

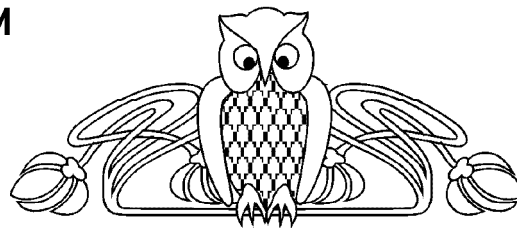


УДК 532.5

## ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХЖИДКОСТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБАХ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Ю. Н. Зайко

Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина –  
филиал РАНХ и ГС при Президенте РФ, Саратов  
E-mail: zyrnick@rambler.ru



В статье развивается двухжидкостная модель для описания течений в трубах круглого поперечного сечения. Показано, что эта модель позволяет объяснить экспериментальный факт, заключающийся в резком возрастании критического числа Рейнольдса (примерно на два порядка), при котором происходит переход к турбулентности по сравнению с трубами других сечений. Характерной особенностью модели является система вихрей, отделяющая основной поток от стенок трубы. Для расчета параметров потока использована электромагнитная аналогия, позволяющая рассчитать скорость потока по формулам для бесконечно длинного соленоида.

**Ключевые слова:** двухжидкостная модель, турбулентность, вихрь, соленоид, ламинаризация

### Application of Two-fluid Model for Flow Treating in Pipes of Circle Profile

Yu. N. Zayko

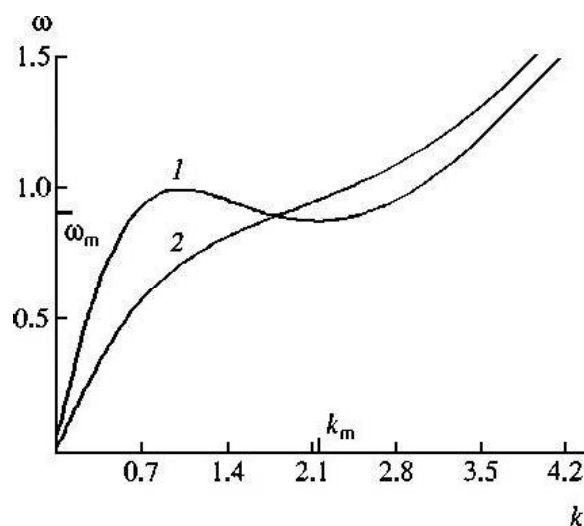
Two-liquid model for description of flows in tubes of circle profile is presented. This model explains well-known experimental fact which consists of growth (approximately in 2 degrees) of critical Reynolds number at which transfer to turbulent regime takes place in comparison with tubes of other profiles. A special characteristic of this model is a set of vortices which separates flow from walls of tube. An electromagnetic analogy with infinitely long solenoid is used for determination of flows' parameters.

**Key words:** two-fluid model, turbulence, vortex, solenoid, laminarization.

### Введение

Двухжидкостная модель была предложена Л. Д. Ландау для описания сверхтекучего поведения гелия-II в капиллярах при температурах, близких к абсолютному нулю [1]. В работе [2] эта модель была использована для объяснения свойств потоков жидкости (воды) в трубах круглого сечения с упругими стенками при температурах ~ 300 К. Само течение исследовалось в рамках модели локального реагирования (ЛР) [3] с учетом взаимодействия волн давления и скорости в жидкости и упругих волн в стенках трубы [4] без учета сжимаемости жидкости. Основанием для использования двухжидкостной

модели послужило то, что спектр волн  $\omega = \omega(k)$  ( $\omega$  – частота,  $k$  – волновое число) в системе «жидкость + стенка» при определенных условиях выглядит так же, как и спектр элементарных возбуждений в жидком гелии-II – он имеет фоновый характер при малых значениях волнового числа  $k$ , а при некотором конечном  $k_m$  имеет типичный ротонный минимум [1] (рисунок).



Дисперсионное уравнение  $\omega = \omega(k)$  для течения воды в стальной трубе с цилиндрической жесткостью  $R = 5.8 \times 10^{-3}$  [2]: 1 – течение со звуковой скоростью  $V_0 = 1$  ( $k_m = 2.145$ ,  $\omega_m = \omega_m(k_m) = 0.88$ ,  $\omega''_m(k_m) = 0.376$ ); 2 – течение с дозвуковой скоростью  $V_0 = 10^{-3}$

Напомним основные уравнения модели [4]:

$$\begin{aligned} A_t + (Av)_x &= 0, \\ v_t + vv_x + p_x &= 0, \\ A_{tt} + RA_{xxx} + A - p &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $A$  – площадь поперечного сечения трубы, нормированная на  $\pi a^2$  ( $a$  – равновесный радиус сечения трубы),  $v$  – продольная (вдоль оси  $x$ ) скорость жидкости,  $p$  – давление жидкости,  $R$  – цилиндрическая жесткость трубы. Течение предполагается одномерным. Стенка трубы



представляется цилиндрической оболочкой [5]. Расстояние, время и давление обезразмериваются в (1) с помощью единиц времени  $T$ , длины  $L$  и давления  $P$ :

$$T = \sqrt{\frac{\rho a^2}{E}}, L = \sqrt{\frac{\rho a h}{2\rho_0}}, P = \frac{Eh}{2a}, \quad (2)$$

где  $\rho_0$  и  $\rho$  – плотность жидкости и материала стенки трубы,  $h$  – толщина стенки трубы,  $E$  – модуль Юнга материала стенки [3].

Двухжидкостная модель позволяет описать явление, напоминающее сверхтекучесть в гелии-II, но при комнатных температурах – высокотемпературную сверхтекучесть [2]. Как показано в [2], течение становится сверхтекучим при выполнении условия Ландау [1],

$$V_0 < \min\{\omega/k\}, \quad (3)$$

благодаря тому, что отталкивание одноименных флуктуаций скорости жидкости ослабляется за счет экранирования, возникающего из-за взаимодействия волн в жидкости и упругих волн в стенках трубы ( $V_0$  – скорость невозмущенного потока). Согласно расчетам [2] плотность нормальной компоненты на два порядка ниже плотности «сверхтекучей»<sup>1</sup> компоненты при выбранных условиях. Это позволяет объяснить известный, но не получивший ранее объяснения факт – увеличение критического числа Рейнольдса, или, что то же, уменьшение на два порядка значения вязкости, при котором наступает переход от ламинарного течения к турбулентному именно в трубах круглого сечения [6]. Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию двухжидкостной модели в рамках указанной задачи.

### 1. Структура «сверхтекучего» потока

В работе [2] показано, что для течения воды в стальной трубе радиусом  $a = 0.1$  м и толщиной стенки  $h = 5 \cdot 10^{-3}$  м при температуре  $T = 300$  К отношение плотностей  $\rho_n$  – нормальной, т.е. вязкой, компоненты жидкости и  $\rho_s$  – «сверхтекучей» компоненты  $\rho_n/\rho_s \sim 10^{-2}$ . Поэтому, как показано в [2], можно пренебречь в уравнениях (1) давлением нормальной компоненты по сравнению с давлением «сверхтекучей» компоненты жидкости и рассматривать их как уравнения движения «сверхтекучей» компоненты. Она же и будет в основном определять структуру потока.

<sup>1</sup> Термин «сверхтекучий» взят в кавычки, чтобы не возникло путаницы с явлением сверхтекучести в жидком гелии II при температурах, близких к абсолютному нулю.

Главной особенностью потока жидкости в условиях рассматриваемой задачи является затягивание перехода к турбулентности по сравнению с задачей, в которой не учитываются волны в стенках трубы [4]. Это связано с тем, что энергия потока передается не мелкомасштабным флуктуациям скорости жидкости, что и приводило бы к развитию турбулентности, а тратится на возбуждение волн изгиба в стенке трубы [4]. Другой особенностью является уплощение поперечного профиля скорости потока по сравнению с параболическим Пуазейлевским [6], что отмечалось на эксперименте. Для ее объяснения можно предположить, что в потоке жидкости образуется устойчивая структура, промежуточная между основным потоком и стенкой, которая отбирает энергию мелкомасштабных флуктуаций, не давая им развиваться в объеме жидкости. Роль такой структуры в нашей модели играет соосная система вихрей (в пределе вихревых нитей), выстилающая стенку трубы и не дающая основному потоку соприкоснуться с ней. С одной стороны, такая структура играет роль своеобразной «смазки», снижая сопротивление потоку, оказываемое стенкой. С другой стороны, эта структура принимает участие в формировании скорости основного потока, делая его поперечный профиль однородным, в отличие от параболического Пуазейлевского профиля, характерного для вязкого течения. Это соображение можно подкрепить электромагнитной аналогией, известной в теории вихрей [7]. Действительно, для вихревой нити произвольной, в частности, круговой, формы выражение для распределения скоростей имеет вид

$$\vec{v} = \frac{\sigma}{2} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}, \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

где интегрирование в первом интеграле выполняется вдоль нити,  $\vec{R}$  – радиус-вектор, направленный от элемента нити  $d\vec{l}$  к точке, в которой вычисляется скорость, а во втором интеграле – вдоль замкнутого контура, охватывающего нить, при этом  $\sigma$  определяет циркуляцию скорости вдоль этого контура. Как отмечается в [7], эта формула – полный аналог формулы Био-Савара для магнитного поля  $\vec{H}$  линейного тока  $\vec{J}$ . Эти задачи связаны заменой  $\vec{H} \rightarrow \vec{v}$ ,  $J/c \rightarrow \sigma/2$ . Согласно этой аналогии суммарное поле скоростей, создаваемых всеми вихревыми нитями, выстилающими поверхность достаточно длинной трубы, получается из



поля бесконечно длинного соленоида с помощью указанной замены. Распределение поля скоростей  $V$  жидкости, как и магнитного поля соленоида, однородно по поперечному сечению. Эта аналогия позволяет вычислить скорость потока жидкости в трубе, применяя формулу для магнитного поля  $H$  бесконечно длинного соленоида [8]:

$$H = \frac{4\pi}{c} nI, \quad (5)$$

где  $n$  – число витков на единицу длины соленоида. Делая указанные выше замены, получим выражение для поперечного размера (толщины) вихря:  $d = 1/n = 2\pi\sigma/V$ .

Покажем, что условие неизменности течения при изменении площади поперечного сечения трубы, т.е., по сути, условие устойчивости течения, позволяет выразить  $\sigma$  через основные параметры модели<sup>2</sup>. Для этого потребуем, чтобы изменение скорости вихря с изменением его радиуса было таким же, как изменение скорости потока жидкости в трубе с изменением радиуса трубы. Вычислим  $\delta V/\delta a$  по формуле (4) и приравняем аналогичному выражению, полученному из уравнений модели ЛР [3]. Из (4) получим  $\delta V/\delta a = \pi\sigma/a^2$ . Из уравнений модели ЛР в линейном приближении получим  $\delta V/\delta a = (2Eh/\rho_0 a^5)^{1/2}$ , откуда найдем выражение для  $\sigma = 1/\pi \cdot (2aEh/\rho_0)^{1/2}$ . Это выражение, так же как и известное выражение для циркуляции скорости около вихревой нити в жидком гелии-II, зависит только от неизменных параметров задачи. Сравнив его с полученным ранее выражением  $\sigma = d \cdot V/2\pi$ , находим выражение для толщины вихря:

$$d = \frac{2}{V} \sqrt{\frac{2ahE}{\rho_0}}, \quad (6)$$

что с учетом неизменности входящих параметров приводит к выражению  $d = \text{const}/V$ , которое легко может быть подвергнуто опытной проверке.

## 2. Обсуждение результатов

Приведенные выше соображения позволяют объяснить, почему в трубах некруглого сечения не наблюдается отмеченного затягивания перехода к турбулентности. Действительно, как следует из формулы (4) для распределения скоростей, только вихрь круговой формы движется как целое, не меняя формы [1]. Любое отклонение формы вихря от круговой приведет к тому, что различные точки

вихря будут двигаться с различными скоростями, что повлечет дальнейшую деформацию и разрушение вихря. Иными словами, существование устойчивой структуры, отбирающей энергию у основного потока и не дающей развиваться турбулентному течению в трубах некругового сечения, невозможно.

Взаимодействие волн в потоке жидкости с волнами в стенках трубопровода используется в технике [9] при конструировании насосов. Это же явление может быть использовано и при конструировании расходомеров [10], не требующих контакта с потоком.

Из других задач, в которых может найти применение данная модель, можно назвать задачу об обтекании тела цилиндрической формы потоком жидкости. Образование системы вихрей вокруг тела способствует ламинаризации основного потока и приводит к снижению сопротивления движению и может быть использовано, например, при решении так называемого «парадокса» Грея [11], отмеченного при объяснении больших скоростей движения морских животных (дельфинов)<sup>3</sup>.

Большой интерес представляет сравнение изложенных результатов с экспериментом [12, гл. 4 «Вихри» (76); гл. 5 «Неустойчивость» (102, 118, 120); гл. 6 «Турбулентность» (167)<sup>4</sup>]. Ввиду отсутствия экспериментов, которые можно было бы напрямую сравнить с результатами статьи, приходится ограничиться имеющимся материалом. Это позволяет сделать следующие выводы, находящиеся в качественном согласии с результатами настоящей работы, а также работ [2, 4]:

1) опыты по развитию турбулентных режимов в потоках жидкости и газа, вытекающих из цилиндрического сопла, подтверждают наличие промежуточного этапа, связанного с образованием вихревой структуры – затягивание перехода к турбулентному режиму [4]<sup>5</sup>;

2) поперечный размер вихревых колец растет вниз по потоку, т.е. там, где скорость основного истекающего потока уменьшается вследствие торможения его во внешней среде – качественное подтверждение формулы (6).

<sup>3</sup> В настоящее время «парадокс» Грея объясняется особым строением кожи дельфина, приводящим к ламинаризации обтекающего потока. *Carpenter P. W., Davis C., Lucey A. D. Hydrodynamics and Compliant Walls : Does the Dolphin Have a Secret? // Current Science. 2000. Vol. 79, № 6, P. 758–765.*

<sup>4</sup> В круглых скобках указаны номера иллюстраций.

<sup>5</sup> Следует сказать, что условия ранее проводившихся экспериментов не позволяли наблюдать устойчивой во всем пространстве вихревой структуры.



## Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. 5-е изд. М. : Физматлит, 2005. 616 с.
2. Зайко Ю. Н. Модель течения жидкости в сосуде с упругими стенками // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, вып. 24. С. 15–19.
3. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов / пер. с англ. под ред. В. Е. Захарова. М. : Мир, 1983. 294 с.
4. Зайко Ю. Н. Распространение волн в жидкости, протекающей в сосуде с упругими стенками // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, вып. 16. С. 27–31.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. : Наука, 1972. 432 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 6. Гидродинамика. 5-е изд. М. : Физматлит, 2006. 736 с.
7. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 9. Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния. М. : Физматлит, 2004. 496 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. 4-е изд. М. : Физматлит, 2003. 656 с.
9. Устройство для транспортировки по трубопроводу жидкообразной среды : пат. 2125012 по заявке 96119628/28. Рос. Федерация / Сагов М. С. ; заявитель и патентообладатель Сагов М. С. ; заявл. 27.09.1996; опубл. 20.01.1999, Реф. рос. патент. документы за 1994–2007 гг. – 3 с. : ил.
10. Способ измерения и контроля параметров потока жидкости или газа в сосуде с упругими стенками : пат. 2169350 по заявке 99112370/28 Рос. Федерация / Зайко Ю. Н. ; заявитель и патентообладатель Зайко Ю. Н.; заявл. 15.06.1999; опубл. 20.04.2001, Реф. рос. патент. документы за 1994–2007 гг. – 5 с. : ил.
11. Gray J. Studies of Animal Locomotion // J. of Exp. Biol. 1933. Vol. 10. P. 88–103.
12. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа / пер. с англ. под ред. Г. И. Баренблатта и В. П. Шидловского. М. : Мир, 1986. (URL: <http://www.imec.msu.ru/content/nio/VanDaik>).

УДК 616.314+ 616.311.2 : 615.831(045)

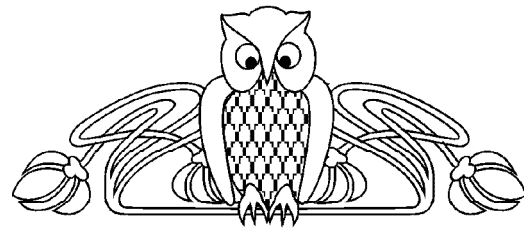
## ФОТОАКТИВИРУЕМАЯ ДЕЗИНФЕКЦИЯ В КОМПЛЕКСНОМ ЛЕЧЕНИИ СТОМАТОЛОГИЧЕСКОЙ ПАТОЛОГИИ

Д. Е. Суетенков, О. А. Изгарёва,  
Т. Л. Харитоновна, Е. А. Гриценко

Саратовский государственный медицинский  
университет им. В. И. Разумовского  
E-mail: shmosy@mail.ru

Приведены результаты лечебно-профилактических мероприятий у детей дошкольного возраста с воспалительными заболеваниями пародонта, включающих в себя уроки гигиены полости рта, контролируруемую чистку зубов и использование аппарата «Fotosan». После предварительного анализа состояния полости рта (индекс гигиены полости рта (ИГ), папиллярно-маргинально-альвеолярный индекс (РМА)) дети группы исследования были разделены на две подгруппы, в одной из которых продолжалась контролируемая чистка зубов, в другой она сочеталась с использованием фотоактивируемой дезинфекции. После применения фотоактивируемой дезинфекции анализ динамики позволил установить снижение индекса РМА у дошкольников на 92%. Снижение индекса РМА в группе без применения фотоактивируемой дезинфекции было незначительным, и к концу наших исследований в данной группе он уменьшился в среднем на 12%. Методика «Fotosan» у детей может использоваться в качестве профилактики прогрессирования и обострений заболеваний пародонта.

**Ключевые слова:** фотоактивируемая дезинфекция, фотодинамическая терапия, заболевания пародонта.



## Photoactivated Disinfection in Treatment of Dental Pathology

D. E. Suetenkov, O. A. Izgareva,  
T. L. Kharitonova, E. A. Gritsenko

The results of treatment and prevention in preschool children with inflammatory periodontal diseases, incorporating the lessons of oral hygiene, controlled cleaning of teeth and use of the device «Fotosan». After a preliminary analysis of the oral cavity (OHI-S, PMA), the children of the study were divided into two subgroups, one of which lasted for controlled cleaning of teeth, in the other - combined with the use of photoactivated disinfection. After application of photoactivated disinfection dynamics analysis allowed us to establish the PMA index decreased in preschool children by 92%. The use of photoactivated disinfection «Fotosan» children allowed to achieve the desired results on our prevention program, and can be used in the prevention of exacerbations and progression of periodontal disease.

**Key words:** photoactivated disinfection, photodynamic therapy, periodontal disease.