



Заключение

В работе рассмотрена квантовая немарковская релаксация для двухуровневого атома во внешнем лазерном и системы из двух идентичных взаимодействующих атомов в приближении короткой памяти.

В случае одиночного атома показано, что учет эффектов памяти приводит к смещению максимума спектральной линии. Смещение зависит от постоянной распада и деформирует спектр флуоресценции атома во внешнем поле.

В приближении короткой памяти построено немарковское обобщение операторного кинетического уравнения для двух идентичных диполь-дипольно взаимодействующих атомов. На основе решения полученного уравнения аналитически построен контур линии излучения. Показано, что немарковость приводит к его заметным деформациям. Данный факт может наблюдаться в прецизионных экспериментах с атомами в ловушках.

Заметим, что полученное немарковское квантовое кинетическое уравнение сохраняет все привлекательные черты соответствующего марковского уравнения, а именно сохраняется след матрицы плотности и ее эрмитовость. Выведенное уравнение имеет достаточно простую структуру по сравнению с традиционными немарковскими уравнениями, что позволило найти его аналитические решения и рассчитать двухвременные атомные корреляторы в случае одного и двух двухуровневых атомов.

Список литературы

1. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
2. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высш. шк., 1990. 376 р.
3. Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semi-groups // Commun. Math. Phys. 1976. Vol.48, №2. P.119–130.
4. Budini A.A. Stochastic representation of a class of non-Markovian completely positive evolution // Phys. Rev. A. 2004. Vol.69. P.042107(1)–042107(12).
5. Shabani A., Lidar D.A. Completely positive post-Markovian master equation via a measurement approach // Phys. Rev. A. 2001. Vol.71. P.020101(R)1–020101(R)4.
6. Gainutdinov R. Kh. Nonlocal interaction and quantum dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol.32. P.5657–5678.
7. Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003. 512 с.
8. Gangopadhyay G. Ray D. Non-Markovian master equation for linear and nonlinear systems // Phys. Rev. A. 1992. Vol.46, №3. P.1507–1515.
9. Breuer H.-P., Petruccione F. The Theory of Open Quantum Systems. Oxford: Oxford University Press, 2002. 630 p.
10. Lax M. Noise. XI. Multitime correspondence between quantum and classical stochastic processes // Phys. Rev. 1968. Vol.172. P.350–361.
11. Budini A.A. Open quantum system approach to single-molecule spectroscopy // Phys. Rev. A. 2009. Vol.79. P.043804(1-17).
12. Kurizki G., Ben-Reuven A. Theory of cooperative fluorescence from products of reactions or collisions: identical neutral atomic fragments // Phys. Rev. A. 1987. Vol.36. P.90–102.
13. Gangopadhyay G. Non-Markovian master equation for linear and nonlinear systems // Phys. Rev. A. 1992. Vol.46. P.1507–1515.
14. Breuer H.-P., Petruccione F. The Theory of Open Quantum Systems. Oxford: Oxford University Press, 2002. 645 p.
15. Горохов А.В., Семин В.В. Расчет спектра флуоресценции для двух взаимодействующих атомов // Оптика и спектроскопия. 2009. Т.107, №4. С.617–622.

УДК 533.9, 539.1

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ МГНОВЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ПОЛЯ В КИНЕТИКЕ ВАКУУМНОГО РОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ

Д.Б. Блашке, В.В. Дмитриев*, П.И. Смолянский*, С.А. Смолянский*, А.В. Чертилин*

Институт теоретической физики, Вроцлав, Польша.

Лаборатория теоретической физики ОИЯИ им. Н.Н. Боголюбова, Дубна, Россия

* Саратовский государственный университет

E-mail: smol@sgu.ru

Получено точное решение непertурбативных кинетических уравнений, описывающих вакуумное рождение фермионных и бозонных пар в линейно-поляризованном мгновенно включаемом электрическом поле. Показано, что найденные распределения нормированы, в отличие от случая произвольно зависящих от времени внешних полей. Найдены соответствующие перенорми-

рованные функции распределения. Полученные результаты могут быть использованы для вычисления верхних оценок наблюдаемых величин порожденной из вакуума плазмы под действием более реалистических коротких импульсов электрического поля.
Ключевые слова: вакуумное рождение, электрон-позитронная плазма, кинетическое уравнение, эффект Швингера.





Exactly Solvable Model of Instantaneously Switched-On Field In the Kinetics of Vacuum Particle Creation

D.B. Blaschke, V.V. Dmitrlev, P.I. Smolyansky, S.A. Smolyansky, A.V. Chertlin

Exact solutions of the nonperturbative kinetic equations for the description of fermion and boson pair creation in the vacuum are obtained for the case of a linearly polarized instantaneously switched-on electric field. The corresponding momentum distributions are non-integrable. The renormalized distribution functions are also found. The obtained results can be used as estimates for upper limits of different vacuum pair creation effects in the more realistic case of short electric field pulses.

Key words: vacuum creation, electron-positron plasma, kinetic equation, Schwinger effect.

Введение

В настоящей работе мы рассматриваем точно решаемую модель вакуумного рождения электрон-позитронных или бозон-антибозонных пар в переменном пространственно-однородном электрическом поле линейной поляризации $\vec{A}(t)(0,0, A(t))$, которое включается мгновенно,

$$A(t) = [E_0/v]\theta[v(t - t_0)], \quad (1)$$

где v – масштабный фактор, обсуждаемый ниже, а θ – функция Хевисайда, доопределенная таким образом, что $\theta(0) = 1$ (см., например, [1]). Напряженность электрического поля будет иметь тогда δ -образный характер,

$$E(t) = -\dot{A}(t) = E_0\delta[v(t - t_0)], \quad (2)$$

что и обеспечивает возможность точного решения соответствующего кинетического уравнения (КУ) [2]. Подобная модель включения поля была рассмотрена в ранней космологии [3] в связи с проблемой вакуумного рождения массивных векторных бозонов в рамках так называемого инерциального механизма [4] вакуумной генерации частиц в модели с мгновенным включением массы покоя.

Вне проблематики, связанной с вакуумным рождением частиц, модель (2) неоднократно использовалась ранее при описании взаимодействия систем, состоящих из заряженных частиц (плазмы, атомов), с электромагнитным полем (см., например, [5] и имеющиеся там ссылки).

Особенностью подобных моделей в теории вакуумного рождения частиц является отсутствие промежуточной стадии эволюции, когда действует внешнее поле и вакуумные возбуждения имеют квазичастичный характер; здесь в результате мгновенного действия поля (2) сразу генерируются наблюдаемые частицы [6]. Другими словами, in-вакуумное состояние мгновенно переходит в out-состояние.

Неожиданным результатом является отсутствие в рассматриваемой модели порогового критического поля, характерного для точных решений КЭД в случае постоянных полей (см., например, [7]). По-видимому, это связано с тем, что вакуумное возбуждение частиц здесь обусловлено многофотонными процессами в импульсе (1), (2) (в отличие от туннельной интерпретации эффекта в случае постоянного электрического поля). В этом смысле модель вакуумного рождения в поле (1), (2) является альтернативой к модели Заутера–Гейзенберга–Эйлера–Швингера [8]. В промежуточном случае действуют оба механизма.

Ниже использована система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Точные решения КУ и их свойства

В случае линейно поляризованного электрического поля КУ, предназначенные для описания вакуумного рождения бозонных либо фермионных пар, были получены в работах [9, 10]:

$$f(\vec{p}, t) = \frac{1}{2}\lambda(\vec{p}, t) \times \int_{t_0}^t dt' \lambda(\vec{p}, t') [1 \pm 2f(\vec{p}, t')] \cos \theta(\vec{p}, t, t'). \quad (3)$$

Знаки (\pm) в статическом факторе соответствуют бозонам (+) и фермионам (–). Амплитуда вакуумного перехода в наблюдаемое состояние для фермионов и бозонов равна соответственно

$$\lambda(\vec{p}, t) = \lambda_f(\vec{p}, t) = \frac{eE(t)\epsilon_{\perp}}{\omega^2(\vec{p}, t)}, \quad (4)$$

$$\lambda(\vec{p}, t) = \lambda_b(\vec{p}, t) = \frac{eE(t)P(t)}{\omega^2(\vec{p}, t)}. \quad (5)$$



Здесь e – заряд электрона со своим знаком,

$$\omega(\vec{p}, t) = \sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 + P^2(t)}, \varepsilon_{\perp} = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2}, \quad (6)$$

$P = p^3 - eA(t)$ – «продольная» компонента кинематического импульса, ε_{\perp} – «поперечная» энергия. Наконец,

$$\theta(\vec{p}, t, t') = 2 \int_{t'}^t d\tau \omega(\vec{p}, \tau) \quad (7)$$

– высокочастотная фаза.

Для численного решения задач с КУ (3) удобна эквивалентная (3) система ОДУ

$$\dot{f} = \frac{1}{2} \lambda u, \dot{u} = \lambda(1 \pm 2f) - 2\omega v, \dot{v} = 2\omega u. \quad (8)$$

Предполагается, что функция $f(\vec{p}, t)$ имеет смысл функции распределения числа частиц с заданными импульсами. Тогда интеграл (плотность числа частиц)

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p f(\vec{p}, t) \quad (9)$$

должен быть сходящийся (в (9) g – фактор вырождения по спиновым степеням свободы: $g = 1$ для бозонов и $g = 2$ для фермионов). Полное число частиц и античастиц будет равно $2n(t)$.

Как следует из КУ (3), функция $f(\vec{p}, t)$ при действии поля (1), (2) имеет ступенчатый вид (при нулевом начальном значении)

$$f(\vec{p}, t) = F(\vec{p}) \vartheta[v(t - t_0)], \quad (10)$$

$$F(\vec{p}) = \frac{\Lambda^2(\vec{p})}{2[v^2 \mp \Lambda^2(\vec{p})]}, \quad (11)$$

верхний и нижний знаки соответствуют бозонам и фермионам. Согласно (2), (4), (5)

$$\lambda(\vec{p}, t) = \Lambda(\vec{p}) \delta[v(t - t_0)], \quad (12)$$

$$\Lambda_f(\vec{p}) = \frac{eE_0 \varepsilon_{\perp}}{\omega_0^2}, \Lambda_b(\vec{p}) = \frac{eE_0 P_0}{\omega_0^2}, \quad (13)$$

а ω_0 – энергия частицы при включенном поле (т.е. при $t > t_0$),

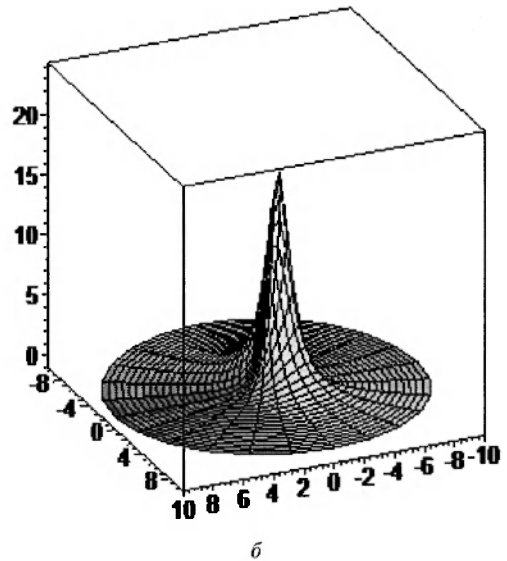
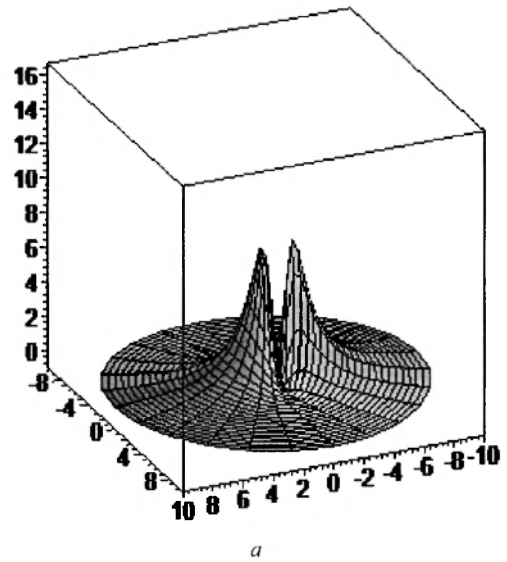
$$\omega_0 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}^2 + P_0^2}, P_0 = P(t_0) = p^3 + e \frac{E_0}{v}. \quad (14)$$

Запишем (13) в безразмерных переменных:

$$\frac{\Lambda_{\pm}}{m} = \frac{\varepsilon \pi_{\pm}}{1 + \pi_{\perp}^2 + \pi_{\parallel}^2}, \quad (15)$$

где $\varepsilon = E_0/E_c$, $E_c = m^2/e \cong 10^{16}$ В/см – критическое поле; $\pi_{\perp} = \varepsilon_{\perp}/m$, $\pi_{\parallel} = P_0/m$ и $a = f, b$, причем $\pi_a = \pi_f = \pi_{\perp}$ и $\pi_a = \pi_b = \pi_{\parallel}$.

На рисунке показаны бозонное и фермионное распределения для $E = 0.75E_c$, где критическое значение поля $E = E_c = m^2/|e|$ характерно для точных решений уравнений КЭД в постоянном поле.



Бозонное (а) и фермионное (б) распределения для $E = 0.75E_c$



Был зафиксирован масштабный фактор, $v = m$: в КЭД это единственный параметр с необходимой размерностью. Полученные распределения воспроизводят на качественном уровне распределения, характерные для нестационарного векторного потенциала в форме Заутера (см., например, [11]).

Нетрудно получить асимптотику распределений (11), (13) при больших импульсах. Пусть $|p^3| > |eA(t)|$ и $p > m$. Тогда $p^3 = p \cos \vartheta$ и $p_\perp = p \sin \vartheta$, так что (ϑ – полярный угол)

$$F_f(\vec{p}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left[1 - x \frac{E_0}{E_c} \cos \vartheta \right] \sin^2 \vartheta = F_f^\infty(\vec{p}), \quad (16)$$

$$F_b(\vec{p}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left(\cos \vartheta - 2x \frac{E_0}{E_c} \cos 2\vartheta \right) \cos \vartheta = F_b^\infty(\vec{p}). \quad (17)$$

Здесь учтены первых два лидирующих члена асимптотических рядов, устраняющие линейную и логарифмическую расходимость в интеграле (9), $x = m/p$. Вклады в интегралы (9) от последних слагаемых с x^3 зануляются в результате интегрирования по углам.

Таким образом, степень убывания на бесконечности обоих распределений недостаточна, чтобы обеспечить сходимость интеграла (9). Другими словами, распределения $F_f(\vec{p}, t)$ и $F_b(\vec{p}, t)$ не интегрируемы и, следовательно, не являются, строго говоря, функциями распределения.

Чтобы оценить степень уникальности такой ситуации, рассмотрим асимптотику функции $f(\vec{p}, t)$ при больших импульсах для линейно поляризованного поля с произвольной зависимостью от времени потенциала $A(t)$. Для этого воспользуемся методом асимптотических разложений [12] входящих в систему ОДУ (8) функций. Например, для функции $f(\vec{p}, t)$ в области $p \rightarrow \infty$ имеем

$$f(\vec{p}, t) = \sum_{n=1} f_n(t) \frac{1}{p^n}. \quad (18)$$

Подставляя это и аналогичные разложения функций $u(\vec{p}, t)$ и $v(\vec{p}, t)$ в систему (8), по-

лучим систему зацепляющихся уравнений для коэффициентов разложения типа (18). В лидирующем приближении отсюда находим при нулевых начальных условиях

$$f_4(t) = \lambda_0^2(t)/2,$$

где

$$\lambda_0^f(t) = eE(t) \sin \vartheta, \quad \lambda_0^b(t) = eE(t) \cos \vartheta \quad (19)$$

для фермионов и бозонов соответственно. Таким образом, в общем случае в КЭД степень убывания на бесконечности функции $f(\vec{p}, t)$ достаточна, чтобы обеспечить сходимость интеграла (9) и интегрировать $f(\vec{p}, t)$ как функцию распределения (по сути, такая ситуация давно известна (см., например, [11])). С другой стороны, асимптотики (16), (17) соответствуют реальным частицам, остающимся после выключения поля (2), тогда как асимптотика (1) получена в квазичастичной области действия поля $A(t)$. Таким образом, в последнем случае предполагается, что характер асимптотики остается неизменным при выключении поля $A(t)$.

Резкое (не адиабатически медленное) включение поля связано с появлением высших гармоник поля, которые приводят к завышенному результату. В частности, это означает, что рассматриваемая модель, основанная на мгновенном включении поля (1), (2), может претендовать на верхнюю оценку наблюдаемых величин по сравнению с результатами более реалистических моделей внешнего поля, в частности ультракороткого лазерного импульса [5].

Соответствующие функции распределения могут быть получены из распределений (10), (11), (13) путем регуляризационной процедуры, основанной на удалении лидирующих вкладов (16), (17) в ультрафиолетовой области:

$$f(\vec{p}) = F(\vec{p}) - F^\infty(\vec{p}) [1 - \exp(-p^2/m^2)]. \quad (20)$$

Обрезающий фактор здесь введен для того, чтобы контрчлены $F^\infty(\vec{p})$ «работали» только при $p^2 > m^2$.

Отсутствие промежуточной (квазичастичной) стадии эволюции в рассматриваемой модели приводит к выключению квантовых осцилляций с высокочастотной фазой (7) и



понижению порядка системы ОДУ (8): она замещается системой $\dot{f} = \lambda u/2$, $\dot{u} = \lambda(1 \pm 2f)$, т.е. $v = 0$.

Асимптотики (16), (17) приводят к линейной расходимости плотности числа частиц (9), которая представляет собой минимальный (нулевой) момент функции распределения. При вычислении других макроскопических величин (плотности тока, энергии, давления) степени расходимости соответствующих интегралов увеличиваются (например, появляется квадратичная расходимость в плотности тока проводимости). Остается открытым вопрос о физической обоснованности регуляризационной процедуры в подобных случаях ультрафиолетовой расходимости степенного типа. Заметим, что при мгновенном включении поля (1), (2) плотность тока также, по-видимому, будет сингулярна (при конечной перенормированной проводимости), и становится необходимым учет обратной реакции.

Заключение

Полученные в работе аналитические решения (10), (11), (13) сложных интегрально-дифференциальных КУ типа (3) очень удобны для получения верхних оценок наблюдаемых физических величин электрон-позитронной и бозон-антибозонной плазмы, генерируемой из вакуума под воздействием коротких импульсов электрического поля. Достаточно сказать, что при компьютерных вычислениях возникают трудности при «больших» временах $t > 1/m$, которые отсутствуют в аналитических решениях. Это открывает новые перспективы как при оценках конкретных эффектов в линейно поляризованных электрических полях, так и в случае полей произвольной поляризации [14], когда неустойчивую роль начинают играть спиновые эффекты и число ОДУ с трех уравнений (8) увеличивается до 16-ти. Ситуация еще больше усложняется при кинетическом описании партонной плазмы в области сильно неравновесной эволюции на ранних стадиях формирования кварк-глюонной плазмы при столкновении ультрарелятивистских тяжелых ионов [15]. Здесь модель мгновенного включения глюонного поля также может оказаться полезной.

Мы показали, что в КЭД в случае линейной поляризации поля лидирующие члены асимптотических разложений точного решения со ступенчатым включением взаимодействия и функции распределения, удовлетворяющей КУ (3), различаются и необходимо использовать регуляризационную процедуру для восстановления интегрируемости распределения (10), (11). Было бы интересно сравнить разобранный случай с другими способами возбуждения вакуума (присутствие магнитного, цветового или гравитационного поля, инерциальный механизм).

Авторы благодарны М.В. Давидовичу за полезные замечания.

Список литературы

1. Doetsch G. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace Transformation. Munchen: Springer, 1967. 198 p.
2. Pervushin V.N., Skokov V.V., Reichel A.V., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V. The kinetic description of vacuum particle creation in the oscillator representation // Intern. J. Mod. Phys. A. 2005. Vol.20. P.5689.
3. Смолянский С.А., Блашке Д.Б., Дмитриев В.В. Вакуумное рождение Z. W бозонов в ранней Вселенной как дополнительный источник реликтового излучения // Тр. II Всерос. школы-семинара GRACOS 2009 «Современные проблемы теории гравитации и космологии» / Под ред. Ю.Г. Игнатъева. Казань: Фолиант, 2009. С.130.
4. Filatov A.V., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Toneev V.D. Inertial mechanism: dynamical mass as a source of partial creation // ЭЧАЯ. 2008. Т.39. С.886.
5. Popov Yu.V., Kouzakov K.A., Vinitzky S.I., Gusev A.A. Interaction of Attosecond Electromagnetic Pulses with Atoms: the Exactly Solvable Model // ЯФ. 2007. Т.70. С.629–634.
6. Смолянский С.А., Блашке Д.Б., Тараканов А.В., Шмидт С.М. Вакуумное рождение в сильных полях: статистические аспекты // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т.17, №5. С.17.
7. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепененко В.М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоиздат, 1988.
8. Sauter F. Über das Verhalten eines electrons im homogenen elektrischen field nach der relativistische theory Dirac // Z. Phys. 1931. Vol.69. P.742.
9. Schmidt S.M., Blaschke D.B., Ropke G., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V. A quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism // Intern. J. Mod. Phys. 1998. Vol.7. P.709.
10. Kluger Y., Mottola E., Eisenberg J.M. The quantum Vlasov equation and its Markov limit // Phys. Rev. 1998. Vol.D58. P.125015.
11. Винник Д.В., Мизерный В.А., Prozorkevich A.V., Смолянский С.А., Тонеев В.Д. Кинетическое описание вакуумного рождения частиц при столкновениях релятивистских ядер. Препринт ОИЯИ, 2000. №P2-2000-85.

