Smalley J. S. T., Fainman Y., Liu Z. Hyperbolic metamaterials for dispersion-assisted directional light emission. *Nanoscale*, 2017, vol. 9, no. 26, pp. 9034–9048.
21. Davidovich M. V. Hyperbolic Medium of Finite-Length Wires. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2018, vol. 127, no. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1134/S1063776118070178
22. Boardman A. D., Alberucci A., Assanto G., Grimalsky V. V., Kibler B., McNiff J., Nefedov I. S., Rapoport Yu. G., Valagiannopoulos C. A. Waves in hyperbolic and double negative metamaterials including rogues and solitons. *Nanotechnology*, 2017, vol. 28, 444001 (41 p.).
23. Alù A., Silveirinha M. G., Salandrino A., Engheta N. Epsilon-Near-Zero (ENZ) Metamaterials and Electromagnetic Sources: Tailoring the Radiation Phase Pattern. *Phys. Rev. B*, 2007, vol. 75, 155410 (13 p.).
24. Vainstein L. A. *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1988. 440 p. (in Russian).
25. Davidovich M. V. Plasmons in multilayered plan-layered structures. *Quantum Electronics*, 2017, vol. 47, no. 6, pp. 567–579. DOI: 10.1070/QEL16272
26. Davidovich M. V. Backward and forward plasmons in symmetric structures. *Proc. SPIE*, 2018, vol. 10717, 1071714 (6 p.).
27. Davidovich M. V. On the Condition for Transformation of a Fast Surface Wave into a Slow Surface Wave. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2018, vol. 63, no. 6, pp. 497–504. DOI: 10.1134/S106422691806005
28. Davidovich M. V. Backward plasmon-polaritons in multilayered dissipative structures. *Proc. SPIE*, 2019, vol. 11066, 110660V (6 p.).
29. Davidovich M. V. Dispersion of surface plasmons in structures with a conductive film. *Optics and Spectroscopy*, 2019, vol. 126, no. 3, pp. 279–289.
30. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene. *J. Appl. Phys.*, 2008, vol. 103, 064302 (8 p.).
31. Falkovsky L. A., Varlamov A. A. Space-time dispersion of graphene conductivity. *Eur. Phys. J.*, 2007, vol. B 56, pp. 281–284.
32. Lovat G., Hanson G. W., Araneo R., Burghignoli P. Semiclassical spatially dispersive intraband conductivity



- tensor and quantum capacitance of graphene. *Phys. Rev. B*, 2013, vol. 87, 115429 (11 p.).
33. Dubinov A. A., Aleshkin V. Y., Mitin V., Otsuji T., Ryzhii V. Terahertz surface plasmons in optically pumped graphene structures. *J. Phys.: Condens. Matter.*, 2011, vol. 23, 145302 (8 p.).
34. Iorsh I. V., Mukhin I. S., Shadrivov I. V., Belov P. A., Kivshar Y. S. Hyperbolic metamaterials based on multilayer graphene structures. *Phys. Rev. B*, 2013, vol. 87, 075416 (6 p.).
35. Kozina O. N., Melnikov L. A. Optical Characteristics of Asymmetrical Hyperbolic Metamaterials. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2019, vol. 19, iss. 2, pp. 122–131 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-2-122-131>
36. Davidovich M. V. Amplification of optical and THZ surface plasmon-polaritons by electron beams. *Proc. SPIE*, 2019, vol. 11066, 1106614 (11 p.). DOI: 10.1117/12.2521234
37. Lyashko E. I., Maimistov A. I. Linear guided waves in a hyperbolic planar waveguide. Dispersion relations. *Quantum Electronics*, 2015, vol. 45, no. 11, pp. 1050–1054.
38. Lyashko E. I., Maimistov A. I. Modes of a nonlinear planar waveguide with a dielectric layer immersed in a hyperbolic medium. *Quantum Electronics*, 2017, vol. 47, no. 11, pp. 1053–1063.

Cite this article as:

Davidovich M. V. Plasmon-polaritons Along the Asymmetric Hyperbolic Metamaterial. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 288–303 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-4-288-303>
