



ФИЗИКА

УДК 537.86

СТАТИСТИКА ВОЗВРАТОВ ПУАНКАРЕ С УЧЁТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ФЛУКТУАЦИЙ

В. С. Анищенко, С. В. Астахов, Я. И. Боев,
Н. И. Бирюкова, Г. И. Стрелкова

Саратовский государственный университет
E-mail: wadim@info.sgu.ru

Методами численного эксперимента получены основные статистические характеристики последовательности времён возвратов Пуанкаре на примере логистического отображения в режиме хаоса. Рассчитаны средние значения, дисперсия и плотность распределения времён возврата и их зависимость от величины области возвращения при локальном подходе. Получены значения размерности Афраймовича–Песина как в случае нулевой, так и положительной топологической энтропии аттрактора системы. Подтверждено соответствие размерности Афраймовича–Песина показателю Ляпунова (глобальный подход). Исследованы закономерности влияния шумового воздействия на статистику времён возврата как при локальном, так и глобальном подходе. Рассмотрены примеры использования теории возвратов Пуанкаре для диагностики эффекта стохастического резонанса, синхронизации хаоса и расчёта фрактальной размерности аттрактора.

Ключевые слова: возвраты Пуанкаре, фрактальная размерность, топологическая энтропия, размерность Афраймовича–Песина, стохастический резонанс, синхронизация.

Statistics of Poincare Recurrence with Considering Effect of Fluctuations

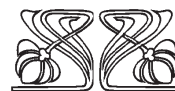
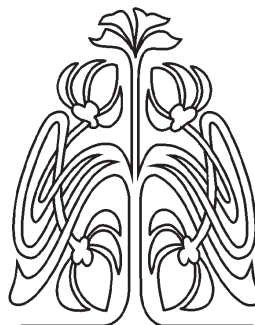
V. S. Anishchenko, S. V. Astakhov, Y. I. Boev,
N. I. Birukova, G. I. Strelkova

The basic statistical characteristics of Poincare recurrence are obtained numerically for the logistic map in a chaotic regime. The mean values, variation and recurrence distribution density are calculated and their dependence on a return size is analysed. Afraimovich–Pesin dimension values are obtained. It is verified that the Afraimovich–Pesin dimension corresponds to the Lyapunov exponent. The peculiarities of the influence of noise on the recurrence statistics are studied in local and global approaches. It is shown that the obtained numerical data fully conform to the theoretical results. It is demonstrated that the Poincare recurrence theory can be applied to diagnose.

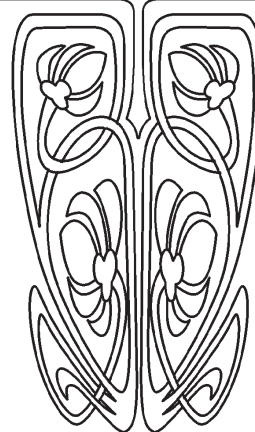
Key words: Poincare recurrence, fractal dimension, topological entropy, Afraimovich–Pesin dimension, stochastic resonance, synchronization.

Введение

Динамические системы со сложным характером траекторий можно описывать с точки зрения геометрии предельных множеств в фазовом пространстве, а также эволюцией фазовых траекторий во времени. Одной из фундаментальных особенностей временной динамики систем является так называемый возврат Пуанкаре. Возвращаемость по Пуанкаре означает, что практически любая траектория, стартующая из некоторой точки \bar{x}_0 предельного множества, во времени бесконечное число раз пройдёт сколь угодно близко от начального состояния. Такие движения в динамических системах Пуанкаре назвал устойчивыми по Пуассону [1].



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Проблема возвратов Пуанкаре для эргодических систем с заданной вероятностной мерой полностью решена и описана в математической литературе [2]. Фундаментальным математическим результатом является теорема Каца [3]. Доказано, что среднее время первого возврата Пуанкаре в ε -окрестность заданной точки множества $\langle \tau_r \rangle$ обратно пропорционально вероятности $P(\varepsilon)$:

$$\langle \tau_r(\varepsilon) \rangle = \frac{\beta}{P(\varepsilon)}, \beta = \text{const}. \quad (1)$$

Установлено, что для дискретных систем $\beta = 1$ [3, 4].

Известно, что в общем случае

$$P(\varepsilon) \simeq p(x)\varepsilon^{d_f}, \quad (2)$$

где $p(x)$ – плотность распределения, d_f – фрактальная размерность множества. К подробному анализу (2) мы ещё вернёмся.

Важным математическим результатом является доказательство того, что плотность распределения случайного процесса возвратов для эргодических систем с заданной мерой подчиняется закону [5]:

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} \exp\left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}\right), \tau_r \geq \tau_r^*. \quad (3)$$

Здесь $\langle \tau_r \rangle$ – среднее время первого возврата в ε -окрестность, τ_r^* – некоторое значение τ_r . Отметим, что выражение (3) не зависит от размерности исследуемой динамической системы, а также явно не зависит от размера ε . Зависимость от величины ε и от конкретного задания начального состояния входит в (3) через $\langle \tau_r \rangle$. Закон (3) описывает распределение случайной последовательности возвратов в ε -окрестность некоторой точки и справедлив в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех $\tau_r > \tau_r^*$. Выражения (1) и (3) относятся к проблеме возвратов в малую окрестность ε заданной точки исследуемого множества и в этом смысле характеризуют *локальные* свойства возвратов Пуанкаре.

Известен иной подход к проблеме возвратов Пуанкаре, основанный на разбиении всего множества на ε -элементы с последующим усреднением минимальных возвратов по разбиениям. Так как усреднение осуществляется по всему множеству, то такой подход можно назвать *глобальным*. Математическая теория глобального подхода изложена в работах [2, 6]. Рассматриваемое множество фазовых траекторий динамической системы (например, аттрактор системы) покрывается кубиками (или шарами) размером $\varepsilon \ll 1$. Покрытие должно включать всё рассматриваемое множество. Для каждого элемента покрытия ε_i ($i = 1, 2, \dots, m$)

определяется минимальное время первого возврата фазовой траектории в ε_i -окрестность $\tau_{inf}(\varepsilon_i)$. Затем находится среднее минимальное время первого возврата по всему множеству элементов покрытия ε_i :

$$\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tau_{inf}(\varepsilon_i). \quad (4)$$

Показано [2], что

$$\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle \sim \phi^{-1}(\varepsilon^{\frac{d}{\alpha_c}}), \quad (5)$$

где α_c – размерность последовательности времён возврата, введённая Афраймовичем и Песиным [6–8], d – размерность рассматриваемого множества. Функция ϕ в (5) может быть задана в одной из следующих форм:

$$\phi(t) \sim \frac{1}{t}, \phi(t) \sim e^{-t}, \phi(t) \sim e^{-t^2}, \dots, \quad (6)$$

что зависит от топологической энтропии системы h_T [9], а также от мультифрактальности исследуемого множества, если она имеет место. Если топологическая энтропия $h_T = 0$, то $\phi(t) \sim 1/t$ и из (5) следует

$$\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{-\frac{d}{\alpha_c}}. \quad (7)$$

Если $h_T > 0$, то наиболее типичным является задание $\phi(t)$ в виде экспоненты $\phi(t) \sim e^{-t}$. В этом случае выражение (5) можно представить в виде [10]:

$$\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\alpha_c} \ln \varepsilon. \quad (8)$$

Как известно [11], топологическая энтропия h_T является оценкой сверху энтропии Колмогорова–Синяя, которая, в свою очередь, определяется положительными показателями Ляпунова λ^+ . Отсюда, в частности, следует, что для хаотических динамических систем с экспоненциальным разбеганием траекторий топологическая энтропия положительна ($h_T > 0$) и справедливо соотношение (8). Выражение (7) для хаотических систем будет справедливым только для критических значений параметра, при которых энтропия Колмогорова–Синяя обращается в нуль.

Отметим одну деталь. При численном моделировании возвратов Пуанкаре применяются алгоритмы и программы, которые не требуют непосредственного знания вероятностной меры. В связи с этим в численных задачах, как правило, не проводится сопоставление результатов анализа с видом и эволюцией вероятностной меры при изменении параметров системы и добавлении внешнего шума. Это сопоставление совершенно необходимо, так как на основе математической те-



ории именно изменения плотности распределения $p(x)$ определяют экспериментальные результаты.

1. Локальный подход. Влияние внешнего шума

Распределение (3) с учётом (1) можно переписать в виде

$$p(\tau_r) = P(\varepsilon, \vec{x}_0) \exp(-P(\varepsilon, \vec{x}_0)\tau_r), \quad (9)$$

где $\beta = 1$ (1).

При экспериментальных исследованиях оказывается удобным рассматривать $\ln p(\tau_r)$, так как график представляет собой прямую линию $y = a - kx$:

$$\ln p(\tau_r) = C - \frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}, \quad C = \ln P(\varepsilon, \vec{x}_0) \quad (10)$$

или

$$\ln p(\tau_r) = C - P(\varepsilon, \vec{x}_0)\tau_r. \quad (11)$$

Коэффициент k наклона прямой $\ln p(\tau_r)$ от τ_r выражается как

$$k = -\frac{1}{\langle \tau_r \rangle} = -P(\varepsilon, \vec{x}_0). \quad (12)$$

Если вероятностная мера $p(x)$ задана, то для вероятности $P(\varepsilon, \vec{x}_0)$ получается следующее выражение (2):

$$P(\varepsilon, \vec{x}_0) = \int_{\vec{x}_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{\vec{x}_0 + \frac{\varepsilon}{2}} p(\vec{x}) d\vec{x} \approx p(\vec{x}_0)\varepsilon^{d_f}. \quad (13)$$

где $\varepsilon \ll 1$, d_f – фрактальная размерность предельного множества (аттрактора) в фазовом пространстве системы. Отметим, что для одномерных дискретных отображений с непрерывной и гладкой вероятностной мерой $d_f = 1$, т.е. d_f равно размерности системы $N = 1$. Для многомерных систем $N \geq 2$, $d_f < N$.

Зная закон распределения (3), вычислим дисперсию $\sigma_r^2(\varepsilon, \vec{x}_0)$ как среднее квадратичное отклонение τ_r от $\langle \tau_r \rangle$:

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= \langle (\tau_r - \langle \tau_r \rangle)^2 \rangle = \\ &= \int_0^\infty p(\tau_r) [\tau_r^2 - \langle \tau_r \rangle^2] d\tau_r = \langle \tau_r \rangle^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из выражения (1) с учётом (13) для одномерного отображения с хаотическим аттрактором получаем:

$$\langle \tau_r \rangle = [p(x_0)]^{-1} \varepsilon^{-d_f} \quad (15)$$

или

$$\ln \langle \tau_r \rangle = C_1 - d_f \ln \varepsilon. \quad (16)$$

Соответственно для дисперсии получим:

$$\sigma_r^2(\varepsilon, x_0) = \langle \tau_r \rangle^2 = [p(x_0)]^{-2} \varepsilon^{-2d_f} \quad (17)$$

или

$$\ln \sigma_r^2(\varepsilon, x_0) = C_2 - 2d_f \ln \varepsilon \quad (18)$$

Из (16) и (18) следует, что для одномерного отображения с гладкой вероятностной мерой зависимости $\ln \langle \tau_r \rangle$ и $\ln \sigma_r^2(\varepsilon, x_0)$ от величины $\ln \varepsilon$ будут представлять собой прямые линии с наклоном -1 и -2 соответственно, сдвинутые относительно нуля координат на постоянные величины C_1 и C_2 , так как в этом случае $d_f = 1$.

На рис. 1 приведены данные численного эксперимента, проведённого для одномерного отображения

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) + \sqrt{2D}\xi_n \quad (19)$$

при значениях параметров $r = 4.0$ и $D = 0$, где D – интенсивность внешнего белого шума ξ_n .

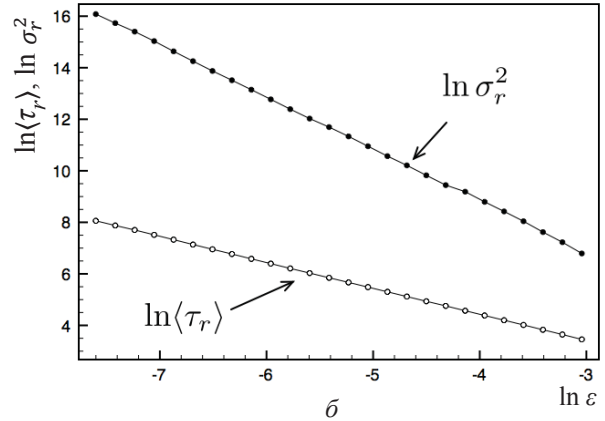
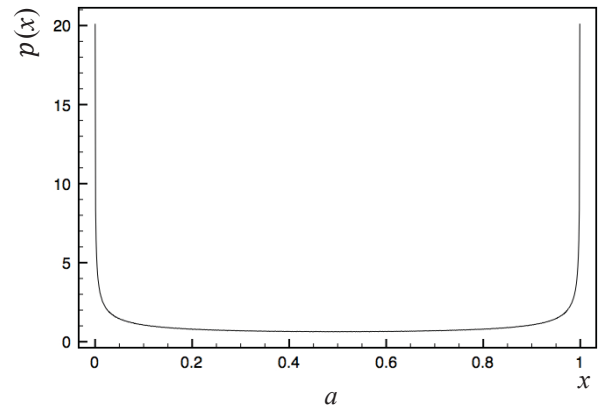


Рис. 1. Плотность распределения $p(x)$ на аттракторе системы (19) (а); зависимости $\ln \langle \tau_r \rangle$ и $\ln \sigma_r^2$ от $\ln \varepsilon$ (б). Наклоны зависимостей -1.008 и -2.0208 соответственно. Значения параметров: $r = 4.0$, $x_0 = 0.5$

На рис. 1, а представлена плотность распределения $p(x)$ на аттракторе системы (19), соответствующая аналитическому выражению $p(x) = (\pi\sqrt{x(1-x)})^{-1}$ [12]. Рис. 1, б иллюстрирует зависимости среднего времени возврата $\ln \langle \tau_r \rangle$ и дисперсии $\ln \sigma_r^2$ от $\ln \varepsilon$. Как видно из графиков, приведённых на рис. 1, б, рассчитанные зависимости как для $\ln \langle \tau_r \rangle$, так и для



$\ln \sigma_r^2$ представляют собой прямые с наклоном $|k| = 1.008$ и $|k| = 2.0208$, что с учётом ошибки счёта полностью соответствует теории (16) и (18) при условии $d_f = 1$.

Данные рис. 1 служат одновременно подтверждением того, что распределение $p(\tau_r)$ (3), с помощью которого получены выражения (16) и (18), является справедливым, включая теорему Каца (1).

Как изменятся описанные закономерности в условия воздействия шума на систему (19), т.е. в случае $D > 0$? Здесь необходимо проанализировать влияние шума на закон (3), теорему Каца (1) и соответственно на вид зависимостей (16) и (18). Отметим, что ряд ответов на поставленные вопросы приведён в работах [13,14], которые мы будем использовать.

Как отмечалось в работе [13], главным фактором является изменение вероятностной меры аттрактора, обусловленное действием шума. На рис. 2, а приведены данные расчёта плотности распределения $p(x)$ для аттрактора системы (19) при $r = 4.0$ и $D = 10^{-3}$. Если сравнить их с рис. 1, а, то можно сказать, что $p(x)$ в присутствии шума существенно меняется. В результате будет меняться и величина вероятности попадания траектории в ε -окрестность начального состояния x_0 (13):

$$P(\varepsilon, x_0, D = 0) \neq P(\varepsilon, x_0, D > 0). \quad (20)$$

Теорема Каца будет справедливой и для зашумлённой системы [14]. Однако в выражении (1) необходимо использовать величину $P(\varepsilon, x_0, D)$ с учётом её изменений, обусловленных действием шума. Аналогично в (13) необходимо использовать плотность $P(x, D)$ для зашумлённой системы:

$$P(\varepsilon, x_0, D) = p(x_0, D) \varepsilon^{d_f}. \quad (21)$$

Таким образом, теорема Каца для зашумлённой системы принимает вид

$$\langle \tau_r \rangle = \frac{1}{p(x_0, D)} \varepsilon^{-d_f}. \quad (22)$$

Естественно предположить, что и распределение $p(\tau_r)$ (см. формулу (3)) останется справедливым, если входящий в (3) коэффициент $\langle \tau_r \rangle$ будет рассчитан с учётом влияния шума на соотношение (22):

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r(D) \rangle} \exp\left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r(D) \rangle}\right). \quad (23)$$

Если предположить, что закон (23) выполняется, то выражения (16) и (18) для $\langle \tau_r \rangle$ и σ_r^2 также будут справедливы, причём влияние шума приведёт лишь к изменениям коэффициентов C_1 и C_2 , а

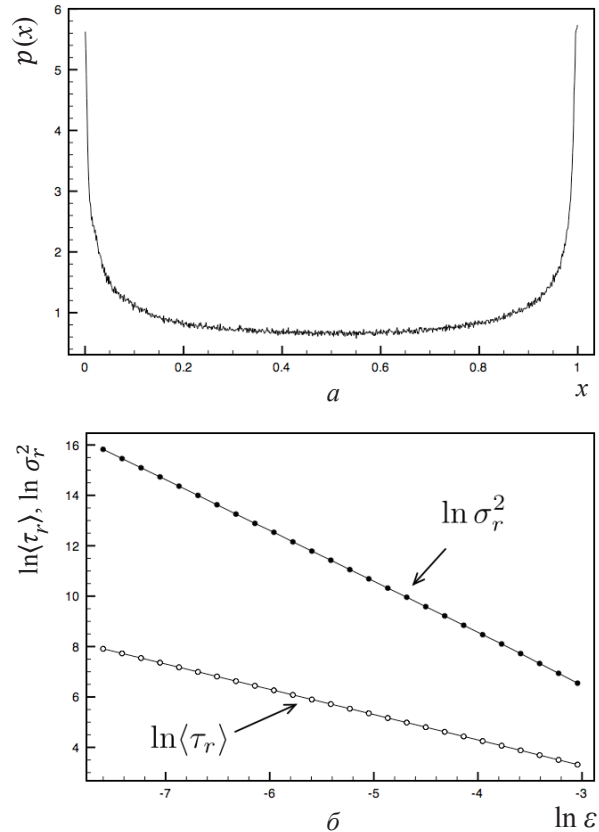


Рис. 2. Плотность распределения $p(x)$ на аттракторе зашумлённой системы (19) (а); зависимости $\ln \langle \tau_r \rangle$ и $\ln \sigma_r^2$ от $\ln \varepsilon$ (б). Наклоны зависимостей: -1.005 и -2.0267 соответственно. Значения параметров: $r = 4.0, D = 10^{-3}$

линейная зависимость от $\ln \varepsilon$ сохранится, как и величина наклонов d_f и $2d_f$. В [15] показано, что в случае зашумлённых систем $d_f = N$.

Рассуждения и выводы, приведённые выше, не являются строгим доказательством, но могут быть проверены с помощью численного эксперимента. Рассмотрим результаты экспериментов. На рис. 3 приведены данные расчёта распределения $p(\tau_r)$ для случаев $D = 0$ и $D = 10^{-3}$.

Как видно из графиков, экспоненциальный характер зависимостей $p(\tau_r)$ имеет место как в отсутствие, так и при ненулевом уровне шума $D = 10^{-3}$. Более того, в обоих случаях наклон прямых $\ln p(\tau_r)$ от τ_r строго соответствует величине $k = -1/\langle \tau_r \rangle$. В зашумлённой системе $\langle \tau_r \rangle$ уменьшается за счёт возрастания вероятности $P(x_0, \varepsilon, D) > P(x_0, \varepsilon, D = 0)$, что приводит к увеличению наклона графика рис. 3 для зашумлённой системы. Таким образом, экспоненциальный закон распределения (3) оказывается справедливым в случае зашумлённой системы (19), если учесть в выражении (3) изменение величины $\langle \tau_r \rangle$ (см. формулу (23)).

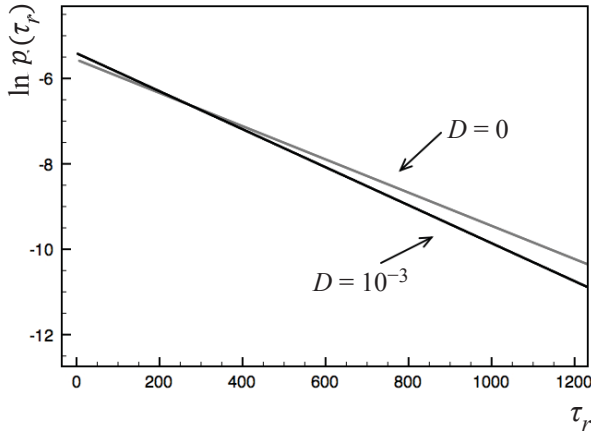


Рис. 3. Результаты аппроксимации данных расчёта плотности распределения $p(\tau_r)$ при $\varepsilon = 0.006$ для случаев $D = 0$ и $D = 10^{-3}$. Наклоны зависимостей: $-3.96 \cdot 10^{-3}$ ($\langle \tau_r \rangle = 252$) и $-4.44 \cdot 10^{-3}$ ($\langle \tau_r \rangle = 225.1$) соответственно

Если это так, то можно ожидать, что графики, представленные на рис. 1, б для случая $D = 0$, будут качественно совпадать с графиками для $\langle \tau_r \rangle$ и σ_r^2 , рассчитанными для зашумлённой системы. Расчёты этот факт подтвердили. На рис. 2, б приведены соответствующие результаты.

Основной вывод можно сформулировать следующим образом. Воздействие шума на режим хаотического аттрактора динамической системы приводит к изменениям в характере плотности распределения $p(x)$. Если это обстоятельство корректно учесть, то из приведённых результатов следует, что теорема Каца и экспоненциальный закон распределения времён возврата $p(\tau_r)$ оказывается справедливым и в случае аддитивного шумового воздействия на систему.

2. Глобальный подход. Размерность Афраймовича–Песина последовательности времён возвратов

При глобальном подходе анализируется процесс возвратов путём усреднения по всему множеству. В этом случае справедливы теоретические результаты (5)–(8). Если множество характеризуется положительной топологической энтропией $h_T > 0$, то справедливо выражение (8). Если $h_T = 0$, то нужно использовать (7). Проиллюстрируем основные теоретические результаты на простом примере отображения (19) в отсутствие шума ($D = 0$). На рис. 4 представлены результаты расчёта зависимости $\langle \tau_{inf} \rangle$ от $\ln \varepsilon$ для $r = 4.0$. Как видно, график аппроксимируется прямой линией с наклоном $k = -1.431$. Если предположить, что в случае $r = 4.0$ размерность $d_f \approx 1.0$, то для размерности

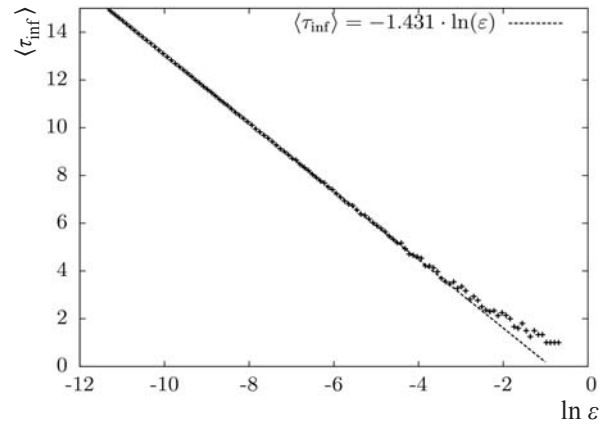


Рис. 4. Зависимость $\langle \tau_{inf} \rangle$ от $\ln \varepsilon$ для отображения (19) для $r = 4.0$, $D = 0$, подтверждающая справедливость соотношения (8)

Афраймовича–Песина (АП-размерности) получаем величину $\alpha_C = 0.698$.

В работе [16] доказано, что для одномерных отображений АП-размерность совпадает по величине с положительным показателем Ляпунова $\alpha_C = \lambda^+$. Расчёты этот факт подтверждают, о чём свидетельствует рис. 5. Из рисунка следует, что для значений $3.6 \leq r \leq 4.0$ рассчитанные значения λ^+ и α_C с точностью до ошибки вычислений совпадают с теоретической аппроксимацией $\lambda^+ = c(r - r^*)^{0.45}$, где критическое значение $r = r^* = 3.57\dots$ [12].

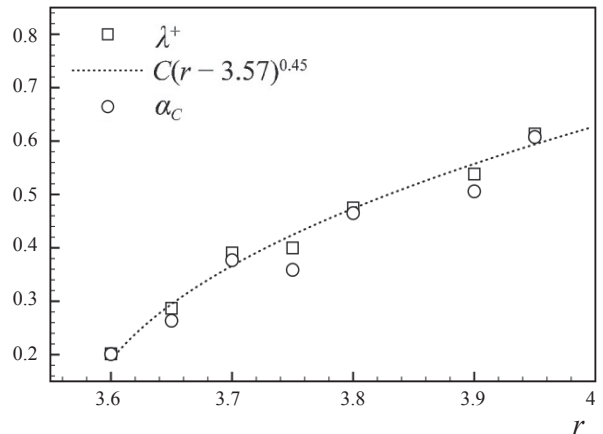


Рис. 5. Зависимость показателя Ляпунова λ^+ и АП-размерности α_C от параметра r отображения (19) при $D = 0$

В критической точке $r^* = 3.57\dots$ аттрактор системы (19) имеет нулевое значение для показателя Ляпунова, и, следовательно, топологическая энтропия будет также равна нулю $h_T = 0$. В этом случае должна выполняться зависимость (7), которую удобно рассматривать в виде



$$\ln \langle \tau_{inf} \rangle \sim -\frac{d_f}{\alpha_C} \ln \varepsilon. \quad (24)$$

Эта зависимость также подтверждается экспериментально, как это следует из рис. 6. Величина наклона экспериментальной прямой (см. рис. 5) $|k| = \frac{d_f}{\alpha_C} = 0.625$. Как известно, размерность аттрактора Фейгенбаума в критической точке $d_f = 0.545$ [12]. Зная величину d_f и величину наклона k , определим значение α_C , которое оказывается равным $\alpha_C = 0.87$. Таким образом, подтверждается теоретический результат (7), из которого следует, что в случае $h_T = \lambda^+ = 0$ (в критической точке $r = r^*$) АП-размерность отлична от нуля и не совпадает с величиной показателя Ляпунова.

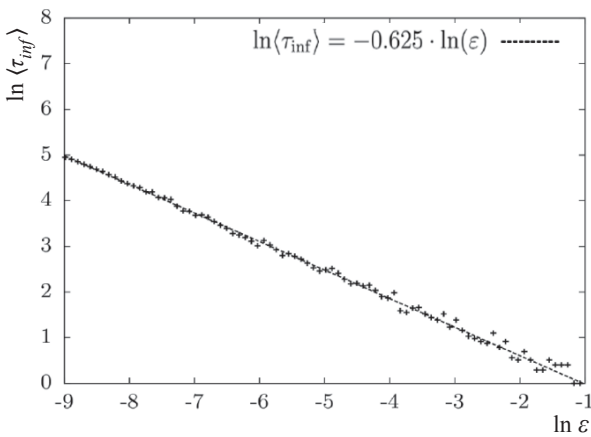


Рис. 6. Зависимость $\ln \langle \tau_{inf} \rangle$ от $\ln \varepsilon$ в критической точке $r^* = 3.57$ отображения (19), подтверждающая справедливость (7)

Оценим влияние шума на характер зависимости (7), на величину АП-размерности α_C и на связь с величиной показателя Ляпунова. Исследования показали, что в условиях воздействия шума линейный характер зависимости (24) сохраняется и в присутствии шума, что даёт возможность расчёта величины наклона графика $k = -d_f / \alpha_C$. Учитывая, что в присутствии шума $d_f = 1$, легко можно определить α_C .

Расчёты показали, что в присутствии шума связь между показателями Ляпунова и величиной АП-размерности α_C нарушается. Об этом свидетельствуют данные, приведённые на рис. 7. Видно, что с увеличением интенсивности шума D размерности α_C экспоненциально возрастает, в то время как величина показателя Ляпунова в зашумлённой системе практически не зависит от интенсивности шума, оставаясь приближённо

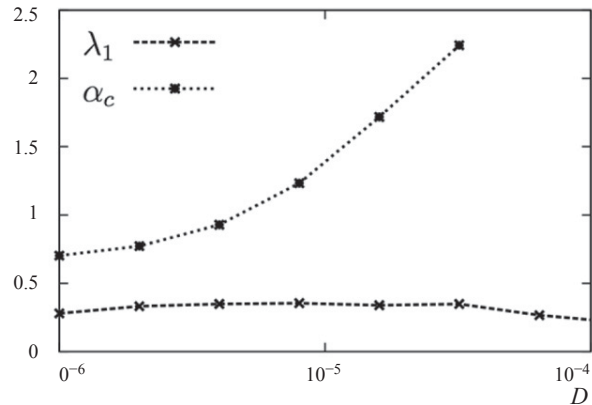


Рис. 7. Зависимости показателя Ляпунова λ_1 и АП-размерности α_C от интенсивности шума D в системе (19) при $r = 4.0$

постоянной. Как показано в работе [17], оценкой для величины α_C в зашумлённой системе будет являться так называемая относительная энтропия Колмогорова, введённая в работе [18].

3. Приложения в нелинейной динамике

3.1. Диагностика эффекта стохастического резонанса с помощью распределения времён возврата Пуанкаре

Классическое явление стохастического резонанса (СР) было описано в работах [19, 20] на примере передемпфированного осциллятора Крамерса. Было установлено и впоследствии многократно подтверждено экспериментально (см. [20, 21] и приведённые в них списки литературы), что в режиме индуцированных шумом переключений интенсивность периодической компоненты в спектре выходного сигнала достигает максимума при оптимальном уровне шума.

В работе [22] показано, что эффект СР может быть реализован в хаотических системах в отсутствие шума в режиме кризиса аттракторов. Рассмотрим этот эффект на примере дискретного аналога осциллятора Крамерса [22]:

$$x_{n+1} = (\alpha x_n - x_n^3) \exp\left(-\frac{x_n^2}{b}\right) + A \sin(\Omega n). \quad (25)$$

Система (25) есть одномерное кубическое отображение, возбуждаемое малым ($A \ll 1$) периодическим сигналом. Экспоненциальный множитель в (25) вводится с целью избежать ухода траекторий в область больших значений x_n . Эффект СР в (25) реализуется в отсутствие шума при условии, что значение управляющего параметра $a > a^* = 2.839\dots$ При этом имеют место динамические нерегулярные переключения между симметричными частями хаотического аттрак-



тора, частота которых управляется величиной параметра a [20–22]. Диагностика эффекта СР в (25) проводилась методом фильтрации (методом двух состояний) с использованием модели телеграфного сигнала [21].

Рассмотрим иной способ диагностики эффекта СР в системе (25), используя данные расчёта плотности распределения времён возврата Пуанкаре. Подробное описание метода и результатов приведено в работе [23]. На рис. 8 приведён фрагмент графика плотности распределения $p(\tau_r)$, рассчитанной для возвратов Пуанкаре в системе (25). Как видно из рис. 8, плотность оказывается периодически промодулированной с периодом внешнего сигнала $T \approx \frac{2\pi}{\Omega} = 62.8$. Если рассчитать спектр Фурье промодулированной плотности $p(\tau_r)$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty p(\tau_r) \exp(-j\omega\tau_r) d\tau_r, \quad (26)$$

то в спектре $F(\omega)$ должен иметь место пик $F(\Omega)$ на частоте $\omega = \Omega$. Расчёты этот факт подтвердили. Естественно предположить, что в режиме СР величина этого пика будет максимальной, что также было подтверждено вычислениями [23].

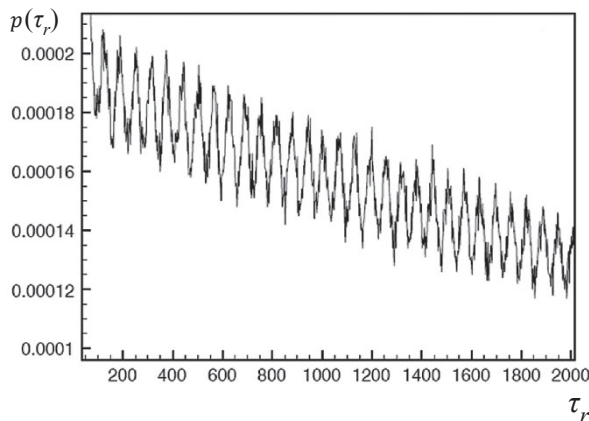


Рис. 8. Фрагмент плотности распределения $p(\tau_r)$, рассчитанной для системы (25) в режиме СР при значениях параметров $a = 2.843$, $\Omega = 0.1$, $b = 10$, $A = 0.005$. Величина окрестности возвратов $\varepsilon = 10^{-4}$

На рис. 9 представлены результаты расчётов величины коэффициента усиления η и относительной амплитуда спектра $F(\Omega)$ в зависимости от параметра a системы (25). Из графиков видно, что обе зависимости характеризуются максимумом при значении $a = 2.843$, которое отвечает режиму СР [20,22].

Таким образом, эффект СР можно диагностировать в численном эксперименте путём расчёта спектральной функции $F(\omega)$ плотности распреде-

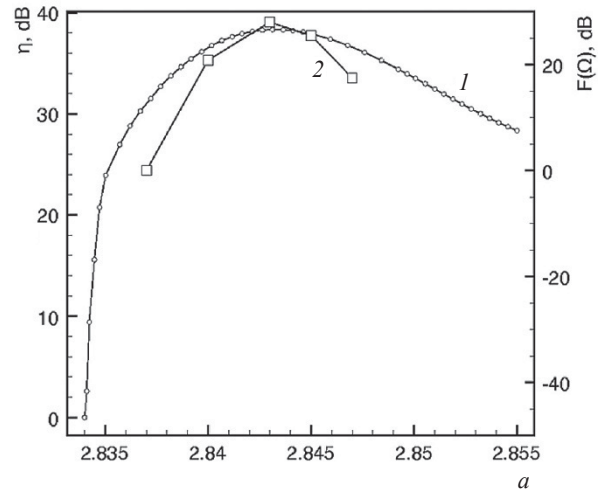


Рис. 9. Зависимости коэффициента усиления η (кривая 1) и относительной величины спектрального пика $F(\Omega)$ (кривая 2) от параметра a системы (25). Кривая 1 рассчитана методом фильтрации. Значения параметров: $\Omega = 0.1$, $b = 10$, $A = 0.005$, $\varepsilon = 10^{-4}$

ления времени возврата Пуанкаре в ε -окрестность произвольной точки хаотического аттрактора и определения условий, при которых $F(\Omega)$ достигает максимального значения. Эффект увеличения амплитуды спектрального пика $F(\Omega)$ в режиме СР уверенно регистрируется вне зависимости от выбора величины окрестности ε в интервале $10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-1}$ и выбора начальной области $x_0 \pm \varepsilon/2$ на аттракторе [23].

Необходимо отметить, что описанный метод анализа спектра $F(\omega)$ плотности распределения времён возврата $p(\tau_r)$ даёт возможность на качественном уровне диагностировать эффект СР, но не позволяет провести расчёт количественных характеристик СР (отношение сигнал/шум и коэффициент усиления), которые необходимо вычислять, используя соответствующие реализации x_n в системе (25).

3.2. Диагностика эффекта синхронизации хаотических автоколебаний с помощью размерности Афраймовича–Песина

Размерность Афраймовича–Песина является глобальной характеристикой последовательностей времён возврата аттрактора системы в целом и может быть использована в качестве одного из критериев синхронизации хаотических автоколебаний. В качестве примера рассмотрим эффект синхронизации хаоса в двух взаимно связанных осцилляторах Лоренца, описанный в работе [10]. Уравнения рассматриваемой системы имеют вид



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma_1(x_2 - x_1) + c_1(y_1 - x_1), \\ \dot{x}_2 = \rho_1 x_1 - x_2 - x_1 x_3 + c_2(y_2 - x_2), \\ \dot{x}_3 = -\beta_1 x_3 + x_1 x_2 + x_3(y_3 - x_3), \\ \dot{y}_1 = \sigma_2(y_2 - y_1) + c_1(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 = \rho_2 y_1 - y_2 - y_1 y_3 + c_2(x_2 - y_2), \\ \dot{y}_3 = -\beta_2 y_3 + y_1 y_2 + y_3(x_3 - y_3). \end{cases} \quad (27)$$

Фазовые переменные x_i отвечают первой системе Лоренца, y_i – второй, $i = 1, 2, 3$. Рассматриваются слегка расстроенные осцилляторы при следующих значениях управляющих параметров:

$$\rho_1 = \rho_2 = 45.92; \sigma_1 = 16.0, \sigma_2 = 16.02; \beta_1 = 4.0, \beta_2 = 4.01.$$

Эффект синхронизации достигается путём увеличения степени взаимосвязи осцилляторов, которая зависит от величины коэффициентов c_1, c_2, c_3 в (27).

В отсутствие связи ($c_i = 0$) хаотический аттрактор системы (27) ввиду имеющейся расстройки по параметрам σ и β расположен в шестимерном фазовом пространстве. Для иллюстрации на рис. 10, а представлена проекция хаотического аттрактора на плоскость фазовых переменных (x_1, y_1) . Качественно аналогичные картины получаются в проекциях на плоскости (x_2, y_2) и (x_3, y_3) .

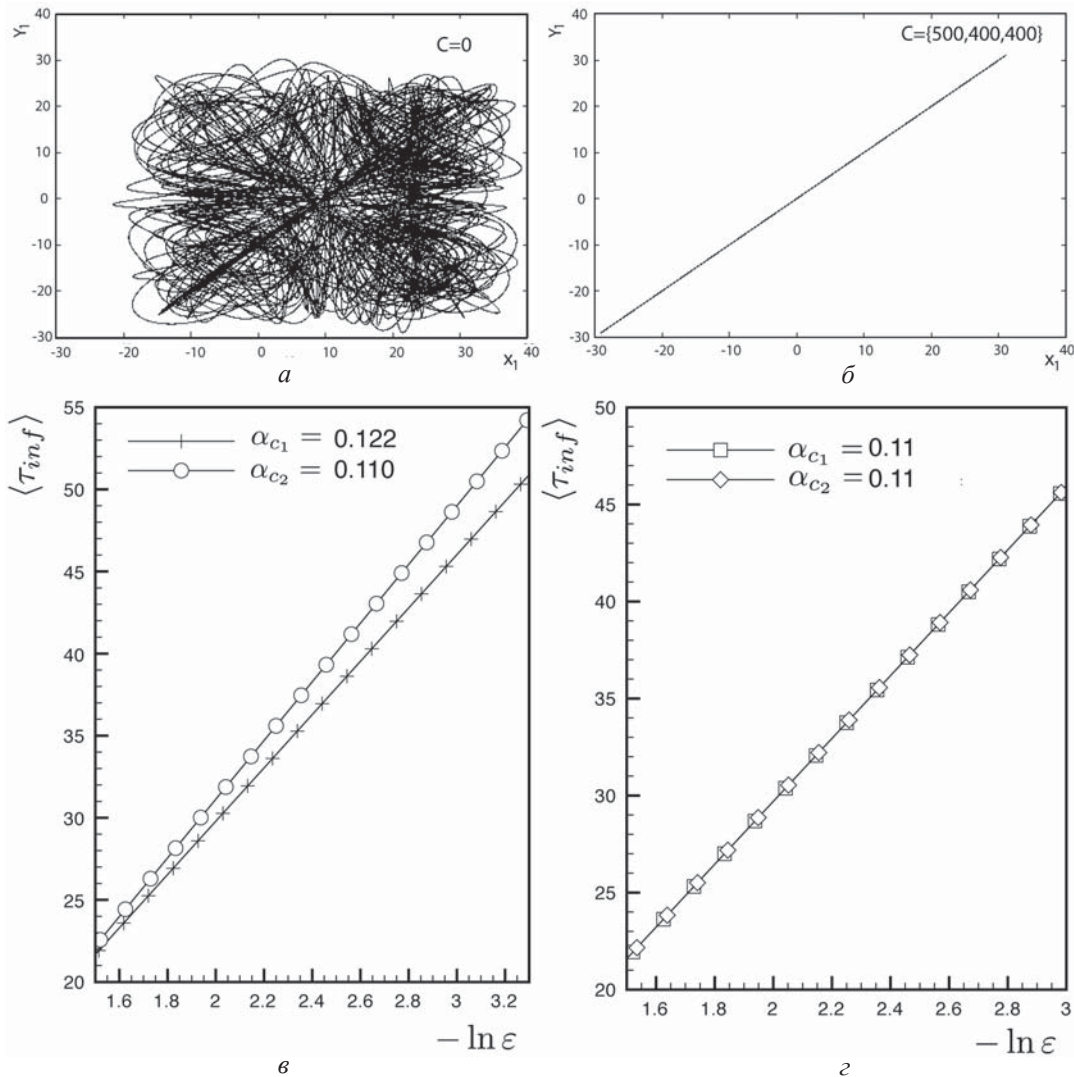


Рис. 10. Проекция аттрактора системы (27) на плоскость переменных (x_1, y_1) в отсутствие связи ($c_i = 0$) (а), при наличии связи ($c_1 = 500, c_2 = c_3 = 400$) (б); зависимости $\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle$ в отсутствие синхронизации (в) и в условиях синхронизации (г)

С увеличением связи реализуется эффект топологической синхронизации хаоса [10]. При этом аттрактор системы (27) располагается вбли-

зи инвариантного трёхмерного подпространства $x \approx y$ ($x_1 \approx y_1, x_2 \approx y_2, x_3 \approx y_3$). Соответственно проекции фазовой траектории системы на плоскости



(x_i, y_i) должны находиться в малой окрестности диагонали $x_i = y_i$ ($i = 1, 2, 3$). Расчёты подтверждают ожидаемый результат, о чём свидетельствует рис. 10, б. В силу малой расстройки осцилляторов Лоренца по параметрам в системе (27) с введением связи экспериментально реализуется режим практически полной синхронизации, который возможен только в случае идентичности взаимосвязанных систем [24]. Если говорить строго, когда между переменными x_i и y_i ($i = 1, 2, 3$) достоверно существуют различия. Расчёты показали, что величина $|x_i(t) - y_i(t)|$ в среднем по времени хотя и мала, однако, конечна и составляет величину порядка 10^{-4} . Естественно, что на графике это невозможно увидеть.

Проведём расчёты АП-размерности для аттракторов подсистем (27) в отсутствие связи и в режиме синхронизации. Результаты представлены на рис. 10, в, г.

Из графиков следует, что представленные зависимости $\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle$ подчиняются теоретической закономерности (8), так как рассматриваются хаотические режимы с положительной топологической энтропией. Наклоны прямых на графиках рис. 10, в $k = \frac{d}{\alpha_C}$ различны в силу имеющейся расстройки по параметрам и отсутствия связи. При этом естественны различия в значениях α_C : для первой системы Лоренца $\alpha_{C1} = \frac{d}{k_1} = 0.122$, соответственно для второй – $\alpha_{C2} = 0.110$. Для расчёта α_C мы использовали данные наклонов прямых (см. рис. 10) $k_1 = 16.54$ и $k_2 = 18.43$, положив размерность аттрактора Лоренца $d = 2.03$.

В режиме синхронизации (см. рис. 10, г) графики зависимостей $\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle$ для первой и второй подсистем полностью совпадают. Их наклон $k_1 = k_2 = 18.43$ и соответственно размерности Афраймовича–Песина в режиме синхронизации оказываются равными $\alpha_{C1} = \alpha_{C2} = 0.11$.

Таким образом, в режиме полной синхронизации двух связанных хаотических подсистем устанавливается равенство их АП-размерностей.

3.3. Расчёт фрактальной размерности аттрактора на основе возвратов Пуанкаре

Для оценки величины фрактальной размерности d_f аттрактора системы будем использовать теоретический результат (8), который представим в виде

$$\langle \tau_{inf} \rangle = C - \frac{d_f}{\alpha_C} \ln \varepsilon. \quad (28)$$

Если в численном эксперименте определить коэффициент наклона прямой (28) $|k| = d_f / \alpha_C$, то, зная величину α_C , легко найти значение d_f . В качестве примера рассмотрим отображение (19) в отсутствие шума ($D = 0$) для двух значений параметра $r = 4.0$ и $r = 3.7$. Как хорошо известно [12], в случае $r = 4.0$ аттрактор отображения (19) характеризуется размерностью $d_f = 1.0$, гладкой непрерывной функцией распределения $p(x)$ (см. рис. 1, а) и величиной показателя Ляпунова $\lambda^+ = \ln 2 \approx 0.693$. Доказано, что для отображения (19) $\lambda^+ = \alpha_C$ [16]. Для $r = 4.0$ рассчитывалась зависимость (28) и было получено значение $|k| = 1.431$ (см. рис. 4), откуда легко получить $d_f = |k| \cdot \lambda^+ \approx 0.992$, отличие от теории составляет менее 1%. Для численной оценки фрактальной размерности аттракторов наиболее часто используется следующие определения:

ёмкостная размерность:

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (29)$$

информационная размерность:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \log P_i}{\log \varepsilon}, \quad (30)$$

корреляционная размерность:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2}{\log \varepsilon}, \quad (31)$$

соотношение между размерностями:

$$D_0 \geq D_1 \geq D_2. \quad (32)$$

В приведённых формулах ε – размер интервала покрытия аттрактора, $N(\varepsilon)$ – число элементов покрытия, $P_i = P_i(\varepsilon)$ – вероятность попадания траектории в ε_i -интервал.

Для сравнения результатов расчёта d_f методом возвратов Пуанкаре (28) были проведены расчёты размерностей D_0, D_1 и D_2 , представленные на рис. 11. Из графиков видно, что с уменьшением ε до $\varepsilon \approx 10^{-6}$ все размерности D_i ($i = 0, 1, 2$) стремятся к единице, т.е. к теоретическому значению $d_f = 1.0$. Выполняется неравенство (32), так как $D_0 = 1.0, D_1 = 0.974, D_2 = 0.972$.

Отметим, что наиболее точной оценкой размерности d_f в рассмотренном примере является ёмкость $D_0 = 1.0$ (29). Это вполне закономерно, так как при $r = 4.0$ аттрактор системы (19) включает весь единичный интервал. Интересно рассмотреть задачу расчёта d_f для $r = 3.7$, когда аттрактор в (19) представляет собой набор отрезков в единичном интервале и плотность распределения становится достаточно сложной функцией.

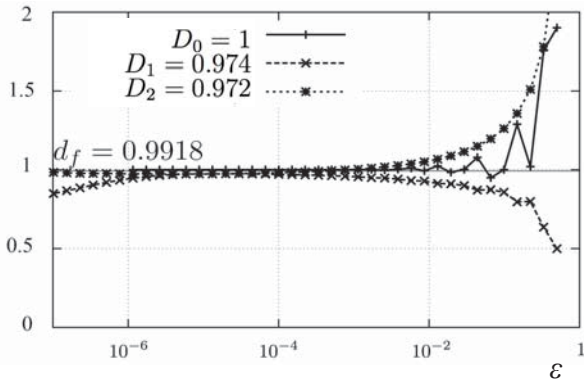


Рис. 11. Данные расчёта спектра размерностей аттрактора в отображении (19) при $r = 4.0$

Расчёты свидетельствуют, что в случае $r = 3.7$ результаты следующие:

$$|k| = 2.789, \quad \lambda^+ = \alpha_C = 0.355, \quad d_f = 0.993.$$

При этом для спектра размерностей (29), (30) и (31) получаем соответственно

$$D_0 = 1.0, \quad D_1 = 0.947, \quad D_2 = 0.938.$$

Таким образом, и в этом случае размерность d_f , полученная на основе глобального подхода в теории возвратов Пуанкаре (28), достаточно хорошо соответствует расчёта ёмкостной размерности аттрактора.

Отметим, что близость d_f к величине D_0 имеет место не всегда. Для некоторых отображений значения d_f оказывались наиболее близкими к величине информационной размерности D_1 (30) [15].

В работе [17] экспериментально показано, что равенство $\alpha_C = \lambda^+$ справедливо не только для одномерных, но и для двумерных отображений в режиме хаотического аттрактора. Таким образом, описанный выше метод численной оценки d_f можно использовать для расчёта фрактальной размерности аттракторов в двумерных отображениях. Наши исследования показали, что метод расчёта d_f на основе глобальной теории возвратов Пуанкаре требует существенно меньших затрат времени при вычислениях и даёт значения d_f наиболее близкие к истинным в сравнении с расчётами на основе определений (29)–(31).

Выводы

Фундаментальные теоретические результаты, представленные в п. 1, получены для гиперболических систем с заданной вероятностной мерой и не накладывают ограничений на размерность динамической системы. В связи с этим без потери общности в настоящей работе мы рассмотрели основные закономерности возвратов Пуанкаре

на примере одномерного квадратичного отображения. Логистическое отображение (19) является негиперболическим, необратимым и имеет множество вероятностных мер в зависимости от управляющего параметра r . В связи с этим экспериментальные результаты работы представляют определённый интерес, так как свидетельствуют о возможности применять теоретические результаты к негиперболическим системам.

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Теорема Каца и экспоненциальный закон распределения времён возврата (локальный подход) при наличии внешнего шума в пределах малой погрешности вычислений оказываются справедливыми, если учесть изменения вероятностной меры, обусловленные действием шума.

2. Показано, что для отображения (19) теоретические закономерности (7) и (8) (глобальный подход) подтверждаются численными расчётами как в отсутствие, так и при воздействии шума.

3. В отсутствие шума для отображения (19) подтверждено соответствие АП-размерности показателю Ляпунова. Это соответствие нарушается для зашумлённого отображения. Оценкой для АП-размерности в этом случае служит относительная энтропия Колмогорова [17].

4. Статистические характеристики времён возврата могут быть использованы для диагностики эффектов стохастического резонанса и синхронизации, а также для расчёта фрактальной размерности аттрактора.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В. С. Афраймовичу за обсуждение работы и полезные дискуссии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК № 14.В37.21.0751).

Список литературы

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М. : ОГИЗ, 1947.
2. Afromovich V., Ugalde E., Urias J. Размерности для последовательности времен возвращений Пуанкаре. М. ; Ижевск : Изд-во РХД ; Ижевский ин-т комп. исследований, 2011.
3. Kac M. Lectures in Applied Mathematics. London : Interscience, 1957.
4. Ott E., Grebogi C., Yorke J. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, iss. 11. P. 1196–1199.
5. Hirata M., Saussol B., Vaienti S. Statistics of Return Times : A General Framework and New Applications //



- Communications in Mathematical Physics. 1999. Vol. 206. P. 33.
6. *Afraimovich V.* Pesin's dimension for Poincaré recurrences // *Chaos*. 1999. Vol. 206, iss. 1. P. 33–35.
 7. *Afraimovich V., Zaslavsky G. M.* Fractal and multifractal properties of exit times and Poincaré recurrences // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. P. 5418.
 8. *Pesin Y. B.* Dimension Theory in Dynamical Systems : Contemporary Views and Applications // *Chicago Lectures in Mathematics*. Chicago University Press, 1997.
 9. *Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H.* Topological entropy // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1965. Vol. 114. P. 309.
 10. *Afraimovich V. S., Lin W. W., Rulkov N. F.* Fractal dimension for Poincaré recurrences as an indicator of synchronized chaotic regimes // *Intern. J. Bifurcat. Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2323–2337.
 11. *Каток А. Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М. : Факториал, 1999.
 12. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М. : Мир, 1988.
 13. *Анищенко В. С., Хайрулин М. Е.* Влияние индуцированного шумом кризиса аттракторов на характеристики времен возврата Пуанкаре // *Письма в ЖТФ*. 2011. Т. 37, вып. 12. С. 35–43.
 14. *Anishchenko V., Khairulin M., Strelkova G., Kurths J.* Statistical characteristics of the Poincaré return times for an one-dimensional nonhyperbolic map // *Eur. Phys. J. B*. 2011. Vol. 82. P. 219–225.
 15. *Анищенко В. С., Астахов С. В., Боев Я. И., Куртс Ю.* Возвраты Пуанкаре в системе с хаотическим нестранным аттрактором // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 1. С. 29–41.
 16. *Saussol B., Troubetzkoy S., Vaienti S.* Recurrence, Dimensions, and Lyapunov Exponents // *J. Stat. Phys.* 2002. Vol. 106, № 3–4. P. 623–634.
 17. *Astakhov S. V., Anishchenko V. S.* Afraimovich–Pesin dimension for Poincaré recurrences in one- and two-dimensional deterministic and noisy chaotic maps // *Phys. Lett. A*. 2012. Vol. 376, № 47–48. P. 3620–3624.
 18. *Anishchenko V. S., Astakhov S.* Relative Kolmogorov Entropy of a Chaotic System in the Presence of Noise // *Intern. J. Bifurcat. Chaos*. 2008. Vol. 18, № 9. P. 2851–2855.
 19. *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance // *J. Phys. A: Mathematical and General*. 1981. Vol. 14, № 11. P. L453–L457.
 20. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems // *Tutorial and Modern Development*. 2nd ed. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2007.
 21. *Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // *УФН*. 1999. Т. 169, № 1. С. 7–38.
 22. *Anishchenko V. S., Neiman A. B., Safonova M. A.* Stochastic Resonance in chaotic systems // *J. Stat. Phys.* 1993. Vol. 70, № 1–2. P. 183–196.
 23. *Anishchenko V. S., Boev Y. I.* Diagnostics of stochastic resonance using Poincaré recurrence time distribution // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2013. Vol. 18, iss. 4. P. 953–958.
 24. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 821–824.

УДК 537.8, 531.51

ПРОБЛЕМА ПОЛНОТЫ ПЕРЕДАВАЕМОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ю. Н. Зайко

ФГБОУ ВПО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ»
Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина, Саратов
E-mail: zyrnick@rambler.ru



Рассмотрена проблема полноты информации, передаваемой сферическими электромагнитными волнами от источника к приемнику. В качестве фактора, определяющего полноту передаваемой информации, рассматривается искривление пространства–времени, вызванное самой волной. Показано, что это искривление имеет две составляющие: гравитационную и дифракционную. Вычислены параметры рассеяния луча света за счет кривизны метрики: угол рассеяния и сечение захвата. Показано, что передача информации из прошлого в будущее сферическими электромагнитными волнами имеет квантовый характер.

Ключевые слова: рассеяние, луч, кривизна пространства–времени, сечение захвата.

Completeness' Problem of Being Transmitted Information

Y. N. Zayko

This article presents an investigation of completeness' problem of information transmitted by spherical electromagnetic wave from source to receiver. A space–time curvature caused by electromagnetic wave is an origin that influences on completeness. It is shown that that curvature has two parts, gravitational and diffractive ones. Light beam scattering parameters such as scattering angle and capture cross-section due to curvature of space-time are evaluated. It is shown that transmission of information from the Past to the Future with the help of spherical electromagnetic waves has quantum character.

Key words: scattering, beam, space–time curvature, capture cross-section.