



ФИЗИКА

УДК 519.6:577.359

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А.Н. Павлов, В.С. Анищенко

Саратовский государственный университет,
кафедра радиофизики и нелинейной динамики
E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru
wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Представлены основы мультифрактального анализа, базирующегося на вейвлет-преобразовании (метод максимумов модулей вейвлет-преобразования). Исследуются возможности и ограничения данного подхода при анализе сложных сигналов. Обсуждаются преимущества техники мультифрактального формализма в случае нестационарных процессов и сигналов малой длительности по сравнению с классическим корреляционным анализом. Рассмотрены эффекты потери мультифрактальности в динамике систем различной природы.

Multifractal Analysis of Signals Based on Wavelet-Transform

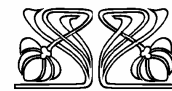
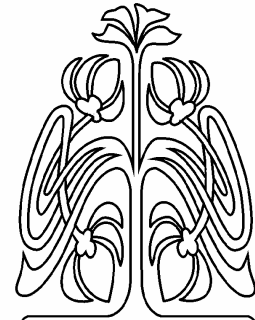
A.N. Pavlov, V.S. Anishchenko

Main ideas of multifractal analysis based on the wavelet-transform are presented (the wavelet-transform modulus maxima method). Possibilities and limitations of the given approach at analysis of complex signals are studied. Advantages of multifractal technique over the classical correlation analysis are discussed for the case of nonstationary and short data. Phenomena of the multifractality loss in the dynamics of different systems are considered.

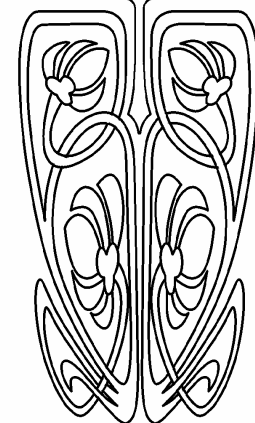
ВВЕДЕНИЕ

Представления о фракталах и мультифракталах [1–6] широко используются для описания свойств самоподобия, наблюдаемых в самых разных физических ситуациях [7–15]. К числу фракталов относят геометрические объекты, которые имеют сильно изрезанную форму и демонстрируют некоторую повторяемость в широком диапазоне масштабов (рис.1). Повторяемость может быть полной (в этом случае говорят о регулярных фракталах), либо может наблюдаться некоторый элемент случайности (такие фракталы называют случайными). Структура случайных фракталов на малых масштабах не является идентичной всему объекту, но их статистические характеристики совпадают, и свойства самоподобия справедливы после усреднения по статистически независимым реализациям объекта.

Для количественного описания фракталов достаточно одной величины – размерности Хаусдорфа или показателя скейлинга (подобия), описывающего сохраняемость геометрии или статистических характеристик при изменении масштаба. Однако в физике, химии, биологии и других науках встречаются многие явления, которые требуют расширения понятия фрактала на сложные структуры с более чем одним показателем скейлинга. Такие структуры часто характеризуются целым спектром показателей, и размерность Хаусдорфа представляет собой лишь один из них [2, 3]. Сложные фракталы, называемые *мультифракталами*, важны прежде всего потому, что именно они, как правило, и встречаются в природе, тогда как простые самоподобные объекты являются идеализацией реальных явлений. Фактически, мультифрактальный подход означает, что изучаемый объект каким-то



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



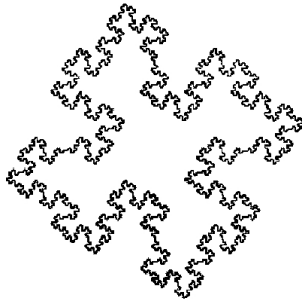


Рис.1. Пример фрактала

образом можно разделить на части, для каждой из которых наблюдаются свои свойства самоподобия [2]. Данный подход изначально был предложен для статистического анализа особенностей скейлинга сингулярных мер [16–20] и с успехом применялся в разных областях науки – при изучении агрегационных свойств клеточных элементов крови в биологии и диффузионного роста кластеров, для характеристики разрушения материалов в физике металлов, в теории развитой гидродинамической турбулентности, при исследовании несоразмерных структур и квазикристаллов в физике твердого тела, для анализа структуры молекул ДНК, в задачах об одномерных случайных блужданиях и при исследовании броуновского движения, для описания инвариантной вероятностной меры странных аттракторов и т.д. [21–26]. Самые разные объекты природы могут быть отнесены к специальному классу «мультифракталов», и, пожалуй, довольно сложно найти область науки, где бы мы не встретились с представителями этого класса.

Важными представителями мультифракталов служат многие сигналы, регистрируемые в натурных экспериментах, и для целого ряда практических задач наибольшую ценность представляет наличие строгого математического подхода к анализу сложной структуры процессов различной природы. Простые или *монофрактальные* сигналы (например, $1/f$ -шум, Винеровский случайный процесс и т.д.) являются однородными в том смысле, что их скейлинговые характеристики остаются неизменными в любом диапазоне масштабов. Частотная зависимость в спектре таких сигналов имеет вид $S(f) \sim f^{-\beta}$ и не меняется в широком частотном диапазоне, то есть β представляет собой постоянную величину. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными свойствами скейлинга [27]. Соответст-

венно для их количественного описания требуется большое число характеристик. В частности, спектр таких процессов не может быть описан степенным законом с единственным показателем β .

Известно несколько попыток расширить концепцию мультифракталов на случай функциональных зависимостей (сигналов) [27, 28]. Одна из них основана на методе структурных функций, который достаточно часто использовался разными исследователями. Возможно, наиболее широкое распространение метод структурных функций приобрел в задачах изучения сильно развитой турбулентности [27, 29]. В начале 90-х гг. в работах Мьюзи, Бакри и Арнеодо [30, 31] был предложен более совершенный метод «максимумов модулей вейвлет-преобразования» (ММВП), имеющий ряд существенных преимуществ: анализ широкого класса сингулярностей (сильной изрезанности формы) – не только самих сигналов, но и их производных, меньшая погрешность вычисления скейлинговых характеристик и т.д. Техника ММВП может успешно применяться в исследованиях структуры неоднородных процессов различной природы. Она базируется на вейвлет-анализе, который называют математическим «микроскопом» из-за способности сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Привлекательность данного метода состоит в том, что с его помощью можно анализировать как сингулярные меры, так и сингулярные функции; он является более универсальным аппаратом для исследования мультискейлинговых свойств объектов по сравнению с ранее разработанными подходами [27, 28]. Метод ММВП часто интерпретируют как обобщение классических алгоритмов покрытия множества сферами, кубиками и т.п. с той лишь разницей, что вместо этих элементов покрытия используются вейвлеты. Поскольку базисные функции вейвлет-преобразования являются хорошо локализованными (солитоноподобными), они представляют собой эффективный математический аппарат для анализа нестационарных процессов.

В настоящее время метод максимумов модулей вейвлет-преобразования превратился в один из популярных инструментов анализа нестационарных данных. После публикации в 1999 г. в журнале “Nature” работы по мультифрактальному описанию сердечного ритма [32] и серии статей [33–37] мультифракталь-



ный анализ стал широко использоваться в качестве инструмента прикладных исследований, в частности, для обработки медико-биологических процессов в случаях, когда нестационарность ограничивает применение классических методов анализа экспериментальных данных. За последние несколько лет наличие мультифрактальной структуры было обнаружено и численно охарактеризовано в динамике очень многих систем различной природы. Существует мнение, что в настоящее время метод ММВП является, возможно, наиболее мощным инструментом статистического описания неоднородных процессов. Данный метод может в значительной степени определить дальнейший прогресс в развитии теории анализа структуры нестационарных сигналов.

Поскольку многие процессы в природе относятся к классу «мультифракталов», то есть мультифрактальность можно рассматривать как достаточно общее явление, исследование этого явления и возможность его количественного описания представляет интерес уже само по себе. Кроме того, такое исследование имеет и практическую ценность с точки зрения изучения возможностей нового метода анализа экспериментальных данных, применимого при решении широкого круга задач. Отметим, что методов обработки нестационарных данных существует совсем немного. Если свойства процесса даже на коротких интервалах времени успевают существенно измениться, то использование классических алгоритмов анализа случайных процессов способно приводить к ошибкам в интерпретации полученных результатов. Арсенал универсальных инструментов, применимых независимо от свойства стационарности, включает концепцию аналитического сигнала [38, 39], метод анализа флуктуаций относительно тренда [40, 41] и вейвлет-анализ [42–49]. Рассматриваемый в данной работе мультифрактальный подход может с полным основанием интерпретироваться как еще один инструмент, входящий в этот список. Несмотря на то что он использует вейвлет-преобразование на промежуточных этапах вычислений, наверное было бы неправильно воспринимать метод ММВП в качестве составной части вейвлет-анализа: он, скорее, представляет собой сочетание двух различных теорий – теории вейвлетов и теории мультифракталов, имеющей глубокую анало-

гию со статистической термодинамикой. Однако метод ММВП еще недостаточно широко известен кругу исследователей, занимающихся обработкой экспериментальных данных. В настоящей работе сделана попытка изложить основы теории мультифрактального анализа сложных сигналов, базирующегося на вейвлет-преобразовании, и сведения, необходимые для его применения на практике. Отдельное внимание уделяется описанию новых возможностей анализа структуры сигналов, которые предоставляет данный метод, и существующих ограничений техники мультифрактального формализма.

1. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ ФОРМАЛИЗМ: ОТ СИНГУЛЯРНЫХ МЕР К СИНГУЛЯРНЫМ ФУНКЦИЯМ

1.1. Фрактальная размерность

Фрактальные объекты обладают самоподобными свойствами и демонстрируют наличие разнообразных сингулярностей (сильной изрезанности формы). Чтобы количественно охарактеризовать сложность их геометрии, традиционно используют концепцию фрактальной размерности. Данная величина может быть определена следующим образом. Пусть d – Евклидова размерность пространства, в котором находится фрактальный объект. Будем покрывать этот объект целиком d -мерными «шарами» диаметра ε , при этом каждая его точка должна обязательно попасть в тот или иной шар. Предположим, что для этого требуется не менее чем $N(\varepsilon)$ шаров. Тогда, если при достаточно малых ε величина $N(\varepsilon)$ меняется с ε по степенному закону

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0}, \quad (1)$$

то D_0 называется фрактальной размерностью исследуемого объекта или емкостью. В теории фракталов часто используется также понятие размерности Хаусдорфа d_H , которая вводится в рассмотрение следующим образом [50–52]. Пусть S – некоторое множество в пространстве R^n . Предположим, что мы покрываем данное множество шарами, диаметр которых не превышает значение ε . Мера Хаусдорфа l_δ определяется как

$$l_\delta = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_K r_i^\delta. \quad (2)$$



Здесь \inf – минимальное значение по всем возможным покрытиям K множества S шарами диаметра r_i ($r_i \leq \varepsilon$). Указанный предел зависит от параметра δ . Размерность Хаусдорфа d_H представляет собой такое значение δ , при котором величина l_δ является конечной:

$$\begin{cases} \delta < d_H \Rightarrow l_\delta = \infty \\ \delta > d_H \Rightarrow l_\delta = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Согласно данному определению, d_H может принимать нецелые значения.

Несмотря на то что размерность Хаусдорфа хорошо определена с точки зрения математики, ее чрезвычайно сложно вычислить на практике. Именно поэтому исследователи предпочитают иметь дело с более «практичными» характеристиками, к числу которых относится емкость. Для многих фракталов D_0 и d_H принимают близкие значения или совпадают; в общем случае справедливо неравенство $d_H \leq D_0$ [53].

Величина D_0 принимает целые значения для простых геометрических объектов: точки, прямой линии, гладкой двумерной поверхности (соответственно $D_0 = 1, 2, 3$) и нецелые значения для самоподобных фрактальных объектов, имеющих сильно изрезанную форму. Классическим примером служит Канторово множество, процедура построения которого состоит в следующем (рис.2). Первоначально берется отрезок прямой линии единичной длины. Затем он делится на три равные части, средняя из которых удаляется. На следующем шаге делению на три части и последующему удалению середины подвергается каждый из двух оставшихся отрезков. Данный процесс далее продолжается до бес-

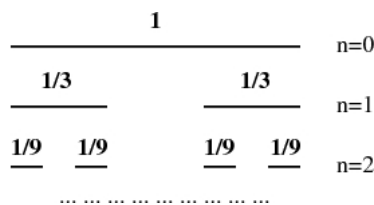


Рис.2. Канторово множество конечности. Канторово множество представляет собой бесконечное число точек, которые не удаляются в ходе этой процедуры.

Чтобы вычислить размерность Канторова множества, запишем степенную зависимость (1) в виде

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (4)$$

На n -м шаге построения мы имеем 2^n отрезков длины $1/3^n$. В качестве $N(\varepsilon)$ на этом шаге можно взять величину 2^n , а в качестве ε – величину $1/3^n$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, который соответствует пределу $n \rightarrow \infty$, получим

$$D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63. \quad (5)$$

Канторово множество так же, как и другие регулярные фракталы, сохраняет свою геометрию при изменении масштаба. Перемасштабирование будет приводить к появлению степенной зависимости следующего вида: $N(\lambda\varepsilon) = \lambda^{-D_0} N(\varepsilon)$.

1.2. Фрактальные меры

Фракталы в природе могут встречаться не только в виде сложных геометрических объектов. Различные процессы на фрактальных объектах (физические, химические и т.д.) могут генерировать стационарные распределения, называемые *фрактальными мерами*. Примерами таких мер служат инвариантная вероятностная мера на странном аттракторе, распределение вероятностей роста для процессов ограниченной диффузией агрегации или распределение массы на некотором фрактальном множестве. Если в качестве количественной характеристики сложной геометрии фракталов используется размерность D_0 , то математическое описание фрактальных мер осуществляется в терминах *спектра сингулярностей* $f(\alpha)$ [2]. Смысл этой функции состоит в следующем. Предположим, что задано распределение меры μ на некотором множестве, например распределение заряда или массы. Если это множество покрывать шарами диаметра ε , то мера шара с центром в точке x_i зависит от ε по степенному закону вида

$$\mu_{x_i}(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha(x_i)}, \quad (6)$$

где $\alpha(x_i)$ называется *экспонентой сингулярности*. Зависимость (6) удобнее переписать в виде



$$\alpha(x_i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu_{x_i}(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (7)$$

Чем меньше $\alpha(x_i)$, тем более сингулярным является распределение меры в этой точке. Значение $\alpha(x_i) = 1$ будет приниматься при равномерном распределении. Предел $\alpha(x_i) = 0$ соответствует распределению меры, подобному функции Дирака, и означает, что заряд или масса сосредоточены вблизи одной точки [54]. Спектр сингулярностей $f(\alpha)$ характеризует зависимость от ε числа элементов покрытия N_α , соответствующих точкам с экспонентой сингулярности, равной некоторому значению α :

$$N_\alpha(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-f(\alpha)} \quad (8)$$

По смыслу величина f соответствует размерности Хаусдорфа [2]. В случае равномерного распределения меры на множестве $\alpha = \text{const}$ и спектр сингулярностей представляет собой единственную точку на плоскости (α, f) . При неравномерном распределении меры функция $f(\alpha)$ имеет более сложный («колоколообразный») вид.

Вышесказанное можно проиллюстрировать на примере Канторова множества. Предположим, что на этом множестве задано равномерное распределение меры μ , например массы, и для покрытия множества рассматриваются 2^n элементов (окружностей) диаметра $\varepsilon = 3^{-n}$. Мера каждого элемента покрытия будет равна $\mu_{x_i}(\varepsilon) = 2^{-n}$, где x_i – центр окружности. Согласно формуле (7), экспонента сингулярности $\alpha(x_i)$, определяемая наклоном зависимости $\ln \mu_{x_i}(\varepsilon)$ от $\ln \varepsilon$, принимает значение $\alpha(x_i) = \ln 2 / \ln 3$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ это значение экспоненты соответствует каждой точке Канторова множества.

В рассматриваемом примере экспонента α совпадает с размерностью Хаусдорфа d_H , а спектр сингулярностей $f(\alpha)$ состоит из одной точки $f(\alpha) = \alpha \approx 0.63$ [2]. Таким образом, мы наблюдаем только один «сорт» сингулярностей, и

соответствующая мера μ называется *одно-родной* [1, 3].

Если мера распределена неравномерно на множестве, спектр сингулярностей усложняется. Для иллюстрации проанализируем случай биномиального распределения [2]: предположим, что отрезок $[0, 1]$ вновь делится на 3 равные части; средняя часть выбрасывается, но теперь мы приписываем разные весовые коэффициенты p_1 и $p_2 = (1 - p_1) \neq p_1$ двум оставшимся интервалам $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$. Если вначале ($n = 0$) мы примем для всего интервала $[0, 1]$ $\mu_0 = 1$, то на первом шаге процедуры построения Канторова множества двум отрезкам соответствуют меры $\mu_1 = p_1 \mu_0$ и $\mu_2 = (1 - p_1) \mu_0$. При последующих шагах будем использовать те же самые весовые коэффициенты p_1 и p_2 , осуществляя деление на части каждого из отрезков (рис.3).

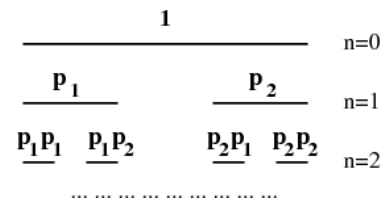


Рис.3. Канторово множество с неравномерным распределением меры

Покрывая полученное фрактальное множество окружностями радиуса $\varepsilon = 3^{-n}$, рассмотрим крайний левый и крайний правый элементы покрытия. Для первого из них, содержащего точку $x_0 = 0$, мера μ_0 равна $p_1^n \mu_0 = p_1^n$. Поэтому, согласно (7), $\alpha(0) = \ln p_1 / \ln(1/3)$. Аналогично для крайнего правого элемента покрытия, содержащего точку $x_0 = 1$, можно записать $\alpha(1) = \ln p_2 / \ln(1/3)$. Поскольку изначально $p_1 \neq p_2$, то и $\alpha(0) \neq \alpha(1)$. Соответственно спектр сингулярностей $f(\alpha)$ уже не будет состоять только из одной точки. Типичный вид этой функции для случая неоднородной меры представлен на рис.4. Наличие неравномерного распределения меры на множестве является свойством мультифрактальных объектов: чем более неоднородной является мера, тем шире спектр сингулярностей. Отметим, что максимум $f(\alpha)$ сов-



падает со спектром сингулярностей для случая равномерного распределения меры на Канторовом множестве, характеризуя тем самым наиболее часто встречающуюся сингулярность.

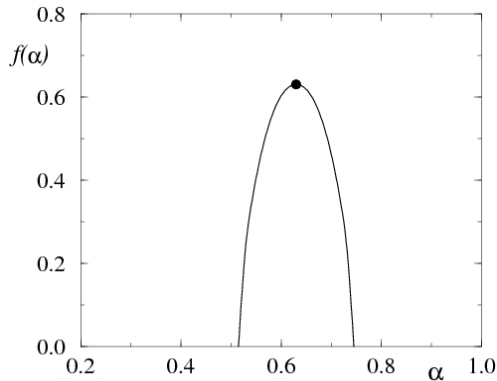


Рис.4. Спектры сингулярностей для монофрактального объекта (Канторово множество с равномерным распределением меры) – точка, и мультифрактального объекта (Канторово множество с неравномерным распределением меры) – сплошная линия

На практике вычислить функцию $f(\alpha)$ на основе формулы (8) весьма проблематично из-за очень медленной сходимости при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, значения оцениваемых характеристик могут заметно варьироваться для разных выбранных точек. Поэтому в теории мультифракталов предпочитают использовать специальный подход, основанный на расчете обобщенных фрактальных размерностей как глобальных характеристик, зная которые можно вычислить спектр сингулярностей $f(\alpha)$.

В рамках данного подхода вводятся в рассмотрение так называемые *частичные функции* (или *обобщенные статистические суммы*) [54, 55]:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q(\varepsilon), \quad (9)$$

где $q \in \mathbb{R}$, $N(\varepsilon)$ – число элементов покрытия размера ε , μ_i – мера элемента покрытия с номером i . Зависимость функций Z от ε , как правило, носит степенной характер вида

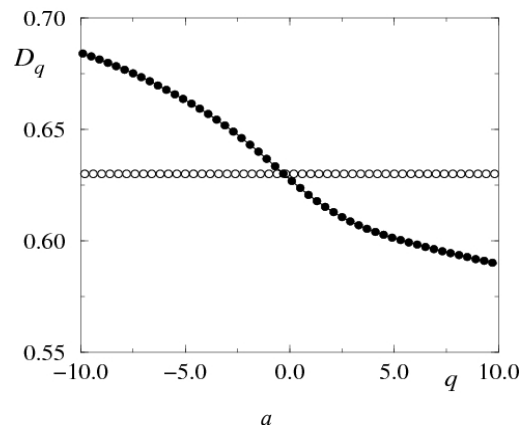
$$Z(q, \varepsilon) \sim \varepsilon^{(q-1)D_q}, \quad (10)$$

где величины D_q представляют собой характеристики, называемые *обобщенными фрактальными размерностями* [56–59]. Коэффициент $(q - 1)$ включен в показатель степени для автоматического выполнения равенства $Z(1, \varepsilon) = 1$, означающего условие нормировки для меры μ . Обычно используется следующее обозначение:

$\tau(q) = (q - 1)D_q$, (11)

а величины $\tau(q)$ называются *скейлинговыми экспонентами*. Как видно из формул (9) и (10), при $q = 0$ мы приходим к ранее введенному определению фрактальной размерности или емкости (1).

Для простых фракталов, называемых также *монофракталами*, $D_q = \text{const}$. В общем случае мультифрактальных объектов значения D_q монотонно уменьшаются с ростом q (рис. 5, а). Это уменьшение можно рассматривать в качестве диагностического критерия того, что анализируемый объект является неоднородным фракталом. Как следствие, зависимость $\tau(q)$ представляет собой прямую линию для однородных фрактальных мер и нелинейную функцию для неоднородных (рис. 5, б).



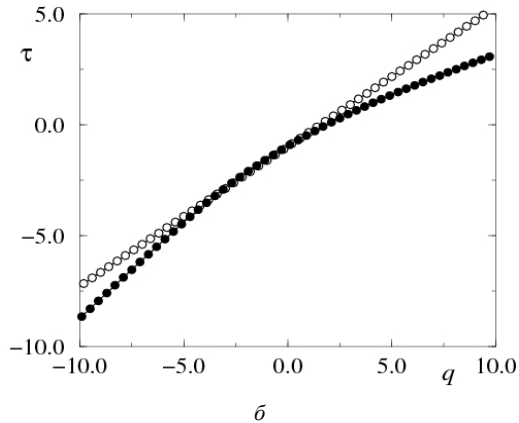


Рис.5. Спектры обобщенных фрактальных размерностей (a) и скейлинговых экспонент (b) для монофрактала (белые кружочки) и мультифрактала (черные кружочки)

Метод расчета спектра сингулярностей на основе скейлинговых экспонент $\tau(q)$ или обобщенных фрактальных размерностей является более устойчивым и надежным, чем непосредственно по определению (8). В рамках этого метода нахождение функций $f(\alpha)$ осуществляется с помощью преобразования Лежандра:

$$\begin{cases} \alpha = d\tau/dq, \\ f(\alpha) = q\alpha - \tau(q). \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, знание спектра скейлинговых экспонент $\tau(q)$ позволяет сразу же определить искомую функцию $f(\alpha)$. Мультифрактальный анализ часто называют *мультифрактальным формализмом*, подразумевая под этим термином подход, в рамках которого спектр сингулярностей $f(\alpha)$ рассматривается как преобразование Лежандра спектра $\tau(q)$. Как отмечено в [60], существует глубокая аналогия между мультифрактальным формализмом и статистической термодинамикой. Переменные q и $\tau(q)$ играют ту же роль, что и величина, обратная температуре, и свободная энергия в термодинамике, а преобразование Лежандра указывает на то, что вместо энергии и энтропии рассматриваются α и $f(\alpha)$ [17, 18, 61]. Ряд строгих математических результатов, относящихся к мультифрактальному формализму, был получен в рамках теории динамических систем. В последние годы данный подход приобретает большую популярность в различных экспериментальных исследованиях.

1.3. Фрактальные функции

Если бы теория мультифракталов ограничивалась только сингулярными мерами, ее практическая ценность была бы не столь велика. Однако фрактальные объекты встречаются в природе еще и в виде сингулярных функций, что позволяет рассматривать аппарат мультифрактального анализа в качестве инструмента исследования сигналов сложной структуры, необходимо было только адаптировать этот инструмент на случай нерегулярных процессов.

Возможно, наиболее интенсивные исследования случайных фрактальных функций были связаны с изучением процессов диффузии или броуновского движения. В одномерном случае смещение броуновской частицы $x(t)$ вдоль прямой линии представляет собой случайный процесс с нулевым средним и дисперсией

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t, \quad (13)$$

где скобки обозначают процедуру усреднения по ансамблю реализаций. Линейная зависимость дисперсии от времени (13) характеризует случай нормальной диффузии. Функция $x(t)$ может интерпретироваться как «фрактальная» в том смысле, что ее график на плоскости «время–координата» представляет собой фрактальное множество точек с размерностью $D_0 = 1.5$ [3] (рис.6).

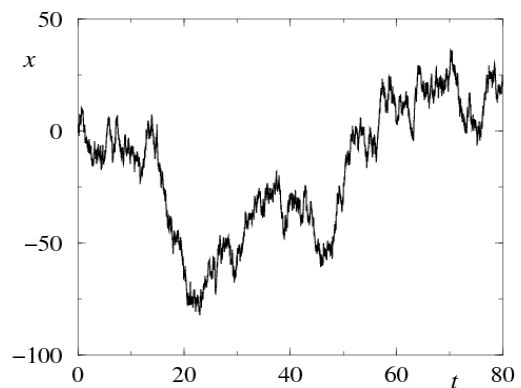


Рис.6. Броуновское движение (случай нормальной диффузии)

Обобщением концепции обычного броуновского движения является фрактальное броуновское движение, при котором смещение частицы $x(t)$ в одномерном пространстве является случайным процессом с дисперсией



$$\langle x^2(t) \rangle \sim t^{2H}, \quad (14)$$

где $0 < H < 1$. При $H \neq 0.5$ такая дисперсия соответствует аномальной диффузии с коррелированными приращениями. Корреляции приращений оказывают влияние на график зависимости $x(t)$, делая его более изрезанным ($H < 0.5$) или более гладким ($H > 0.5$). Соответствующие изменения влияют на величину размерности, которая связана с показателем степени H следующим образом [3]:

$$D_0 = 2 - H. \quad (15)$$

Несмотря на то что при изучении фрактальных функций может проводиться расчет размерности графика, этот классический подход дает мало информации по сравнению с мультифрактальным анализом, позволяющим получать непрерывный спектр фрактальных размерностей и статистические сведения о наличии различных сингулярностей. Вычисление одной-единственной величины D_0 позволяет охарактеризовать функцию при условии, что она демонстрирует только один «сорт» сингулярного поведения, которое является неизменным во времени (случай однородной фрактальной функции). Такая ситуация, конечно же, представляет собой идеализацию реальных процессов, наблюдаемых в природе.

Броуновское движение относится к числу случайных фракталов: увеличенный фрагмент функции $x(t)$ не является идентичным всему графику. В теории фракталов часто используется понятие самоафинности для характеристики множеств, инвариантных при афинных преобразованиях. В частности, на плоскости это означает, что перемасштабирование отдельного фрагмента графика функции с различными коэффициентами увеличения по абсциссе и ординате будет приводить к графику, похожему на первоначальный. Самоподобие, о котором упоминалось применительно к фрактальным объектам, строго говоря, является частным случаем самоафинности и означает наличие сходства отдельного фрагмента всему объекту при перемасштабировании с одинаковыми коэффициентами увеличения по обеим осям. Для самоафинной функции можно записать следующее выражение:

$$g(x_0 + lx) - g(x_0) \sim l^H (g(x_0 + x) - g(x_0)). \quad (16)$$

При рассмотрении случайных процессов, таких как броуновское движение, равенство может выполняться только при фиксированных значениях l и x_0 . Показатель степени H в последней формуле называется *экспонентой Хёрста* [1, 4] и характеризует, насколько нерегулярна функция g в точке x_0 . При $H < 1$ эта функция является недифференцируемой и по аналогии с ранее введенной экспонентой сингулярности α , чем меньше H , тем более сингулярна $g(x)$. В рамках мультифрактального анализа само-афинные функции рассматриваются не с точки зрения сложной геометрии их графика на плоскости «время – координата», а как функции с локальным нерегулярным поведением. Учитывая то, что сингулярности функции могут различаться в разных точках, их описание в общем случае не может осуществляться с помощью одного параметра H . В связи с этим используют понятие локальных экспонент Хёрста или *экспонент Гёльдера* $h(x_0)$, которые вводятся в рассмотрение путем некоторого изменения определения H , а именно

$$|g(x_0 + l) - g(x_0)| \sim l^{h(x_0)}, \quad (17)$$

и характеризуют локальное сингулярное поведение функции g в точке x_0 . Как отмечается в [54], мультифрактальный подход для сигналов потенциально способен характеризовать широкий класс процессов, являющихся более сложными по сравнению с процессами, для описания которых достаточно одного числа (единственного значения фрактальной размерности либо одной скейлинговой характеристики, описывающей, например, частотную зависимость спектральной плотности мощности).

Анализ нерегулярных функций, так же, как и анализ фрактальных мер, осуществляется в терминах спектра сингулярностей. Однако при рассмотрении функциональных зависимостей (нерегулярных сигналов) проводится смена используемых обозначений. Вместо спектра $f(\alpha)$ рассматривается аналогичная функция $D(h)$: экспонента Гёльдера по смыслу соответствует α , а $D(h_0)$ представляет собой размерность подмножества анализируемых данных, которое характеризуется локальной экспонентой h_0 .

Существуют несколько способов вычисления спектра сингулярностей. Так же, как и



в случае фрактальных мер, проведение вычислений непосредственно по определению осложняется медленной сходимостью и тем обстоятельством, что при рассмотрении локальной окрестности произвольной точки с нерегулярным поведением x_0 в эту окрестность могут попадать другие сингулярности. Эффект «наложения» нескольких сингулярностей будет приводить к значительным погрешностям расчета скейлинговых характеристик и нестабильности результатов при вариации параметров алгоритма в ходе проведения численного анализа. Для повышения надежности расчетов $D(h)$ проводится статистический анализ на основе структурных [27] или частичных функций [30, 31]. Последний метод является предпочтительным, так как он позволяет проводить исследования более широкого класса сингулярностей. В следующем параграфе изложены основы теории мультифрактального анализа, в рамках которого вычисление частичных функций базируется на вейвлет-преобразовании.

2. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2.1. Вейвлет-анализ сингулярных функций

В начале 90-х гг. Мьюзи, Бакри и Арнеодо разработали новый подход к исследованию мультифрактальных свойств сигналов сложной структуры – метод «максимумов модулей вейвлет-преобразования» [30, 31, 54]. Как следует из названия метода, он базируется на вейвлет-преобразовании, состоящем в разложении сигнала по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса характеризует как определенную пространственную или временную частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве или времени [42–48].

Вейвлет-преобразование функции $g(x)$ определяется следующей формулой:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (18)$$

где a представляет собой параметр масштаба, b – пространственная координата или момент времени, ψ – солитоноподобная функция

(вейвлет), обладающая определенными свойствами и сконструированная, например, на основе производных функции Гаусса:

$$\psi^{(m)} = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left[\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]. \quad (19)$$

Подробное описание теории вейвлетов можно найти, например, в обзоре [48]. При изучении локальных сингулярностей функции $g(x)$ обычно рассматривают $m = 1$ («WAVE»-вейвлет) или $m = 2$ («МНАТ»-вейвлет). Более высокие производные применяются редко.

Как отмечалось в пункте 1.3, степень сингулярности функции g может быть описана с помощью экспоненты Гельдера. Ее более строгое математическое определение можно ввести следующим образом. Рассмотрим случай, когда функция g в точке x_0 является n раз дифференцируемой, а $(n+1)$ -я производная не существует. Тогда функцию $g(x)$ можно разложить в ряд Тейлора до степени n включительно. Обозначим полученный ряд (полином степени n) символом $P_n(x)$. Экспонентой Гельдера в точке x_0 называется наибольшее значение h , при котором выполняется следующее неравенство:

$$|g(x) - P_n(x - x_0)| \leq C |x - x_0|^h. \quad (20)$$

Чем больше h , тем более регулярной (более «гладкой») является функция g . Интегрирование этой функции увеличивает значение h на 1, а дифференцирование – уменьшает. Преположим, что анализируемую сингулярную функцию в окрестности точки $x=x_0$ можно представить в виде двух слагаемых:

$$g(x) = P_n(x) + C |x - x_0|^{h(x_0)}, \quad (21)$$

то есть в виде суммы регулярной компоненты (полинома P_n) и слагаемого, которое определяет нерегулярное поведение и характеризуется нецелым значением $h(x_0)$ [54]. Одной из особенностей вейвлет-преобразования, широко используемой для устранения из сигнала полиномиальных составляющих, является то, что вейвлеты, имеющие первые m нулевых моментов

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0, \quad (22)$$

будут ортогональны полиномам до степени m включительно, и при $m \geq n$:



$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)\psi(x)dx = 0. \quad (23)$$

Поэтому вейвлет-преобразование функции $g(x)$ примет вид

$$W(a, x_0) = Ca^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) |ax|^{h(x_0)} dx. \quad (24)$$

В целях упрощения анализа в [54] предлагается немного изменить определение вейвлет-преобразования, умножив выражение (18) на величину $1/\sqrt{a}$:

$$W(a, x_0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) g(x) dx. \quad (25)$$

В этом случае при $a \rightarrow 0$ наблюдается простая степенная зависимость:

$$W(a, x_0) \sim a^{h(x_0)}. \quad (26)$$

Таким образом, если функция $g(x)$ имеет особенность в точке $x=x_0$, то ее локальное сингулярное поведение характеризуется степенным законом вида (26). Если же эта функция является непрерывно дифференцируемой в точке x_0 вплоть до производной порядка m , то при $a \rightarrow 0$

$$W(a, x_0) \leq a^m. \quad (27)$$

В задачах исследования структуры сигналов обычно анализируют особенности самой функции $g(x)$, а ее производные рассматривают редко. В этом случае значения Гёльдеровских экспонент $h(x_0) < 1$ и наличие нерегулярности в точке x_0 будут приводить к разной скорости уменьшения вейвлет-коэффициентов с масштабом a . Чем быстрее коэффициенты уменьшаются при $a \rightarrow 0$, тем более регулярна функция в этой точке. Это приводит к тому, что значения $W(a, x)$ будут расходиться в окрестности точки с локальной особенностью. Такое поведение вейвлет-коэффициентов позволяет проводить детальный анализ сингулярностей.

2.2. Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования

Алгоритм ММВП предполагает исследование нерегулярного поведения функции $g(x)$ в два этапа. На первом этапе осуществляется вейвлет-преобразование по формуле (25). Результат вейвлет-преобразования можно интерпретировать как поверхность в 3-мерном пространстве (рис. 7, а). Наиболее важная

информация о ней содержится в «скелетоне» или линиях локальных экстремумов поверхности коэффициентов $W(a, x)$, поиск которых проводится на каждом масштабе a (рис. 7, б).

Выбор базисной функции, в частности, выбор параметра m в формуле (19), определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из $g(x)$. С одной стороны, увеличение m позволяет проигнорировать крупномасштабные полиномиальные составляющие

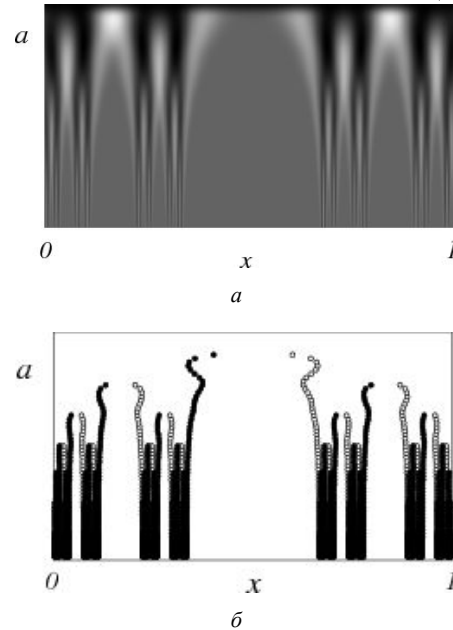


Рис.7. Результат вейвлет-преобразования в проекции на плоскость (a, x) : а – большие значения коэффициентов $W(a, x)$ соответствуют более темным участкам; б – линии локальных экстремумов поверхности коэффициентов $W(a, x)$: о – локальные минимумы, • – максимумы

(устранить тренд) и анализировать мелко-масштабные вариации данной функции. С другой стороны, многократное дифференцирование приводит к увеличению числа линий локальных экстремумов вейвлет-коэффициентов и появлению большого числа дополнительных линий, обрывающихся на малых масштабах. Такие линии являются короткими для того, чтобы проводить по ним оценки степенных зависимостей вида (26), и служат помехами при проведении численного анализа сингулярностей. Как отмечается в [48], вейвлет-преобразование устроено таким образом, что $W(a, x_0)$ является регулярной функцией даже при нерегулярной $g(x)$. Вся информация о возможной особенности $g(x)$, включая ее локализацию x_0 и показатель $h(x_0)$, заключена в асимптотическом поведении ко-



эффициентов $W(a, x_0)$ при малых a . Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, то g имеет особенность в x_0 , и экспонента Гельдера может быть определена путем представления зависимости (26) в двойном логарифмическом масштабе и вычисления наклона $\ln W(a, x_0)$ от $\ln a$. Если коэффициенты $W(a, x_0)$ близки к нулю в окрестности x_0 на малых масштабах, то g является регулярной в этой точке. Важное обстоятельство при расчете Гельдеровских экспонент состоит в том, что искомые характеристики не зависят от выбора базисных функций вейвлет-преобразования, что позволяет говорить об универсальности анализа локальных нерегулярностей [48].

Выделением «скелетона» заканчивается первый шаг алгоритма ММВП. Теоретически анализ выделенных линий локальных экстремумов или локальных максимумов модулей вейвлет-преобразования позволяет вычислять Гельдеровские экспоненты, то есть анализировать сингулярности функции $g(x)$. Однако такой подход является неточным – при увеличении масштаба сказывается влияние соседних нерегулярностей, что приводит к различным ошибкам. В теории мультифракталов предпочитают проводить расчеты на основе частичных функций, позволяющих получать более надежные оценки вычисляемых характеристик. Поэтому второй шаг метода ММВП состоит в построении функций $Z(q, a)$, называемых частичными функциями, по формуле

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} |W(a, x_l(a))|^q, \quad (28)$$

где $L(a)$ – множество всех линий l максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, существующих на масштабе a ; $x_l(a)$ характеризует расположение на этом масштабе максимума, относящегося к линии l . Определение (28) не подходит для отрицательных значений q , поскольку возможна ситуация, когда $W(a, x_l(a)) = 0$. В связи с этим на практике используется другая формула

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left(\sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right)^q. \quad (29)$$

то есть выбирается максимальное значение модуля коэффициентов вейвлет-преобразования вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения a . Согласно

[30, 31], выполняется следующая зависимость:

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}. \quad (30)$$

где величину $\tau(q)$, определяемую для некоторого значения q путем вычисления наклона $\ln Z(q, a)$ от $\ln a$, называют *скейлинговой экспонентой* по аналогии со случаем сингулярных мер. Вариация степеней q при построении частичных функций (29) позволяет получить линейную зависимость $\tau(q)$ для монофрактальных объектов ($H = d\tau/dq = \text{const}$) и нелинейную зависимость $\tau(q) = qh - D(h)$ с большим числом Гельдеровских экспонент $h(q) = d\tau/dq \neq \text{const}$ в случае мультифракталов.

При некоторых значениях q скейлинговые экспоненты $\tau(q)$ имеют простую интерпретацию [54]. Так, существует взаимосвязь между $\tau(2)$ и показателем степени β функции спектральной плотности мощности $S(f) \sim 1/f^\beta$:

$$\beta = 2 + \tau(2). \quad (31)$$

В свою очередь, учитывая то обстоятельство, что спектральная плотность мощности связана с корреляционной функцией преобразованием Фурье, знание β позволяет определить скорость спада корреляций $\Psi(\tau) \sim \tau^{-\gamma}$, то есть показатель γ . Взаимосвязь между основными величинами, рассматриваемыми в рамках алгоритма ММВП, определяется преобразованием Лежандра:

$$\begin{cases} h = d\tau/dq. \\ D(h) = qh - \tau(q). \end{cases} \quad (32)$$

В отличие от метода структурных функций, основанный на вейвлет-преобразовании мультифрактальный анализ позволяет исследовать сингулярности при отрицательных значениях q . Частичные функции $Z(q, a)$ при $q < 0$ характеризуют особенности скейлинга для слабых сингулярностей (малых флуктуаций), а при $q > 0$ – для сильных сингулярностей (больших флуктуаций).

Проиллюстрируем алгоритм ММВП на том же примере, что и в параграфе 2, то есть Канторовом множестве. Для проведения чис-



ленного анализа Канторову множеству может быть поставлена в соответствие бинарная последовательность, состоящая из нулей и единиц (нули обозначают выбрасываемые при построении ряда части отрезка). Таким образом, данная последовательность вначале ($n = 0$) состоит из одного элемента «1», на первом этапе из трех «101», на втором – из девяти: «101000101» и т.д. Рассмотрим в качестве фрактальной функции $g(x)$ функцию распределения однородной меры μ на Канторовом множестве. Нормируя меру ($\mu([0, 1]) = 1$), определим $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = \mu([0, x]) = \int_0^x d\mu. \quad (33)$$

Такая функция представляет собой так называемую «чертову лесенку» (рис. 8). Выбрав в качестве базисного вейвлета «МНАТ»-вейвлет и следуя алгоритму, изложенному в предыдущем параграфе, на первом этапе проведем вейвлет-преобразование функции $g(x)$ и выделение линий локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов. Как видно из рис. 7, число локальных максимумов уменьшается при увеличении масштаба a . В соответствии с уравнением (26) локальное сингулярное поведение $g(x)$ может анализироваться путем построения зависимости $\ln W(a, x_0)$ от $\ln a$ и вычисления наклона аппроксимирующей прямой. Данные расчеты, проведенные для различных линий локальных максимумов, представлены на рис. 9, а. Наряду с ожидаемой величиной $h = \ln 2 / \ln 3$, для коротких линий получены значения Гельдеровских экспонент, варьирующиеся в широких пределах. Картина меняется, если исключить из рассмотрения линии, «обрывающиеся» на малых масштабах и рассматривать степенные зависимости вейвлет-коэффициентов, например при $\ln a > 1.5$ (рис. 9, б). Чтобы избежать проблем, связанных с недостаточно хорошим разрешением на малых масштабах, изучение скейлинговых особенностей проводится при не слишком малых масштабных коэффициентах a .

Непосредственные оценки Гельдеровских экспонент h из степенных зависимостей для вейвлет-коэффициентов менее точны, чем определение спектра $\tau(q)$ частичных функций и вычисление локальных наклонов $h = d\tau / dq$

(второй этап метода ММВП). При большом числе шагов n процедуры построения Канторова множества численно найденные значения h и спектра сингулярностей $D(h)$ практически не отличаются от теоретических. Например, в расчетах для $n = 10$ отклонение от теоретического значения $\ln 2 / \ln 3$ не превышает 1%.

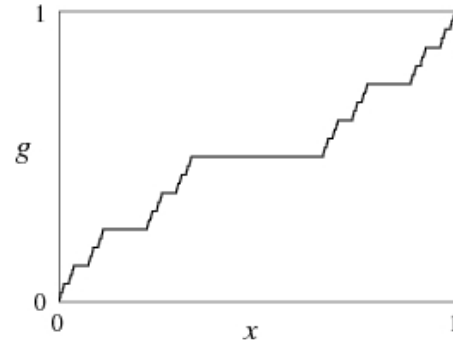


Рис.8. Функция распределения однородной меры на Канторовом множестве

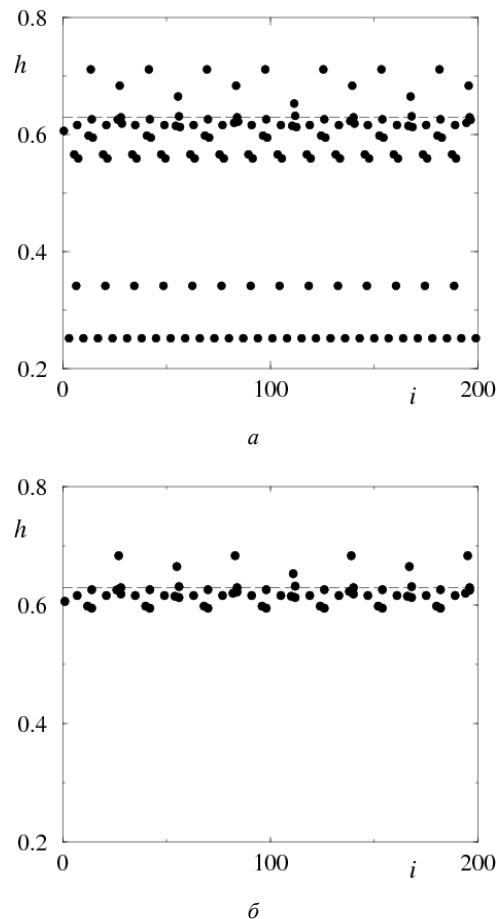


Рис.9. Значения экспонент Гельдера, вычисленных по наклону степенной зависимости вида (26) для всех линий локальных экстремумов (а) и без учета линий, «обрывающихся» на малых масштабах ($\ln a < 1.5$) (б)



Увеличение ширины спектра $D(h)$ соответствует увеличению неравномерности распределения меры

Если в качестве анализирующего вейвлета используются производные высокого порядка функции Гаусса, то число дополнительных коротких линий локальных максимумов $W(a, x_0)$ возрастает, что обуславливается осциллирующими «хвостами» солитоноподобных функций $\psi^{(m)}$. Поэтому при проведении мультифрактального анализа бывает целесообразно ограничиваться малым значением m (обычно $m \leq 2$).

Мы рассмотрели случай равномерного распределения меры μ на фрактальном множестве. В численном примере можно реализовать более сложный пример – Канторово множество со случайным распределением меры. При построении такого множества весовые коэффициенты p_1 и $p_2 = (1 - p_1)$ на каждом шаге выбираются равными $0.5 \pm \xi$, где ξ – нормально распределенная случайная величина. При малой дисперсии случайной величины созданное множество будет иметь структуру, близкую к монофрактальной. При увеличении дисперсии динамика становится мультифрактальной: точка на плоскости $D(h)$ преобразуется в «колоколообразную» зависимость, типичную для мультифракталов (рис.10). Таким образом, при случайном распределении меры на Канторовом множестве наиболее вероятная сингулярность соответствует значению $\ln 2 / \ln 3$, а степень мультифрактальности или ширина спектра $D(h)$ зависит от дисперсии случайной величины ξ , то есть от неравномерности распределения меры.

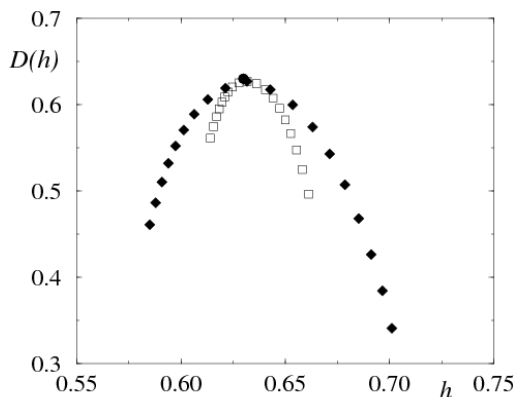


Рис.10. Спектры сингулярностей для Канторова множества со случайным распределением меры.

Мультифрактальный анализ может проводиться применительно к сигналам самой различной природы. Помимо нерегулярных реализаций непрерывнозначных случайных процессов на основе техники ММВП могут анализироваться, например, символьные последовательности, такие как цепочки нуклеотидов молекул ДНК. С этой целью их преобразуют в бинарные последовательности $u(i) = 1$ или $u(i) = 0$ в зависимости от того, какой нуклеотид встречается под номером i , после чего по аналогии с задачами об одномерных случайных блужданиях [40] рассматривается сумма:

$$g(k) = \sum_{i=1}^k u(i). \quad (34)$$

Проводя мультифрактальный анализ зависимости $g(k)$ методом ММВП, можно говорить об отсутствии корреляций в последовательности символов, если экспоненты Гёльдера $h = 0.5$, и о наличии корреляций при $h \neq 0.5$. Иногда говорят также о корреляциях $h > 0.5$ и антикорреляциях $h < 0.5$ [40]. Антикоррелированная динамика бинарной последовательности означает, что вероятность чередования нулей и единиц (пар «01» и «10») выше вероятности пар «00» или «11». В случае коррелированной динамики за нулями чаще следуют нули, за единицами – единицы, то есть вероятность обнаружения пар «00» и «11» увеличивается. Для реализаций случайных процессов значения Гёльдеровских экспонент также позволяют делать вывод о наличии антикоррелированной ($h < 0.5$) и коррелированной динамики ($h > 0.5$). В первом случае наблюдается чередование больших и малых значений случайного процесса (вслед за большим значением с большей вероятностью следует малое и наоборот). Во втором случае за большим значением чаще следует большое, за малым – малое: процесс является более «гладким». Частный случай $h = 1$ соответствует $1/f$ -шуму, $h = 1.5$ – Винеровскому случайному процессу.

Заметим, что процедура анализа мультифрактальных явлений для последовательностей вида (34) приводит к тем же самым результатам, что и рассмотрение в качестве функции g исходной бинарной последова-



тельности $g(i) = u(i)$, если в последнем случае исключить множитель $1/a$ перед знаком интеграла в уравнении (25). Это объясняется тем, что интегрирование увеличивает значения h на 1. Если учесть данное обстоятельство в формуле (26), то можно проводить расчеты без вычисления функций $g(k)$ по формуле (34), аналогичных по смыслу взятию интеграла с переменным верхним пределом. Такое свойство метода очень полезно при применении мультифрактального анализа на практике.

3. ВОЗМОЖНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Основанный на вейвлет-преобразовании мультифрактальный анализ может рассматриваться в качестве метода исследования спектрально-корреляционных свойств различных процессов, в том числе нестационарных. Как следует, в частности, из формулы (23), медленная нестационарность или низкочастотный тренд не оказывает влияния на результат, если выбирается базисная функция ψ , имеющая несколько первых нулевых моментов. Помимо проблемы нестационарности метод ММВП может демонстрировать еще одно преимущество по сравнению с классическим спектральным анализом. Являясь инструментом «локального» исследования структуры функций времени, мультифрактальный анализ позволяет проводить оценку корреляционных свойств случайных процессов по сравнительно коротким сигналам. В целях иллюстрации эффективности использования алгоритма ММВП в качестве метода анализа корреляционных свойств рассмотрим Винеровский случайный процесс, статистические свойства которого хорошо известны ($h = 1.5$).

Применение классического корреляционного анализа показывает, что при анализе сравнительно коротких реализаций одного и того же процесса оценки закона спада корреляций могут существенно отличаться для разных выборок. Скорость спада автокорреляционной функции на рис.11 отличается почти в 2 раза для разных реализаций длительностью 3000 точек. Метод ММВП диагностирует наличие Винеровского процесса по тем же самым выборкам значительно надежнее. В предположении однородного процесса можно оценить усредненные по q Гельдеровские

экспоненты, которые принимают ожидаемое значение $h = 1.5$ с погрешностью не более 3%. Разброс характеристик скорости спада автокорреляционной функции в данном случае значительно выше.

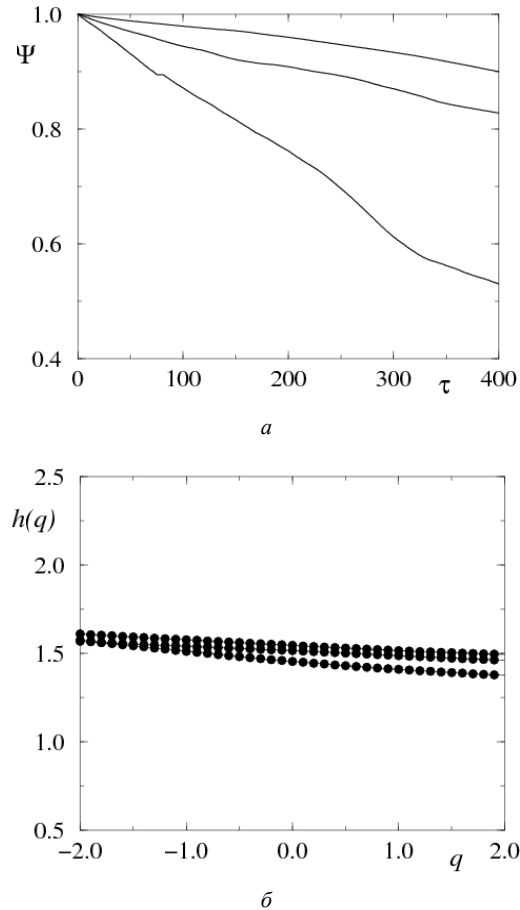


Рис.11. Результаты вычисления автокорреляционной функции (а) и Гельдеровских экспонент (б) по трем реализациям Винеровского случайного процесса длительностью 3000 точек

В качестве других примеров можно рассмотреть белый шум ($h = 0.5$) или $1/f$ -шум ($h = 1$), получив для них ожидаемые значения Гельдеровских экспонент с погрешностью, имеющей тот же порядок (~3% при анализе выборки, содержащей 3000 точек). Однако данные примеры относятся к числу очень простых объектов. Чтобы оценить реальные возможности и ограничения мультифрактального формализма, задачу следует усложнить и проанализировать неоднородные сигналы, содержащие различные типы сингулярного поведения.

Если рассматривается сумма процессов с различными статистическими свойствами и если данные процессы отличаются по амплитудам, то можно ожидать, что на малых мас-



штабах (при рассмотрении слабых сингулярностей) проявится один из них, а на больших масштабах (сильные сингулярности) себя обнаружит другой процесс. Для наглядности рассмотрим искусственный сигнал, представляющий собой сумму реализации Винеровского случайного процесса и последовательности импульсов, имеющей структуру Канторова множества. За счет такого сложения (рис.12) ожидается, что при рассмотрении больших флуктуаций проявится структура Канторова множества, на меньших масштабах будет доминировать Винеровский случайный процесс. Проведенные расчеты это подтверждают (рис.13). При отрицательных q (слабые сингулярности) значения Гельдеровских экспонент приближаются к $h \approx 1.5$, тогда как при положительных q (сильные сингулярности) $h \approx 0.63$. Таким образом, метод ММВП четко фиксирует различия в структуре анализируемого сигнала при изменении масштаба наблюдения. При наличии нескольких типов сингулярностей метод ММВП позволяет их четко фиксировать, если данные особенности относятся к разным масштабам. Если различия в масштабах незначительны, то четкого разделения сингулярностей не произойдет. В частности, в рассматриваемом примере суммы импульсов со структурой Канторова множества и Винеровского процесса увеличение интенсивности последнего будет приводить к тому, что при $q > 0$ значения Гельдеровских экспонент будут смещаться к $h \approx 1.5$ (рис.13). Второй тип сингулярности ($h \approx 0.63$) может проявиться лишь при очень больших q , но при увеличении q снижается надежность оценок Гельдеровских экспонент. При наличии нескольких типов сингулярностей, относящихся к близким масштабам, метод ММВП приводит к усредненным значениям h .

Одним из ограничений мультифрактального анализа является то, что он оценивает верхнюю огибающую истинного мультифрактального спектра. Это обстоятельство может приводить к нескольким ошибочным интерпретациям результатов численного анализа. Во-первых, если истинный спектр сингулярностей $D(h)$ является дискретным, то есть h принимает только дискретное множество значений, огибающая будет включать множество «ложных» точек, представляя собой интерполяцию дискретного спектра $D(h)$. Во-вторых, огибающая не позволяет идентифицировать «внутренние» точки, не принад-

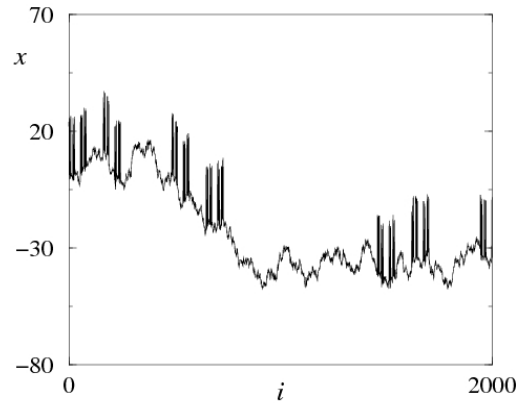


Рис.12. Искусственный сигнал, представляющий собой сумму реализации Винеровского случайного процесса и последовательности импульсов, имеющей структуру Канторова множества

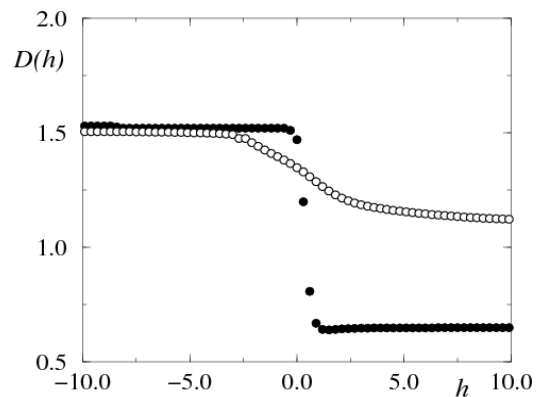


Рис.13. Зависимость $h(q)$ для сигнала, изображенного на рис.11 (черные кружочки). Белыми кружочками отмечен случай незначительных различий в масштабах наблюдения сингулярностей

лежащие верхней огибающей спектра $D(h)$, если они существуют (рис.14). В [62] отмечается, что «колоколообразная» форма спектра сингулярностей может быть получена даже в том случае, когда метод ММВП применяется для обработки сигналов, не обладающих мультифрактальными свойствами. Если процесс характеризуется не сплошным спектром $D(h)$, а небольшим дискретным набором Гельдеровских экспонент, то, получив огибающую, подобную изображенной на рис.14, в общем случае нельзя достоверно сказать, существуют ли сингулярности, характеризующиеся значением h , равным, например, 0.7 ± 0.05 . Чтобы избежать сложностей в интерпретации результатов, целесообразно рассматривать метод ММВП как аппарат численного анализа, позволяющий оценивать

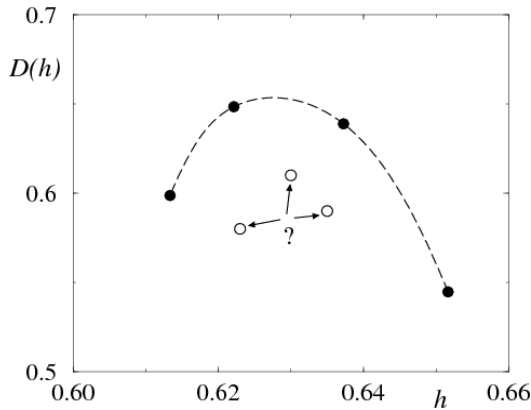


Рис.14. Иллюстрация ограничений метода мультифрактального формализма. Черные кружочки обозначают истинный мультифрактальный спектр, пунктирная линия – результат применения мультифрактального анализа. Внутренние точки (белые кружочки) не идентифицируются на основе метода ММВП

диапазон изменения Гельдеровских экспонент (степень мультифрактальности) и характеризовать наличие корреляций различного типа в нестационарных случайных процессах.

4. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА: ЭФФЕКТЫ ПОТЕРИ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСТИ

Рассмотрим несколько примеров применения техники максимумов модулей вейвлет-преобразования при решении конкретных задач, включая тестирование данного подхода как метода количественного описания известных эффектов в динамике нелинейных систем (хаотической и стохастической синхронизации), а также использование мультифрактального анализа в качестве эффективного инструмента диагностики состояния объектов живой природы по нестационарным сигналам.

4.1. Хаотическая динамика взаимодействующих систем

В качестве первого примера рассмотрим тестирование мультифрактального анализа с точки зрения возможности диагностики известного явления синхронизации хаоса в динамике взаимодействующих автоколебательных систем. Синхронизация хаотических колебаний приводит к изменениям характеристик аттракторов, существующих в отсутствие взаимодействия, которые отражаются в структуре характерных временных интервалов, таких как времена возврата в секущую Пуанкаре. Согласно работе [63], распределение времен возврата динамической системы

может характеризоваться мультифрактальными свойствами, то есть демонстрировать различный локальный скейлинг. Попытаемся выяснить, как взаимодействие автоколебательных систем влияет на мультифрактальные свойства хаотической динамики.

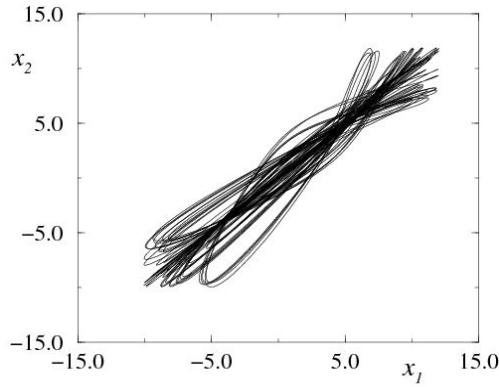
В качестве примера выберем модель двух взаимодействующих систем Ресслера:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + Ay_{1,2}, \\ \frac{dz_{1,2}}{dt} &= B + z_{1,2}(x_{1,2} - \mu), \end{aligned} \quad (35)$$

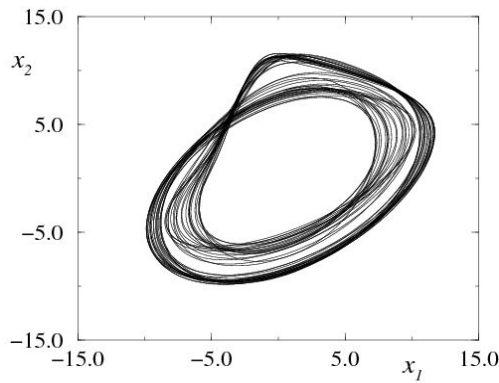
где параметры A , B и μ определяют режим динамики каждой системы, $\omega_1 = \omega_0 + \delta$ и $\omega_2 = \omega_0 - \delta$ представляют собой базовые частоты и δ – расстройка между ними, γ – параметр связи. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $A = 0.15$, $B = 0.2$, $\gamma = 0.02$, $\mu = 6.8$, $\omega_0 = 1.0$ [64].

Система (35) демонстрирует многообразие сосуществующих синхронных режимов хаотических колебаний, а также различные типы несинхронной динамики, которые различаются по своим мультифрактальным характеристикам [26, 65]. Ограничимся рассмотрением перехода через границу области фазовой синхронизации при увеличении параметра расстройки δ . Режимы синхронного и несинхронного хаоса визуально различаются в проекции на плоскость (x_1, x_2) (рис.15). Выберем секущую плоскость (например, $x_2 = 0$) и проанализируем форму спектров сингулярностей $D(h)$, вычисленных по последовательностям времен возврата в секущую для режимов колебаний, изображенных на рис.15.

Как видно из рис. 16, а, функция $D(h)$, характеризующая несинхронный режим, значительно шире, чем для синхронного (в последнем случае спектр сингулярностей «стягивается» в точку). Это означает, что фазовая синхронизация хаотических колебаний в модели (35) сопровождается потерей мультифрактальности в динамике времен возврата.

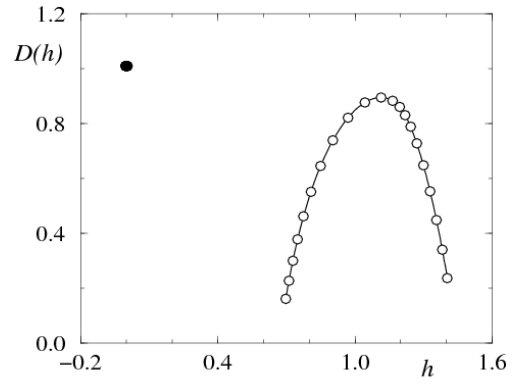


а

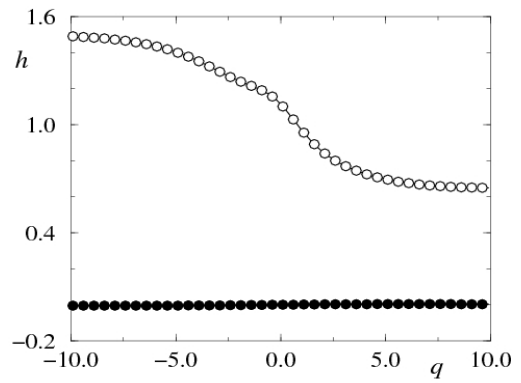


б

Рис.15. Синхронный (а) и несинхронный хаос (б) в модели связанных систем Ресслера



а



б

Рис.16. Спектры сингулярностей (а) и значения $h(q)$ (б) для синхронного (черные кружочки) и несинхронного (белые кружочки) хаотического режима

Режим несинхронного хаоса демонстрирует сложную мультифрактальную структуру и описывается широким спектром Гельдеровских экспонент (рис.16, б). Однако последовательность времен возврата в текущую плоскость для синхронного режима может быть рассмотрена как процесс, характеризующийся постоянным в пределах ошибки вычисления значением $h(q)$.

Ширина спектров сингулярностей для различных синхронных режимов может варьироваться. Наиболее типичная ситуация состоит в том, что последовательность времен возврата не будет описываться постоянным значением $h(q)$. Кроме того, вычисления Гельдеровских экспонент при больших значениях q демонстрируют заметную чувствительность к выбору параметров счета, например, диапазона, в котором проводится аппроксимация $\tau(q)$. В связи с этим целесообразно ввести в рассмотрение характеристику степени мультифрактальности Δ_h (ширины спектра сингулярностей). Анализ раз-

личных режимов хаотических колебаний в системе (35) показал, что степень мультифрактальности значительно меньше у любых типов синхронной динамики по сравнению с режимами вне области синхронизации [65]. Другое отличие между спектрами сингулярностей, изображенными на рис. 16, а, состоит в увеличении $h(q)$ для несинхронных колебаний, что свидетельствует о смене типа корреляций. Характеристики, вычисляемые в рамках метода ММВП, четко диагностируют границу перехода от несинхронного к синхронному режиму (рис.17). Отметим, что диагностика перехода через границу области синхронизации в данном случае может быть осуществлена и с помощью других методов, однако мультифрактальный анализ позволяет по-другому взглянуть на само это явление, а именно синхронизация хаоса может рассматриваться как эффект перехода от сложной мультифрактальной динамики, характеризующейся широким спектром Гельдеровских экспонент, к значительно более простой мо-

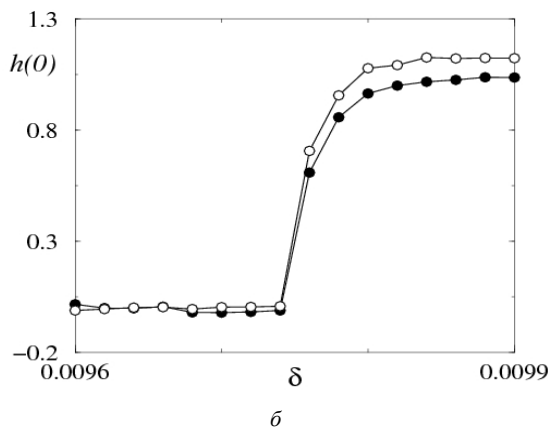
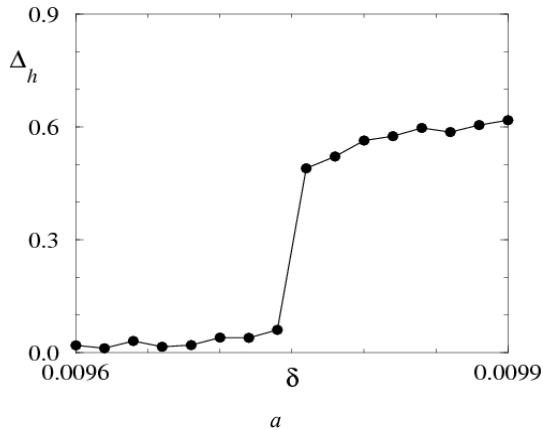


Рис.17. Переход через границу области синхронизации, диагностируемый по изменению характеристик метода мультифрактального формализма. На рисунке (б) приведены результаты анализа структуры последовательностей времен возврата для каждой из двух взаимодействующих систем по отдельности (секунды плоскости $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$)

нофрактальной динамике, для количественного описания которой достаточно одного показателя скейлинга. Происходящая потеря мультифрактальности означает «выравнивание» различных нерегулярностей и переход от процесса, содержащего несколько «сортов» сингулярного поведения, к однородной (более простой) динамике, демонстрирующей лишь один «сорт» сингулярностей. Эффекты уменьшения (потери) мультифрактальности при синхронизации хаоса наблюдаются и в динамике более сложных моделей, рассмотренных, например в работе [26].

4.2. Стохастическая синхронизация

Для иллюстрации общих закономерностей мультифрактального описания эффектов синхронизации хаоса и индуцированной шумом упорядоченности в нелинейных системах

рассмотрим хорошо известный эффект стохастического резонанса [66–68].

Недавно в работе [69] была предпринята попытка его мультифрактального описания на примере модели передемпфированного бистабильного осциллятора, которая описывается стохастическим дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + I\xi(t) + A \sin(\Omega t + \varphi). \quad (36)$$

Здесь I – интенсивность шума, $\xi(t)$ – нормально распределенный δ -коррелированный процесс (белый шум), A – амплитуда внешнего периодического воздействия, которая является малой величиной, то есть в отсутствие шума система не демонстрирует переключений между двумя состояниями. При исследовании эффекта стохастического резонанса часто выделяют две ситуации: когда амплитуда периодического сигнала очень мала по сравнению с потенциальным барьером и когда амплитуда A сопоставима с барьером. В последнем случае динамика бистабильной системы демонстрирует высокую степень когерентности между процессом переключения и входным сигналом, которую можно описать в терминах стохастической синхронизации [70, 71]. Согласно выводам статьи [69], которые были подтверждены нашими расчетами, при достаточно большой амплитуде периодического сигнала эффект стохастического резонанса сопровождается потерей мультифрактальности в динамике модели (36). Изменение параметра I существенно меняет структуру спектра сингулярностей: при «оптимальном» уровне шума, соответствующем резонансу, последовательность времен возврата в одно из бистабильных состояний имеет четкую монофрактальную структуру (рис.18), тогда как при удалении от этого значения спектр сингулярностей соответствует мультифрактальному объекту. Таким образом, режим стохастической синхронизации сопровождается потерей мультифрактальности в динамике передемпфированного бистабильного осциллятора с внешним воздействием. Здесь прослеживается сходство с мультифрактальным описанием синхронизации хаоса, рассмотренным в пункте 4.1.

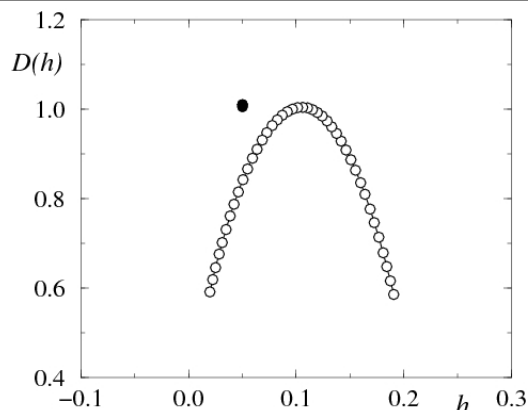


Рис.18. Спектры сингулярностей, соответствующие режиму стохастической синхронизации переключений в бистабильной системе (черный кружочек) и режиму динамики вне области синхронизации (белые кружочки)

4.3. Мультифрактальный анализ динамики артериального давления крови

Обратимся теперь к значительно более сложной ситуации – динамике живых систем. Как известно, многие сигналы биологического происхождения являются сильно неоднородными и нестационарными. Для их анализа целесообразно применять наиболее универсальные методы, эффективность которых не зависит от свойства стационарности регистрируемых процессов. Мультифрактальный формализм на основе вейвлет-преобразования является одним из таких универсальных подходов, что, в частности, было проиллюстрировано в работе П. Иванова с соавторами, опубликованной в журнале «Nature» [32]. С помощью метода ММВП в этой работе было показано, что физиологические сигналы относятся к классу мультифрактальных процессов. В частности, мультифрактальные свойства сердечного ритма отличаются для здоровых организмов и при патологии. Поэтому скейлинговые характеристики метода ММВП представляют интерес как потенциальные средства диагностики состояния биологических систем [35, 36]. Это особенно актуально в тех случаях, когда стандартные методы анализа структуры сигналов не позволяют провести приемлемую диагностику (например, при обработке сильно нестационарных процессов малой длительности).

Различные внешние воздействия на организм также отражаются в изменении характеристик мультифрактальной структуры сердечного ритма. В качестве иллюстрации в данном пункте приводятся результаты муль-

тифрактального описания процесса адаптации сердечно-сосудистой системы к стрессу [72].

Эксперименты проводились на 23 белых крысах (11 самцов и 12 самок), каждой из которых был вживлен внутриартериальный катетер для прямого измерения давления крови. Артериальное давление крови записывалось в состоянии покоя и при стрессе (обездвиживание животного). В ходе предварительной обработки был осуществлен переход от исходных данных (рис. 19, а) к точечным процессам – последовательностям временных интервалов между локальными максимумами сигнала артериального давления (рис. 19, б). Далее эти последовательности анализировались для выявления индуцированных стрессом изменений мультифрактальной структуры.

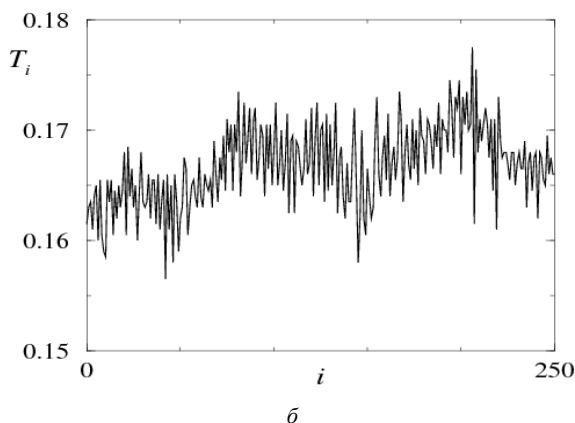
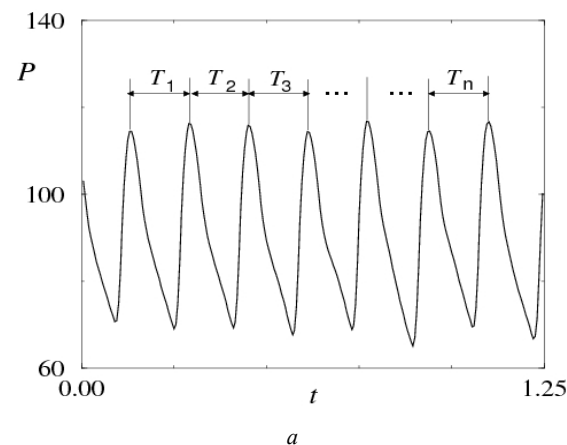


Рис.19. Сигнал артериального давления крови белой крысы (а) и выделенная последовательность интервалов между локальными максимумами данного сигнала (б)

Было обнаружено два типа реакции: стресс приводил либо к заметному уменьшению Гельдеровских экспонент (изменению локальной регулярности сигналов и корреляционных свойств) (рис. 20, а) либо к умень-



шению ширины спектра сингулярностей Δ_h (рис. 20, б). Последняя реакция наиболее интересна: в результате стресса мультифрактальный процесс (сигнал артериального давления крови крысы в обычном состоянии) становится монофрактальным. Таким образом, диагностика эффектов воздействия стресса на организм в некоторых случаях может рассматривать переходы от моно- к мультифрактальной структуре, и наоборот. Отметим важное обстоятельство: стандартные методы анализа, такие как вычисление частоты сердечных сокращений и спектральный анализ – в данном примере не позволили различить две реакции, изображенные на рис. 20. В обоих случаях диагностировались

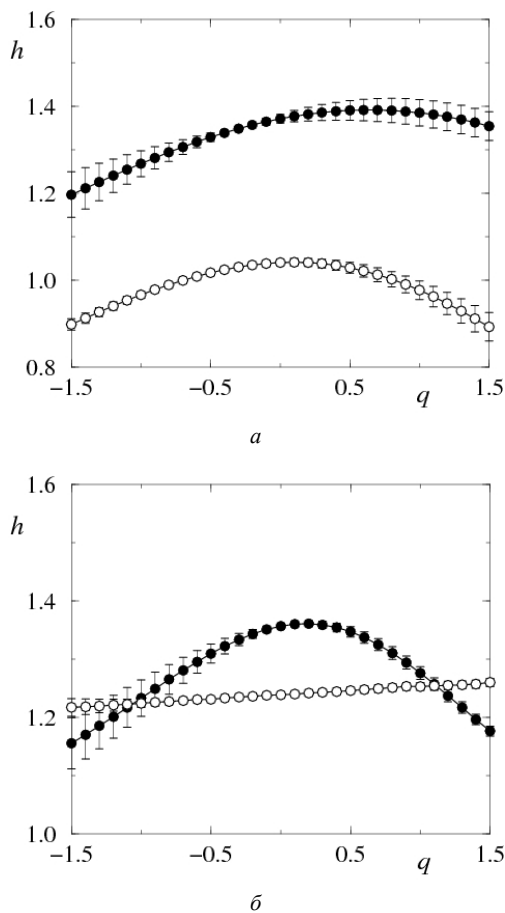


Рис.20. Две различные реакции на стресс: изменение локальной регулярности сигнала (корреляционных свойств) (а) и потеря мультифрактальности (б)

однотипные изменения: увеличение частоты сердцебиений и энергетических характеристик. Приведенный пример является одной из ситуаций, когда мультифрактальный формализм может представлять интерес в качестве более эффективного метода классификации

состояния биологических систем по коротким и нестационарным сигналам.

В результате проведенного исследования были обнаружены четкие различия в реакциях самцов и самок крыс. Динамика кровяного давления самок демонстрировала слабую реакцию на стресс (рис. 21, а), тогда как самцы демонстрировали значительно более сильные изменения спектра сингулярностей $D(h)$ при стрессе относительно состояния покоя (рис. 21, б). Изображенные на рис.21 результаты являются наиболее показательными и в то же время типичными реакциями. Как видно из рис. 21, б, численные значения экспонент Гельдера $h(q)$ сигнала кровяного

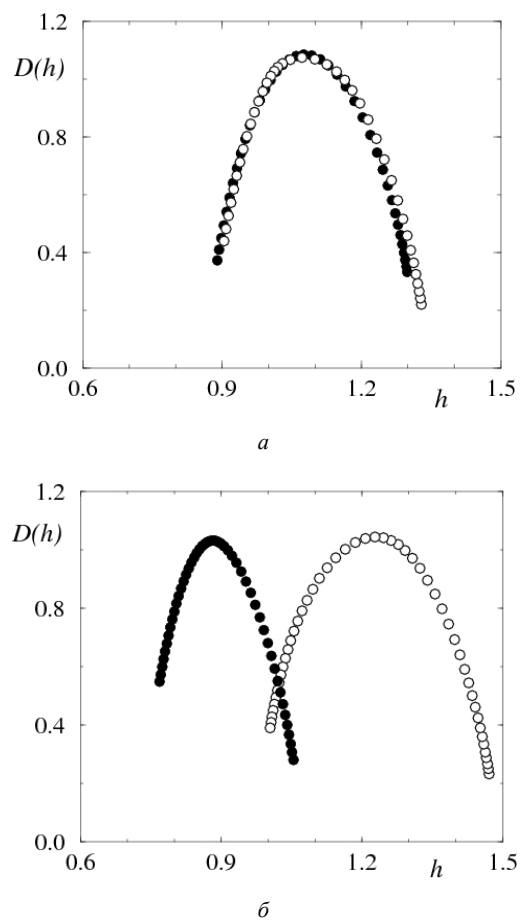


Рис.21. Характерная реакция на стресс самки (а) и самца (б)

давления самца уменьшаются при стрессе, что свидетельствует об изменении корреляций: процесс становится менее «гладким». Помимо изменения корреляционных свойств наблюдается уменьшение величины Δ_h . В рассматриваемом примере в состоянии покоя $\Delta_h \approx 0.5$; во время стресса $\Delta_h \approx 0.3$, то есть



спектр сингулярностей становится более узким. Существенное уменьшение характеристики Δ_h у самцов было зафиксировано в 7-ми экспериментах из 11, причем в трех случаях наблюдался переход к почти монофрактальной структуре точечных процессов. Рассматриваемый стресс был достаточно слабым, возможно, при более сильном воздействии эффекты потери мультифрактальности будут наблюдаться чаще. Это позволяет выдвинуть гипотезу о том, что мера мультифрактальности Δ_h может служить индикатором силы отклика организма на стрессорное воздействие.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последние годы наличие мультифрактальности или сложного скейлинга в структуре процессов различной природы широко обсуждается в научной печати. Появление нового инструмента анализа сложных сигналов, основанного на сочетании теории мультифракталов и вейвлет-анализа, значительно расширило возможности привлечения строгих математических результатов, полученных в рамках концепции мультифрактального формализма, при проведении экспериментальных исследований.

Базирующийся на вейвлет-преобразовании мультифрактальный анализ можно интерпретировать как новый взгляд на проблему исследования структуры сигналов. В задачах статистической радиофизики, в частности, традиционно большое внимание уделяется спектрально-корреляционному анализу. Однако классические методы расчета корреляционных функций или спектра мощности применимы лишь в случае стационарных процессов и требуют большой длительности сигналов для получения надежных оценок закона спада корреляций или частотной зависимости функции спектральной плотности. В отличие от классических подходов, метод ММВП позволяет проводить корреляционный анализ по сравнительно коротким и нестационарным сигналам, что позволяет рассматривать данный метод в качестве инструмента исследования структуры реальных процессов, полученных в экспериментах. Этот инструмент к тому же является достаточно универсальным и может применяться вне зависимости от свойства стационарности или природы

сигнала; с его помощью могут с равным успехом анализироваться как процессы, регистрируемые в физических экспериментах, так и медико-биологические или метеорологические временные ряды.

Мультифрактальный анализ представляет несомненный интерес в задачах исследования динамики живых систем. Эти системы зачастую демонстрируют сложное нерегулярное поведение, характеристики которого непрерывно меняются во времени. Привлечение для анализа соответствующей динамики классических вероятностных и спектральных методов означает априорное предположение о том, что рассматриваемые процессы можно приближенно считать эргодическими, а справедливость этого допущения довольно сложно обосновать, если живой организм демонстрирует процесс адаптации к изменению внешних условий функционирования. Зачастую возникают проблемы с интерпретацией результатов анализа биологических данных. Например, наличие двух пиков в спектре мощности с некрратными частотами может соответствовать принципиально разным ситуациям: в динамике изучаемой системы могут одновременно присутствовать два независимых ритма или может наблюдаться процесс изменения частоты и в каждый момент времени удается зафиксировать только один ритмический процесс. Такие ситуации нередко встречаются в функционировании объектов живой природы, они выявляют ограничения классических подходов к анализу случайных процессов и определяют важность разработки новых, более эффективных инструментов анализа структуры сигналов. Современные биологические исследования уже невозможны без самого широкого использования специальных физических методов. Развитие техники привело в настоящее время к высочайшему уровню экспериментальных исследований, когда сигналы биологических систем можно измерять на микроскопическом уровне отдельных клеток и внутриклеточной динамики. В то же время анализ таких сигналов зачастую ограничивается простой статистической обработкой экспериментальных данных. Создание более точных инструментов исследования сигналов, позволяющих выявить детали их сложной структуры, является в этой связи очень актуальной задачей: под высокоточные эксперименты, выполняемые в настоящее время в биологии, нужны соответ-



ствующие методы анализа. Биологические приложения физических подходов и методов обогащают и саму физику. В частности, разработанные специальные методы, для которых нестационарность динамики не является препятствием, не только существенно расширяют возможности экспериментальных исследований, но и в значительной степени определяют дальнейший прогресс в развитии теории анализа структуры сигналов. Наряду с хорошо известным вейвлет-анализом, основанный на вейвлет-преобразовании метод мультифрактального формализма может с полным основанием претендовать на эту роль.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ по программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)».

Библиографический список

1. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. San Francisco: W.H. Freeman and company, 1982.
2. Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P. et al. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. V.33. P.1141–1151.
3. Tel T. Fractals, multifractals, and thermodynamics // Z. Naturforsch. 1988. V.43a. P.1154–1174.
4. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
5. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
6. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. М.: Мир, 1993.
7. Family F., Vicsek T. Dynamics of Fractal Surfaces. Singapore: World Scientific, 1991.
8. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физических наук. 1985. Т.146, №2. С.493–506.
9. Соколов И.М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // Успехи физических наук. 1986. Т.150, №2. С.221–255.
10. Зосимов В.В., Лямуев Л.М. Фракталы в волновых процессах // Успехи физических наук. 1995. Т.165, №4. С.361–402.
11. Vainshtein S.I., Sreenivasan K.R., Pierrehumbert R.T. et al. Scaling exponents for turbulence and other random processes and their relationships with multifractal structure // Phys. Rev. E. 1994. V.50. P.1823–1835.
12. Eisenberg E., Bunde A., Havlin S., Roman H.E. Range of multifractality for random walks on random fractals // Phys. Rev. E. 1993. V.47. P.2333–2235.
13. Dräger J., Bunde A. Multifractal features of random walks and localized vibrational excitations on random fractals: dependence on the averaging procedures // Phys. Rev. E. 1996. V.54. P.4596–4602.
14. Arneodo A., Decoster N., Roux S.G. Intermittency, log-normal statistics, and multifractal cascade process in high-resolution satellite images of cloud structure // Phys. Rev. Lett. 1999. V.83. P.1255–1258.
15. Chabra A., Meneveau C., Jensen R.V., Sreenivasan K.R. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum and its application to fully developed turbulence // Phys. Rev. A. 1989. V.40. P.5284–5294.
16. Benzi R., Paladin G., Parisi G., Vulpiani A. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems // J. Phys. A. 1984. V.17. P.3521–3531.
17. Baddi R., Broggi G. Measurement of the dimension spectrum $f(\alpha)$: Fixed-mass approach // Phys. Lett. A. 1988. V.131. P.339–343.
18. Feigenbaum M.J. Some characterizations of strange sets // J. Stat. Phys. 1987. V.46. P.919–924.
19. Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I. Scaling structure and thermodynamics of strange sets // Phys. Rev. A. 1987. V.36. P.1409–1420.
20. Mandelbrot B.B. Fractals and Multifractals: Noise, Turbulence and Galaxies. N.Y.: Springer-Verlag, 1989.
21. Strait B.J., Dewey T.G. Multifractals and decoded walks: applications to protein sequence correlations // Phys. Rev. E. 1995. V.52. P.6588–6592.
22. Glazier J.A., Raghavachari S., Berthelsen C.L., Skolnick M.H. Reconstructing phylogeny from the multifractal spectrum of mitochondrial DNA // Phys. Rev. E. 1995. V.51. P.2665–2668.
23. Hentschel H.G.E. Stochastic multifractality and universal scaling distributions // Phys. Rev. E. 1994. V.50. P.243–261.
24. Wiklund K.O., Elgin J.N. Multifractality of the Lorenz system // Phys. Rev. E. 1996. V.54. P.1111–1119.
25. Pavlov A.N., Ebeling W., Molgedey L. et al. Scaling features of texts, images and time series // Physica A. 2001. V.300. P.310–324.
26. Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Ziganshin A.R. et al. Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems // Physica A. 2002. V.316. P.233–249.
27. Frish U., Parisi G. Fully developed turbulence and intermittency // Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics / Eds. M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi. Amsterdam: North-Holland, 1985. P.71–88.
28. Barabasi A.L., Vicsek T. Multifractality of self-affine fractals // Phys. Rev. A. 1991. V.44. P.2730–2733.
29. Gagne Y., Hopfinger E., Frisch U. A new universal scaling for fully developed turbulence: The distribution of velocity increments // New Trends in Nonlinear Dynamics and Pattern Forming Phenomena: The Geometry of Nonequilibrium / Eds. P. Coulet, P. Huerre. N.Y.: Plenum Press, 1989. P.315–319.
30. Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: application to turbulence data // Phys. Rev. Lett. 1991. V.67. P.3515–3518.
31. Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. Multifractal formalism for fractal signals: the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method // Phys. Rev. E. 1993. V.47. P.875–884.
32. Ivanov P.Ch., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L. et al. Multifractality in human heartbeat dynamics // Nature. 1999. V.399. P.461–465.
33. Arneodo A., Aubenton-Carafa Y.D., Audit B. et al. What can we learn with wavelets about DNA sequences? // Physica A. 1998. V.249. P.439–448.



34. Stanley H.E., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L. et al. Statistical physics and physiology: monofractal and multifractal approaches // *Physica A*. 1999. V.270. P.309–324.
35. Nunes Amaral L.A., Ivanov P.Ch., Aoyagi N. et al. Behavioral-independent features of complex heartbeat dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V.86. P.6026–6030.
36. Ivanov P.Ch., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L. et al. From 1/f noise to multifractal cascades in heartbeat dynamics // *Chaos*. 2001. V.11. P.641–652.
37. Marrone A., Polosa A.D., Scioscia G. et al. Multiscale analysis of blood pressure signals // *Phys. Rev. E*. 1999. V.60. P.1088–1091.
38. Gabor D. Theory of communications // *J. Inst. Electr. Eng. (London)*. 1946. V.93. P.429–457.
39. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983.
40. Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // *Chaos*. 1995. V.5. P.82–87.
41. Peng C.-K., Buldyrev S.V., Havlin S. et al. Mosaic organization of DNA nucleotides // *Phys. Rev. E*. 1994. V.49. P.1685–1689.
42. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // *S.I.A.M. J. Math. Anal.* 1984. V.15. P.723–736.
43. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and Applications. Philadelphia: S.I.A.M., 1993.
44. Meyer Y. Wavelets and Operators. Cambridge University Press, 1993.
45. Chui C.K. An Introduction to Wavelets. N.Y.: Academic Press, 1992.
46. Daubechies I. Ten lectures on Wavelets. Philadelphia: S.I.A.M., 1992.
47. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики / ГосУНЦ «Колледж». Саратов, 2002.
48. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук*. 1996. Т.166, №11. С.1145–1170.
49. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их применение // *Успехи физических наук*. 2001. Т.171. С.465–501.
50. Hausdorff F. Dimension and äusseres mass // *Mathematische Annalen*. 1919. V.79. P.157–179.
51. Besicovitch A.S. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system // *Mathematische Annalen*. 1935. V.110. P.321–330.
52. Falconer K.J. The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press, 1985.
53. Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A. The dimension of chaotic attractors // *Physica D*. 1983. V.7. P.153–180.
54. Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A. The multifractal formalism revisited with wavelets // *Int. J. Bifurcation Chaos*. 1994. V.4. P.245–302.
55. Божокин С.В., Паришин Д.А. Фракталы и мультифракталы. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
56. Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors // *Phys. Lett. A*. 1983. V.97. P.227–230.
57. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica D*. 1983. V.9. P.189–208.
58. Hentschel H.G., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // *Physica D*. 1983. V.8. P.435–444.
59. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V.50. P.346–349.
60. Bowen R. Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes in Math. N.Y.: Springer-Verlag, 1975. V.470.
61. Collet P., Lebowitz J., Porzio A. The dimension spectrum of some dynamical systems // *J. Stat. Phys.* 1987. V.47. P.609–644.
62. Veneziano D., Moglen G.E., Bras R.L. Multifractal analysis: pitfalls of standard procedures and alternatives // *Phys. Rev. E*. 1995. V.52. P.1387–1398.
63. Afraimovich V., Zaslavsky G.M. Fractal and multifractal properties of exit times and Poincare recurrences // *Phys. Rev. E*. 1997. V.55. P.5418–5426.
64. Postnov D.E., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V. et al. Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization // *Chaos*. 1999. V.9. P.227–232.
65. Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E. Scaling features of multimode motions in coupled chaotic oscillators // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2003. V.16. P.801–810.
66. Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // *J. Phys. A*. 1981. V.14. P.L453–457.
67. Nicolis C., Nicolis G. Stochastic aspects of climatic transitions additive fluctuations // *Tellus*. 1981. V.33. P.225–234.
68. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л., Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // *Успехи физических наук*. 1999. Т.169. С.7–38.
69. Silchenko A., Hu C.K. Multifractal characterization of stochastic resonance // *Phys. Rev. E*. 2001. V.63. P.041105.
70. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B. et al. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
71. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. et al. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
72. Pavlov A.N., Ziganshin A.R., Klimova O.A. Multifractal characterization of blood pressure dynamics: stress-induced phenomena // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2004. V.24. P.57–63.