



- Communications in Mathematical Physics. 1999. Vol. 206. P. 33.
6. *Afraimovich V.* Pesin's dimension for Poincaré recurrences // *Chaos*. 1999. Vol. 206, iss. 1. P. 33–35.
 7. *Afraimovich V., Zaslavsky G. M.* Fractal and multifractal properties of exit times and Poincaré recurrences // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. P. 5418.
 8. *Pesin Y. B.* Dimension Theory in Dynamical Systems : Contemporary Views and Applications // *Chicago Lectures in Mathematics*. Chicago University Press, 1997.
 9. *Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H.* Topological entropy // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1965. Vol. 114. P. 309.
 10. *Afraimovich V. S., Lin W. W., Rulkov N. F.* Fractal dimension for Poincaré recurrences as an indicator of synchronized chaotic regimes // *Intern. J. Bifurcat. Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2323–2337.
 11. *Каток А. Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М. : Факториал, 1999.
 12. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М. : Мир, 1988.
 13. *Анищенко В. С., Хайрулин М. Е.* Влияние индуцированного шумом кризиса аттракторов на характеристики времен возврата Пуанкаре // *Письма в ЖТФ*. 2011. Т. 37, вып. 12. С. 35–43.
 14. *Anishchenko V., Khairulin M., Strelkova G., Kurths J.* Statistical characteristics of the Poincaré return times for an one-dimensional nonhyperbolic map // *Eur. Phys. J. B*. 2011. Vol. 82. P. 219–225.
 15. *Анищенко В. С., Астахов С. В., Боев Я. И., Куртс Ю.* Возвраты Пуанкаре в системе с хаотическим нестранным аттрактором // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 1. С. 29–41.
 16. *Saussol B., Troubetzkoy S., Vaienti S.* Recurrence, Dimensions, and Lyapunov Exponents // *J. Stat. Phys.* 2002. Vol. 106, № 3–4. P. 623–634.
 17. *Astakhov S. V., Anishchenko V. S.* Afraimovich–Pesin dimension for Poincaré recurrences in one- and two-dimensional deterministic and noisy chaotic maps // *Phys. Lett. A*. 2012. Vol. 376, № 47–48. P. 3620–3624.
 18. *Anishchenko V. S., Astakhov S.* Relative Kolmogorov Entropy of a Chaotic System in the Presence of Noise // *Intern. J. Bifurcat. Chaos*. 2008. Vol. 18, № 9. P. 2851–2855.
 19. *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance // *J. Phys. A: Mathematical and General*. 1981. Vol. 14, № 11. P. L453–L457.
 20. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems // *Tutorial and Modern Development*. 2nd ed. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2007.
 21. *Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // *УФН*. 1999. Т. 169, № 1. С. 7–38.
 22. *Anishchenko V. S., Neiman A. B., Safonova M. A.* Stochastic Resonance in chaotic systems // *J. Stat. Phys.* 1993. Vol. 70, № 1–2. P. 183–196.
 23. *Anishchenko V. S., Boev Y. I.* Diagnostics of stochastic resonance using Poincaré recurrence time distribution // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2013. Vol. 18, iss. 4. P. 953–958.
 24. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 821–824.

УДК 537.8, 531.51

ПРОБЛЕМА ПОЛНОТЫ ПЕРЕДАВАЕМОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ю. Н. Зайко

ФГБОУ ВПО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ»
Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина, Саратов
E-mail: zyrnick@rambler.ru



Рассмотрена проблема полноты информации, передаваемой сферическими электромагнитными волнами от источника к приемнику. В качестве фактора, определяющего полноту передаваемой информации, рассматривается искривление пространства–времени, вызванное самой волной. Показано, что это искривление имеет две составляющие: гравитационную и дифракционную. Вычислены параметры рассеяния луча света за счет кривизны метрики: угол рассеяния и сечение захвата. Показано, что передача информации из прошлого в будущее сферическими электромагнитными волнами имеет квантовый характер.

Ключевые слова: рассеяние, луч, кривизна пространства–времени, сечение захвата.

Completeness' Problem of Being Transmitted Information

Y. N. Zayko

This article presents an investigation of completeness' problem of information transmitted by spherical electromagnetic wave from source to receiver. A space–time curvature caused by electromagnetic wave is an origin that influences on completeness. It is shown that that curvature has two parts, gravitational and diffractive ones. Light beam scattering parameters such as scattering angle and capture cross-section due to curvature of space-time are evaluated. It is shown that transmission of information from the Past to the Future with the help of spherical electromagnetic waves has quantum character.

Key words: scattering, beam, space–time curvature, capture cross-section.



Введение

Полнота передаваемой информации характеризуется соответствием объема и качества информации, отправленной источником и принятой приемником. Существует множество факторов, снижающих полноту передаваемой информации, таких как шумы канала связи, конечность апертуры приемника и др. [1]. Устранение этих факторов является очень важной задачей, решение которой лежит на стыке различных наук. Центральной проблемой теории информации является проблема передачи информации по каналу связи с помехами [2]. Существует ряд мер противодействия шумам, включая повторную передачу заперченных битов информации, помехоустойчивое кодирование и др., которые позволяют сохранить полноту информации, хотя и снижают пропускную способность канала. Другой причиной, упомянутой выше, является конечность апертуры принимающего устройства, приводящая, во-первых, к искажению пропорций распространяющихся компонент сигнала в виде сферической волны и, во-вторых, наделяющая принятый сигнал (изображение) конечным числом степеней свободы [1]¹. Не занимаясь перечислением других причин [1], скажем, что почти все они, за исключением лишь, пожалуй, флуктуаций фотонов в каждой нормальной моде, обусловлены факторами, которые являются внешними по отношению к носителю информации. Однако существует фактор в принципе отличающийся от перечисленных выше, который также влияет на полноту передаваемой информации. Речь идет об искривлении пространства–времени, вызываемого самой волной – носителем информации. Его нельзя отнести к внешним факторам и, следовательно, устранить с помощью каких-либо искусственных мер. Как будет показано ниже, его влияние на полноту передаваемой информации может быть значительно более существенным.

Далее мы будем рассматривать в качестве носителя информации электромагнитную волну (ЭМВ). Поскольку волны, исходящие от электромагнитных источников всех типов, являются сферическими [1], ограничимся рассмотрением сферических ЭМВ. Сосредоточимся на исследовании распространения сферических ЭМВ в искривленном пространстве–времени с помощью уравнений Максвелла–Эйнштейна (МЭ). Этот

¹ Возникающая неоднозначность изображения связана с тем, что приходящая (падающая) сферическая волна обладает бесконечным числом степеней свободы [1].

вопрос не является новым, однако в большинстве работ исследуются решения уравнений МЭ в статических электрических (и магнитных) полях [3].

Впервые вопрос о полноте передаваемой информации в такой постановке был поднят в работе автора [4]. В ней было получено выражение (асимптотически точное) для метрики пространства–времени, обусловленной сферической ЭМВ. Были исследованы два типа решений уравнений МЭ: волновое, соответствующее наличию на бесконечности сходящейся (или расходящейся) сферической ЭМВ, и инстантонное, которое играло промежуточную роль при преобразовании сходящейся ЭМВ в расходящуюся. Было показано, что при этом часть информации в области, где сосредоточено инстантонное решение, теряется.

Настоящая работа посвящена развитию этих идей.

1. Метрика пространства–времени, искривляемого электромагнитной волной

Рассмотрение задачи начнем с выражения для интервала [4, 5], описывающего метрику, которая отклоняется от плоской за счет присутствия сферической ЭМВ:

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 + g_{11}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2). \quad (1)$$

Здесь g_{ik} – метрический тензор, r , θ и φ – сферические координаты. В работе [4] получено выражение для компонент метрического тензора в виде

$$-g_{11} = g_{00}^{-1} = e^\alpha, \quad \alpha = \frac{r_c}{r}, \quad r_c = \frac{l(l+1)c}{\omega}, \quad (2)$$

где c – скорость света в вакууме, ω – частота сферической электромагнитной волны, l – целое число, определяющее порядок сферических функций, которые характеризуют угловую зависимость полей ЭМВ, связанное соотношением $l = j \pm 1$ с другим целым неотрицательным числом j , определяющим полный угловой момент ЭМВ Е-типа.

Метрика (1) получена из решения уравнений Максвелла–Эйнштейна [4] с помощью формул Даламбера–Эйлера, примененных к выражению для компоненты F_{01} поля ЭМВ Е-типа. Тщательный анализ рассуждений [4] приводит к заключению о приближенном характере выражения (2) для метрики (1) в применении к нашей задаче, что позволяет использовать его только в асимптотике, т.е. только для значений $r \gg r_c$. Покажем это.

Используя результаты [4], выражающие компоненты тензора энергии–импульса ЭМВ T_i^k через компоненту тензора электромагнитного поля



$F_{01} = \Psi(r, x^0) \cdot \Phi(\theta)$, и приравнявая выражения для тензора Риччи R_i^k и $8\pi K/c^4 T_i^k$ с учетом того, что следы соответствующих тензоров $T_i^i = R_i^i = 0$, запишем для волнового решения уравнений Максвелла–Эйнштейна следующие уравнения:

$$-e^{-\alpha} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{r_s^2}{r^4}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} e^{-\alpha} \left[\alpha'' - (\alpha')^2 + \frac{2\alpha'}{r} \right] = -\frac{r_s^2}{r^4}, \quad r_s^2 = \frac{K}{2c^4} |G|^2.$$

Здесь $f(r, x^0) = r^2 \Psi(r, x^0) = G(r) e^{i\alpha x^0/c} + G^*(r) e^{-i\alpha x^0/c}$, K – гравитационная постоянная, штрих означает производную по $x^1 = r$. В правой части (3) выполнено усреднение по времени и, следуя [6], по углу θ . В асимптотике, т.е. при $r \gg r_c^2$, можно пренебречь правыми частями (3)³. Тогда уравнения (3) совпадают по форме с уравнениями шварцшильдовской задачи [5] и приводят к решению $e^{-\alpha} = 1 - \text{const}/r$, где для совпадения с (2) следует положить $\text{const} = r_c$. Другое свидетельство асимптотического характера метрики (2) можно получить, используя уравнение для функции $f(r, x^0)$ [4]:

$$f'' - e^{2\alpha} \ddot{f} - \frac{l(l+1)}{r^2} e^{\alpha} f = 0, \quad f = r^2 \Psi, \quad (4)$$

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x^0}.$$

Если использовать соотношение, полученное в [4],

$$e^{\alpha} = \pm \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x^0} \right)^{-1}, \quad (5)$$

то уравнение (4) приводится к форме, использованной в [4] для получения выражения для метрики (2):

$$f'' - \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \dot{f} \mp \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{f'}{f} f = 0; \quad f = r^2 \Psi. \quad (4a)$$

Это нелинейное уравнение. Его решения получены в [4] в виде волн, переходящих на бесконечности в плоские волны. В отличие от него уравнение (4) линейно. Решения уравнений (4) и (4a) совпадают только при $r \gg r_c$, когда можно пренебречь последним слагаемым в левой части уравнения (4). Все сказанное подтверждает асимптотический характер выражения (2) для метрики (1)⁴.

² А фактически для $r \gg r_s$, причем $r_s \ll r_c$. Для звезды, рассматриваемой как сферический излучатель, можно получить численную оценку r_s , выражая G через светимость звезды [6]. Например, для Солнца $r_s \approx 10^{-16}$ см, для сверхновой $r_s \approx 3 \cdot 10^{-12}$ см.

³ Условие $R_{ik} = 0$ соответствует пустому пространству в присутствии источников гравитации [5].

⁴ Результаты работы [4] имеют, следовательно, асимптотическую точность.

Возникает вопрос о поведении метрики в области $r \leq r_c$. Для его исследования вернемся к уравнениям (3), в которых уже нельзя пренебрегать правой частью. Чтобы уравнения (3) были совместны, достаточно потребовать, чтобы модуль $|G|$ не зависел от r . В области $r \gg r_c$ это условие выполняется, если решение уравнения (4a) взять в виде $(f(r, x^0) = G(r) e^{i\alpha x^0/c})$:

$$G(y) = G_0 e^{i\varphi(y)}, \quad \varphi(y) = \int^y \exp \left[\frac{l(l+1)}{z} \right] dz, \quad y = \frac{\omega r}{c}. \quad (6)$$

Заметим, что параметр $r_c = l(l+1)c/\omega$ входит только в фазу решения (6), определяя масштаб ее изменения. Для обоснования совместности уравнений (3) в области $r \sim r_s$ нужны дополнительные соображения (приложение). Первое уравнение (3) можно записать в виде

$$ty' - y = t^2 - 1, \quad t = \frac{r'}{r}, \quad y = e^{-\alpha}, \quad (7)$$

решением которого является [7]:

$$y = 1 + t(C + t), \quad (8)$$

где C – постоянная. Если выбрать $C = -r_c/r_s$, то (8) примет вид

$$e^{-\alpha} = g_{00}^{-1} = 1 - \frac{r_c}{r} + \left(\frac{r_s}{r} \right)^2. \quad (9)$$

В области $r > r_c \gg r_s$ это выражение совпадает с найденным ранее асимптотическим значением $\exp(-r_c/r) \approx 1 - r_c/r$.

Если взять $C = -(r_g + r_c)/r_s$, то вместо (9) мы получим выражение для метрики в окрестности массивного излучающего тела с гравитационным радиусом r_g ⁵. В дальнейшем этот случай нас интересовать не будет. Мы ограничимся исследованием искривления пространства–времени только за счет присутствия ЭМВ.

Метрика (9) по форме совпадает с известной метрикой Нордстрёма–Рейсснера (НР) в окрестности массивного заряженного тела [3, 8]. Центральное место в исследовании метрики НР и подобных ей занимает проблема горизонтов, расположенных при значениях r , при которых g_{00} и g_{11} меняют знак. Как известно, при $r_s \ll r_c$ имеются два горизонта – внешний $r_+ \approx r_c (1 - r_s^2/r_c^2)$ и внутренний $r_- \approx r_s^2/r_c$, отделяющие внешнюю и внутреннюю R -области от T -области [3]. Известно также, что если у статической области пространства–времени есть горизонт будущего (r_+), то этот

⁵ Выражение (9) в этом случае отличается от аналогичного, полученного в [6], из-за разницы в процедуре усреднения по времени.



горизонт и область, расположенная за ним ($r < r_+$), реализуют понятие черной дыры с точки зрения первой области [3].

В метрике (9) присутствуют два слагаемых, ответственных за ее отклонение от метрики плоского пространства–времени. Слагаемое $(r_s/r)^2$ связано с энергией–импульсом ЭМВ и описывает влияние ее гравитационного поля на искривление метрики. Слагаемое r_c/r не связано с энергией импульсом ЭМВ и, следовательно, с ее гравитационным полем и имеет другую природу. Для его получения достаточно одних уравнений Максвелла, записанных в искривленном пространстве–времени и условия $T_{\theta\theta} = T_{\varphi\varphi}$, накладываемого на компоненты тензора энергии–импульса ЭМВ, которое выполняется в силу изотропии пространства. Это фактически и было проделано в [4]. Ввиду того, что $r_c \sim \lambda \gg r_s$ (λ – длина волны ЭМВ), это слагаемое, имеющее дифракционную природу, на больших расстояниях является главным в (9).

2. Поведение светового луча в искривленной метрике

Поскольку метрика (9) для не слишком малых расстояний формально совпадает с метрикой Шварцшильда, можно использовать последнюю для получения выражений, описывающих поведение светового луча. Например, для рассеяния луча на малые углы получим формулу для угла отклонения:

$$\delta\mathcal{G} = 2 \frac{r_c}{\rho}, \tag{10}$$

которая следует из известного выражения [5] после замены $r_g \rightarrow r_c$, ρ – прицельное расстояние, связанное с моментом падающего луча M соотношением $\rho = Mc/\omega$ (точнее, $\rho = Mc/\hbar\omega$ ($\hbar = 1$)). Для сечения захвата луча искривленной метрикой можно было бы использовать известное выражение [5]:

$$\sigma_* = \frac{27}{4} \pi r_c^2. \tag{11}$$

Однако в формулах (10) и (11) не учтено влияние амплитуды ЭМВ и тем самым не учтено влияния ее гравитационного поля. Это заставляет по-новому взглянуть на результаты работ [4, 6]. Действительно, как уже отмечалось в [6], результаты [4] получены только с использованием уравнений Максвелла, которые исследовались в криволинейном пространстве–времени. Следствием этого является то, что метрика (2) не зависит от гравитационной постоянной K . Это означает, что искривление пространства–времени, описыва-

емое метрикой (2), связано с другими причинами, например с дифракцией. В пользу этого говорит то, что отличие метрики (2) от плоской обусловлено конечностью длины волны ЭМВ λ , когда $\lambda \rightarrow 0$ метрика (2) переходит в плоскую. То, что уравнения Эйнштейна при этом не столь важны, не должно вызывать недоумения, поскольку, вообще говоря, метрика является более широким понятием, чем гравитация [9].

Чтобы обобщить выражения (10) и (11), учитывая в них влияние гравитационного поля ЭМВ, надо решить уравнения движения для светового луча в искривленном пространстве–времени, которое описывается метрикой (9). Опуская детали, которые являются повторением расчетов в [5], приведем окончательные выражения для зависимостей $r(t)$ и $\mathcal{G}(r)$, определяющих распространение светового луча в системе координат удаленного наблюдателя:

$$\begin{aligned} t &= \pm \frac{1}{c} \int \frac{dr}{e^{-\alpha} \sqrt{U(r)}}, \\ \mathcal{G} &= \int \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{U(r)}}, \\ U(r) &= 1 - \frac{\rho^2}{r^2} e^{-\alpha}, \end{aligned} \tag{12}$$

(t – время), которые переходят в известные шварцшильдовские выражения при $r_c \rightarrow r_g$ и $G \rightarrow 0$. Для вычисления угла отклонения, в случае его малости, учтем, что, как и в шварцшильдовском случае, при вычислении выражения для эйконала следует разлагать соответствующее выражение как по r_c так и по $r_s \ll r_c$. Тогда, следуя [5], получим:

$$\delta\mathcal{G} = \frac{2r_c}{\rho} \left[1 + \left(\frac{r_s}{r_c} \right)^2 \right]. \tag{10a}$$

Чтобы получить из (12) выражение для сечения захвата надо исследовать $U(r)$. Поведение $U(r)$ показано на рис. 1.

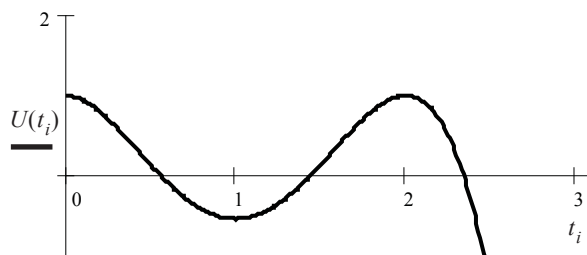


Рис. 1. Поведение $U(t)$, $t = r_c/r$. Параметры: $\rho/r_c = 2.48$, $r_c/r_s = 2$. Показаны точки поворота $t_1 < t_2 < t_3$. Для реальных значений $r_c/r_s \gg 1$ точка поворота t_3 смещается далеко вправо



Луч распространяется из бесконечности ($t = 0$) до точки поворота t_1 , определяемой уравнением $U(t_1) = 0$. Захват впервые происходит, когда точки поворота сливаются: $t_1 = t_2$ (вторая точка поворота t_2 расположена на рис. 1 справа от t_1). Прицельное расстояние ρ_* , на котором это имеет место, и определяет сечение захвата $\sigma_* = \pi\rho_*^2$. На рис. 2 приведены результаты расчета сечения захвата луча искривленной метрикой.

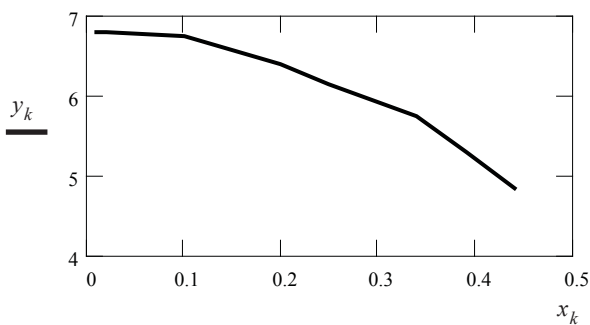


Рис. 2. Поведение сечения захвата ($y = (\rho_*/r_c)^2$) в зависимости от амплитуды ЭМВ ($x = r_s/r_c$). При $x = 0$ сечение захвата определяется формулой (11) (дифракционный предел, в принятых единицах $\sigma_* = 27/4 \approx 6.75$)

Приведенные результаты требуют пояснения. В предыдущих рассуждениях мы не учитывали точку поворота $t_3 \gg t_2 > t_1$. Это можно обосновать следующими соображениями. В координате r точкам поворота (в порядке убывания номеров и возрастания величин) соответствуют $\sqrt{\rho_s}$, r_c и ρ (значения приближенные). Между второй и третьей точками поворота r_c и $\sqrt{\rho_s}$ расположен горизонт $r_+ \approx r_c(1 - r_s^2/r_c^2)$, отделяющий внешнюю R -область от T -области. При захвате луча, когда первая и вторая точки поворота сливаются, луч достигает горизонта за бесконечное время по часам удаленного наблюдателя и не достигает третьей точки поворота.

3. Обсуждение результатов

Особенность интерпретации полученных результатов связана с проблемой перенесения методов теории рассеяния на рассматриваемую нелинейную задачу. Единственный способ интерпретации связан с задачей о поведении сферической ЭМВ в пространстве–времени, искривленном ею же самой, например с задачей о преобразовании сходящейся ЭМВ в расходящуюся. Несмотря на кажущуюся тривиальность, это непростая задача. Во всяком случае, просто

считать, что сходящаяся волна фокусируется в точке, из которой затем расходится как из источника, нельзя⁶. Это соответствовало бы полному пренебрежению искривлением пространства–времени за счет волны.

Все лучи сходящейся сферической волны можно разделить на рассеиваемые (для которых $\rho > \rho_*$) и захватываемые ($\rho \leq \rho_*$) метрикой (9). Напомним, что в работе [4] уравнения МЭ исследовались в системе координат, ось OZ которой была перпендикулярна полному моменту импульса волны, т.е. $J_z = 0$. В общем случае фаза сходящейся волны будет иметь вид $\Phi(r, \varphi) = -kr + m\varphi$, где φ – азимутальный угол, m – целое число в интервале $j \leq m \leq j$, определяющее проекцию момента волны на ось OZ . Вычисляя градиент фазы, легко определить прицельное расстояние луча, соответствующего участку фронта сферической волны с координатами r, θ, φ :

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{m}{\sqrt{m^2 + (kr)^2 \sin^2 \theta}} = \frac{m}{k \sin \theta} = r_c \frac{m}{l(l+1) \sin \theta}, \tag{13}$$

с учетом того, что $k = \omega/c$. Если мы введем угол θ_* соотношением

$$\sin \theta_* = \frac{r_c}{\rho_*} \frac{m}{l(l+1)}, \tag{14}$$

то для $\theta < \theta_*$ и $\pi > \theta > \pi - \theta_*$ соответствующий луч рассеется, т.е. уйдет на бесконечность, хотя и по другому направлению, и даст вклад в расходящуюся волну, а для $\pi - \theta_* \geq \theta \geq \theta_*$ луч захватится, т.е. не уйдет на бесконечность. Рассеянные лучи соответствуют точкам фронта сходящейся волны, вырезаемым на нем конусом, ось которого совпадает с осью OZ , а угол раствора равен $2\theta_*$. Этот угол весьма мал, в чем легко убедиться, например, для волн малой амплитуды, для которых $\rho_* = (27)^{1/2} r_c / 2$ и $\sin \theta_* \leq 2m / [(27)^{1/2} l(l+1)]$. Таким образом, почти все лучи, соответствующие участкам фронта сходящейся сферической волны, за исключением лучей, соответствующих участкам, прилегающим к оси OZ , окажутся захвачены метрикой (9). Если же $m = 0$, то захватятся все лучи. Захват означает, что луч, попав в область пространства–времени с достаточно большой

⁶ В первую очередь, это невозможно в силу волновых и квантовых свойств света. Существует так называемый дифракционный предел для фокусировки. Кроме того, фокусировка света в малом объеме приведет к неустойчивости вакуума.



кривизной согласно классической теории, никогда ее не покинет. Это явление напоминает поведение материи в окрестности черной дыры [5]. То, что у лучей света есть возможность покинуть область пространства–времени, кривизна которой обусловлена только электромагнитным полем, связано с наличием у уравнений Максвелла–Эйнштейна неволновых решений, отождествленных в [4] с инстантонами. Это означает, что перенос информации из прошлого в будущее с помощью сферических электромагнитных волн не может быть описан в рамках классической физики.

Одним из механизмов переноса информации из прошлого в будущее в данной модели, основанной на использовании метрики в форме (1), является преобразование сходящейся сферической ЭМВ в расходящуюся через промежуточное инстантонное состояние [4] с неизбежной потерей части информации в области, занятой инстантоном. В работе [4] вычислена квантовая вероятность такого процесса с квазиклассической точностью. В этом случае можно использовать выражение для метрики (2). Это согласуется с тем фактом, что амплитуда волны-носителя информации не играет роли в процессе передачи информации.

Все другие решения данной проблемы должны основываться на другом выражении для метрики, отличающемся от (1).

Заключение

В работе исследован вопрос о полноте информации, переносимой сферическими электромагнитными волнами (ЭМВ) от источника к приемнику, или, в более общей постановке, из прошлого в будущее. В качестве фактора, влияющего на полноту передаваемой информации, рассматривается искривление пространства–времени, вызванное самой ЭМВ. Более строго, чем в [4], рассмотрен вопрос об определении метрики пространства–времени. Еще раз продемонстрировано, что гравитационное поле ЭМВ можно

рассматривать как некую «среду», характеристики которой зависят от параметров волны, распространяющейся в ней.

Искривление пространства–времени за счет присутствия ЭМВ обусловлено как ее собственным гравитационным полем, так и причинами другой (дифракционной) природы. Это дополнительное искривление дает вклад в сечение захвата. На больших расстояниях дифракционный вклад в метрику является основным, и именно он определяет угол рассеяния светового луча при больших прицельных расстояниях.

Приведена возможная интерпретация полученных результатов.

Автор признателен [А. В. Прозоркевичу] и М. В. Давидовичу за обсуждения.

Список литературы

1. *Николис Дж.* Динамика иерархических систем. Эволюционное представление / пер. с англ. Ю. А. Данилова. М. : Мир, 1989. 486 с.
2. *Реньи А.* Дневник. Записки студента по теории информации // Трилогии о математике / пер. с венг. ; под ред. Б. В. Гнеденко. М. : Мир, 1980. 376 с.
3. *Бронников К. А., Рубин С. Г.* Лекции по гравитации и космологии : учеб. пособие. М. : МИФИ, 2008. 460 с.
4. *Зайко Ю. Н.* Точные решения уравнений Максвелла–Эйнштейна // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 50–58.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М. : Наука, 1967. 460 с.
6. *Зайко Ю. Н.* Точные решения уравнений Максвелла–Эйнштейна. II // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 25–31.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / пер. с нем. С. В. Фомина. М. : Наука, 1971. 576 с.
8. *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология / пер. с англ. ; под ред. Я. А. Смородинского. М. : Мир, 1974. 520 с.
9. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности / пер. с англ. ; под ред. Я. А. Смородинского. М. : Мир, 1975. 696 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Полученное выше выражение для метрики (9) будет справедливым, если мы покажем, что уравнение (4) для функции $f(r, x^0)$ с метрикой (9) допускает решения, обеспечивающие совместность двух уравнений (3), которая, как было показано выше, обусловлена постоянством модуля $f(r, x^0)$. Запишем его для $f(r, x^0) = f(r) \exp(i\omega x^0/c)$:

$$t^4 f'' + 2t^3 f' + \left[\left(1 - \frac{t}{q} + t^2 \right)^{-2} q^2 l(l+1) + t^2 \left(1 - \frac{t}{q} + t^2 \right)^{-1} \right] l(l+1) f = 0, \quad (\text{П1})$$

$$f' = \frac{df}{dt}, \quad t = \frac{r_s}{r}, \quad q = \frac{r_s}{r_c}.$$



Представляя его решение в виде $f = F \exp(i\varphi)$, получим уравнения для амплитуды (модуля) F и фазы φ :

$$(2\varphi'F' + \varphi''F)t + 2\varphi'F = 0$$

$$t^4 [F'' - (\varphi')^2 F] + 2t^3 F' + \left[\left(1 - \frac{t}{q} + t^2\right)^{-2} q^2 l(l+1) + t^2 \left(1 - \frac{t}{q} + t^2\right)^{-1} \right] l(l+1)F = 0. \quad (\text{П2})$$

Первое уравнение для фазы интегрируется и дает $\varphi' = \text{const}/F^2 t^2$, где значение константы определяется через значение модуля $F(t=0) = F_0$ (т.е. при $r \rightarrow \infty$): $\text{const} = F_0^2 q l(l+1)$. Подставляя полученное решение во второе уравнение (П2), получим уравнение для F :

$$t^4 F'' + 2t^3 F' + \left[\left(1 - \frac{t}{q} + t^2\right)^{-2} q^2 l(l+1) + t^2 \left(1 - \frac{t}{q} + t^2\right)^{-1} \right] l(l+1)F = \frac{\text{const}^2}{F^3}, \quad (\text{П3})$$

которое можно исследовать только численно. Результаты численного анализа этого уравнения показывают, что $F(t)$ слабо меняется на интервале $0 < t < 1$ и выходит на постоянное значение при $t \rightarrow 1$. Численную оценку вариации $F(t)$ при $t \sim 1$ можно получить, оценивая величину производной dF/dr на масштабах порядка r_s . Согласно расчетам $dF/dr \cdot r_s \sim 10^{-5}$ для $F_0 = 1, F_0' = 0, q = 10^{-8}, l = 2$.

УДК 538.56:519.25

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ СТАЦИОНАРНОСТИ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА, ИМЕЮЩЕГО В СВОЕЙ СТРУКТУРЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ДИХОТОМИЧЕСКИЙ ШУМ С ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭРЛАНГА ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ПАРАМЕТРЫ, СВЯЗАННЫЕ ПРОПОРЦИЕЙ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ



О. Л. Сироткин

«ОКБ Приборостроения», Саратов
E-mail: maxbor111@gmail.com

Целью данной работы является исследование условий существования стационарных моментов случайного процесса, динамика которого описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка с флуктуациями одного из коэффициентов в виде немарковского дихотомического шума, имеющего произвольное время корреляции. Показано, что реализация стационарности моментов зависит от того, будут или нет параметры динамической системы и дихотомического шума связаны пропорцией золотого сечения.

Ключевые слова: золотое сечение, распределение Эрланга, принцип двойственности, уравнения Колмогорова.

Investigating Stationary Conditions for Moments of Stochastic Process, Driven by Multiplicative Dichotomous Noise and Featuring Erlang First-order Distribution Function, Conditions Related by Golden Ratio

O. L. Sirotkin

Conditions for the existence of stationary moments of a stochastic process, satisfying a linear differential stochastic first-order equation, comprising a coefficient, subjected to non-Markov dichotomous noise fluctuations with an arbitrary correlation time, are investigated.

It is shown that the existence of stationary moments is related to the golden ratio tying the parameters of the dynamic system and dichotomous noise.

Key words: golden section, Erlang distribution, duality principle, Kolmogorov equations.

Введение

Поиск законов гармонии в исследуемых процессах составляет одну из интересных задач физики. Как правило, эта идея связана с понятием золотого сечения, т.е. числами $0,5(1 + \sqrt{5}) \approx 1,6180$ или $0,5(\sqrt{5} - 1) \approx 0,6180$.

Р. Фейман обнаружил, что золотая пропорция даёт минимальное энергетическое состояние молекулы бутадиена [1]. В области термодинамики, цикл Карно, максимальное значение коэффициента полезного действия холодильной и тепловой машины одновременно равно 0,6180 [2]. В теории электрослабых взаимодействий есть отношения, совпадающие с золотым сечением [3].