

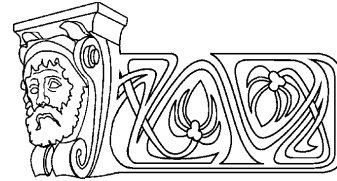


УДК 621.372.8:537.876.46

ПОЧЕМУ НЕ МОЖЕТ БЫТЬ ИСПОЛЬЗОВАН ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

М. В. Давидович

Саратовский государственный университет
E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru



Показано, что используемый в оптике и электродинамике сплошных изотропных сред показатель преломления n (индекс рефракции, коэффициент замедления) для левосторонних метаматериалов и вообще сред с отрицательной рефракцией нельзя ввести единым образом и считать его действительным, а в особенности отрицательным. Данный коэффициент в указанных средах вообще вводить нецелесообразно.

Ключевые слова: показатель преломления, индекс рефракции, коэффициент замедления, метаматериалы, фотонные кристаллы, дисперсия, отрицательная рефракция, левые среды.

Why the Refractive Index Couldn't Be Negative

M. V. Davidovich

It had been shown that for left-handed metamaterials and generally for negative refraction media the refraction index could not be introduced uniformly and could not be considered as real, especially as negative. This index for above referred media is not expedient.

Key words: refractive index, retardation coefficient, negative refraction, left-handed media, metamaterials.

В литературе широко распространено мнение, согласно которому у левых сред, обладающих отрицательной рефракцией, отрицателен и показатель преломления. В 1967 г. В.Г. Веселаго опубликовал работу, где рассмотрел свойства среды (которую он назвал левой) со скалярными действительными одновременно отрицательными проницаемостями ε и μ [1]. Для бесконечной в двух направлениях (x, y) пластины из такого материала конечной в направлении оси z толщины d он исследовал геометрическую (лучевую) дифракцию и нашел аномальный закон преломления типа закона Снеллиуса (Снелля), а также и некоторые другие аномальные эффекты: Допплера, Вавилова–Черенкова, светового давления. С 80-х по 90-е гг. прошлого века усиленно начало развиваться направление исследования искусственных сред (ИС), которые изучались еще в 40–50-х гг. и тогда назывались искусственными диэлектриками [2–8]. Затем за такими ИС закрепилось наиболее общее название – метамате-

риалы. В 1990-е гг. стали широко исследоваться периодические метаматериалы с проволочными включениями различной формы (wire media), получившие затем название металлических фотонные кристаллы (ФК). В 2000 г. Д. Пендри опубликовал статью [9], в которой утверждал, что линза Веселаго (далее в литературе часто называемая идеальной линзой Пендри) преодолевает дифракционный предел. Однако рассмотрение Пендри основано на грубых ошибках (см., например, [6–8, 10–19] и дискуссию в них). После публикации [2] и аналогичных ей, включая и экспериментальные работы [20], окончательно утвердились такие понятия, как среда Веселаго (Veselago medium), двойные отрицательные материалы (double negative materials – DNM, DNG), среды обратной волны (backward media), левые (левосторонние) среды (left-handed media – LHM), проволочные фотонные кристаллы (wire photonic crystals), сложные среды (complex media), среды с отрицательной групповой скоростью (NGV), среды с отрицательным индексом рефракции (показателем преломления) n и ряд других, а число публикаций по данному вопросу растет лавинообразно. Хотя термин «отрицательная рефракция» вполне устоявшийся и был известен давно [5–8, 18, 21, 22], а указанное явление имеет место также в замедляющих системах, кристаллах, диэлектрических ФК, где направление переноса энергии плоской монохроматической волной может составлять тупой угол с направлением движения фазы, термин «отрицательный показатель преломления» (коэффициент замедления, коэффициент рефракции), на наш взгляд, неправильный. Далее будет показано, почему он не может быть отрицательным и почему его вообще нецелесообразно вводить в средах с отрицательной рефракцией. Кста-



ти, в ряде работ вместо него наряду с термином «отрицательная рефракция» используется термин «отрицательное преломление» [18] или «отрицательные среды» [22], а в работах [5–8, 18] и ряде других дана история исследований отрицательной рефракции, восходящая к более ранним работам Лэмба (1904), Лауэ (1905), Мандельштама (1940), к работам, связанным с лампами и антеннами обратной волны.

Бытует мнение, что для левосторонних сред с $\varepsilon < 0$, $\mu < 0$ можно извлечь квадратный корень так: $n = -\sqrt{\varepsilon\mu}$, т.е. у них отрицательный коэффициент замедления (показатель преломления, индекс рефракции). Рассмотрим, как получается n . В своей работе [1] В.Г. Веселаго изначально исходит из дисперсионного уравнения (ДУ) для анизотропной среды [1]:

$$\det A = 0, \quad A_{ik} = \omega^2 \hat{\varepsilon}_{ii} \hat{\mu}_{ik} / c^2 - \bar{k}^2 \delta_{ik} + k_i k_k. \quad (1)$$

Обозначая $k_0^2 = \omega^2 / c^2$, кроме (1) можно, вообще говоря, использовать и уравнение

$$\det B = 0, \quad B_{ik} = k_0^2 \hat{\mu}_{ii} \hat{\varepsilon}_{ik} - \bar{k}^2 \delta_{ik} + k_i k_k. \quad (2)$$

Далее В. Г. Веселаго предполагает среду изотропной и записывает ДУ (1) так:

$$\bar{k}^2 - k_0^2 n^2 = 0, \quad n^2 = \varepsilon\mu. \quad (3)$$

Из уравнения (3) он определяет n и вводит показатель преломления в уравнения Максвелла, чего в общем случае делать не стоит, поскольку в этих уравнениях изначально присутствуют $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ (либо используются более сложные материальные уравнения). Введение n может быть целесообразным в оптике изотропных сред. Однако ДУ (1) и (2) есть уравнения для определения дисперсии, т.е. зависимости $\bar{k} = \bar{k}(k_0)$, или обратной зависимости $k_0 = k_0(\bar{k})$. Если плоская волна распространяется вдоль оси z , т.е. $\bar{k} = \bar{z}_0 k_z$, то уравнение (3) дает два решения: $k_z^2 = k_0^2 \varepsilon\mu$, $k_z = \pm k_0 \sqrt{\varepsilon\mu}$, что соответствует прямой и обратной волнам, причем для корня следует брать арифметическое значение, т.е. при $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$ имеем $\sqrt{\varepsilon\mu} > 0$. Таким образом, выбор прямой или обратной волны

определяется знаком у k_z , а не у n . В общем случае диссипативных сред этот знак следует выбирать из условия $\text{Im}(k_z) < 0$ [22], т.е. волна с зависимостью $\exp(j\omega t - jk_z z)$ в среде затухает в направлении z переноса энергии. Последнее в диссипативных средах следует определять направлением вектора Пойнтинга [22–24], а не вектором групповой скорости, как это предлагается в большинстве работ. Такой выбор корня при $\varepsilon' < 0$ и $\mu' < 0$ дает обратную волну: $\text{Re}(k_z) < 0$. В изотропном случае оба рассмотрения [1] и настоящее эквивалентны, однако следует иметь в виду, что первичным в ДУ является зависимость $\bar{k} = \bar{k}(k_0)$, а не $n = n(k_0)$.

Все реальные левые среды (ЛНМ) являются бианизотропными с периодическими включениями определенных металлических элементов (обычно штырей и разомкнутых кольцевых резонаторов, Ω -элементов и т.п.). Электрофизические параметры метаматериала определяются путем гомогенизации [18, 25–38]. Последнюю желательно проводить на основе решения краевых задач определения дисперсии и полей для периодических структур (например, методом интегральных уравнений или плоских волн), затем на задании модели среды, например, в виде [37–39]

$$\begin{aligned} \bar{P}^e &= \varepsilon_0 (\hat{\varepsilon} - \hat{I}) \bar{E} + c^{-1} \hat{\zeta} \bar{H} = \varepsilon_0 \left[(\hat{\varepsilon} - \hat{I}) \bar{E} + Z_0 \hat{\zeta} \bar{H} \right], \\ \bar{P}^m &= \mu_0 (\hat{\mu} - \hat{I}) \bar{H} + c^{-1} \hat{\zeta} \bar{E} = \mu_0 \left[(\hat{\mu} - \hat{I}) \bar{H} + Z_0^{-1} \hat{\zeta} \bar{E} \right], \end{aligned}$$

и далее на определении параметров модели путем строгого или приближенного соответствия решения краевой задачи модели [37, 38]. Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$, \bar{P}^e и \bar{P}^m – усредненные по ячейке дипольные моменты (электрический и магнитный), черта над полями означает усреднение. Эффективные тензорные параметры $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\zeta}$, $\hat{\zeta}$ среды при гомогенизации зависят от метода усреднения и определены, вообще говоря, для диапазона, по крайней мере $\lambda > D$, где D – характерный размер, связанный с областью усреднения (например, период ячейки). Кроме вычисления средних дипольных моментов ячейки для гомогенизации можно использовать сравнение результатов строгих и модельных ДУ



метаматериала, а также сравнение результатов задач падения под произвольными углами плоских волн на границу раздела вакуум–метаматериал [2, 37, 40], поскольку в этом случае теорему погашения Эвальда–Озеена [35] можно доказать. Эффективные параметры следует подбирать так, чтобы минимизировать соответствующие среднеквадратичные невязки [37, 40]. Для усредненных (с чертой) полей запишем

$$\vec{E} = \vec{A} \exp(j\omega t + j\vec{k}\vec{r}), \quad \vec{H} = \vec{C} \exp(j\omega t + j\vec{k}\vec{r}). \quad (4)$$

В общем случае из уравнений Максвелла следует не (1), а матричное уравнение [37, 39]

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon} & \hat{k}/k_0 + \hat{\xi} \\ \hat{\xi} - \hat{k}/k_0 & \hat{\mu} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{A} \\ Z_0 \vec{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а также и ДУ в формах

$$\begin{aligned} & \left[(k_0^{-1}\hat{k} + \hat{\xi})\hat{\mu}^{-1}(k_0^{-1}\hat{k} - \hat{\xi}) + \hat{\varepsilon} \right] \vec{A} = 0, \\ & \left[(k_0^{-1}\hat{k} - \hat{\xi})\hat{\varepsilon}_e^{-1}(k_0^{-1}\hat{k} + \hat{\xi}) + \hat{\mu}_e \right] \vec{C} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

и в формах

$$\begin{aligned} & \det\left((k_0^{-1}\hat{k} + \hat{\xi})\hat{\mu}^{-1}(k_0^{-1}\hat{k} - \hat{\xi}) + \hat{\varepsilon}\right) = 0, \\ & \det\left((k_0^{-1}\hat{k} - \hat{\xi})\hat{\varepsilon}_e^{-1}(k_0^{-1}\hat{k} + \hat{\xi}) + \hat{\mu}_e\right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены тензоры кросс-поляризации $\hat{\xi}$, $\hat{\xi}$ и определены матрицы

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{k}^2 &= \begin{bmatrix} -k_z^2 - k_y^2 & k_x k_y & k_z k_z \\ k_x k_y & -k_z^2 - k_x^2 & k_x k_y \\ k_z k_z & k_x k_y & -k_y^2 - k_x^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из этих уравнений после гомогенизации и следует определять дисперсию $k_0 = f(\vec{k})$. Метаматериалы обладают пространственной дисперсией, т.е. их эффективные параметры являются нелокальными. Если есть два сорта включений, первые из которых дают вклад в основном в электрическую поляризацию, а вторые – в магнитную, причем они имеют слабую электромагнитную связь, то тензорами кросс-поляризации можно пренебречь: $\hat{\xi} = \hat{\xi} = 0$. Тогда

$$\left[\hat{k} \hat{\mu}^{-1} \hat{k} + k_0^2 \hat{\varepsilon} \right] \vec{A} = 0, \quad \left[\hat{k} \hat{\varepsilon}_e^{-1} \hat{k} + k_0^2 \hat{\mu}_e \right] \vec{C} = 0.$$

Если матрицы (7) коммутируют с обратным тензором $\hat{\mu}^{-1}$, то имеем

$$\left[\hat{k}^2 + k_0^2 \hat{\mu} \hat{\varepsilon} \right] \vec{A} = \left[\hat{k}^2 + k_0^2 \hat{n}^2 \right] \vec{A} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \sqrt{\hat{\mu} \hat{\varepsilon}} = \hat{n}' + j\hat{n}'' = \\ &= \sqrt{(\hat{\mu}' \hat{\varepsilon}' - \hat{\mu}'' \hat{\varepsilon}'') + j(\hat{\mu}'' \hat{\varepsilon}' + \hat{\mu}' \hat{\varepsilon}'')}. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае малых потерь имеем:

$$\hat{n} = \hat{n}' \left[1 + j(\hat{\mu}'' \hat{\varepsilon}' + \hat{\mu}' \hat{\varepsilon}'') / (2\hat{n}'^2) \right],$$

при этом

$$\hat{n}' = \text{Re}(\hat{n}) = \sqrt{\hat{\mu}' \hat{\varepsilon}'},$$

$$\hat{n}'' = \text{Im}(\hat{n}) = (\hat{\mu}'' \hat{\varepsilon}' + \hat{\mu}' \hat{\varepsilon}'') / (2\hat{n}'). \quad (9)$$

Оба тензора (9) положительно определенные.

Можно также ввести и тензор $\hat{n} = \sqrt{\hat{\varepsilon} \hat{\mu}}$. Для

того чтобы они совпали, проницаемости должны коммутировать. Если направления осей декартовой системы координат совпадают с направлениями граней кубических ячеек периодичности, а указанные металлические включения симметрично расположены на этих гранях, то имеем упрощения: $\hat{\varepsilon} = \varepsilon \hat{I}$, $\hat{\mu} = \mu \hat{I}$, $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$, $\mu = \mu' - j\mu''$, $\varepsilon'' > 0$, $\mu'' > 0$. В общем случае знак в (4) следует выбирать так, чтобы в направлении $\vec{n}_0 = (\vec{\Pi} + \vec{\Pi}^*) / |\vec{\Pi} + \vec{\Pi}^*|$ движения энергии поле

затухало. Здесь $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}^* / 2$. Если при диагональном тензоре \hat{n} положить $k_x = k_y = 0$,

то имеем два решения: $k_z = \pm k_0 \hat{n}_x$ и $k_z = \pm k_0 \hat{n}_y$.

Здесь знак в диссипативных средах также выбирается из условия затухания в сторону распространения энергии. Для гипотетической среды $\varepsilon = \mu = -1$ в идеальной линзе Весселаго–Пендри (ЛВП), которая не может быть физически реализована, имеем $k_z = -k_0 n$ (обратная волна), где $n = \sqrt{(-1)(-1)} = 1$, что получается предельным переходом $\varepsilon'' \rightarrow 0$, $\mu'' \rightarrow 0$. Упомянутая экзотическая среда $\varepsilon = \mu = -1$ (антивакуум) не может быть создана в виде металлических ФК, вопреки утверждениям в [41], и формально соответствует разреженной бесстолкновительной плазме электрических и магнитных зарядов (монополей) на низких частотах [41]. Разре-



женность необходима, чтобы не учитывать собственные поля плазмы, приводящие к гиротропии, пространственной дисперсии и столкновениям. Для плотностей токов электрической (e) и магнитной (m) поляризации, поддерживающих в гипотетическом веществе с $\varepsilon = \mu = -1$ волну, имеем $\vec{J}_p^e = -2j\omega\varepsilon_0\vec{E}$ и $\vec{J}_p^m = -2j\omega\mu_0\vec{H}$, т.е. поля и соответствующие им токи поляризации находятся в противофазе. Применяя теорему Пойнтинга в комплексной форме с рассмотрением токов поляризации в вакууме, что эквивалентно учету среды, получим для плотности собственной энергии поля W_{EM} :

$$W_{EM} = W_{EM}^e + W_{EM}^m = \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 / 4 + \mu_0 |\vec{H}|^2 / 4,$$

$$W_{EM} = W_{EM}^e + W_{EM}^m = \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 / 4 + \mu_0 |\vec{H}|^2 / 4,$$

а для запасенных реактивных мощностей в среде (электрической и магнитной) найдем

$$P_r^e = \vec{E}\vec{J}_p^{e*} / 2 = j\omega\varepsilon_0 |\vec{E}|^2,$$

$$P_r^m = \vec{J}_p^m \vec{H}^* / 2 = -j\omega\mu_0 |\vec{H}|^2.$$

Поэтому имеем $W_{EM}^e = W_{EM}^m$, а реактивные (запасенные) мощности среды (электрическая и магнитная) равны, и им соответствуют равные запасенные плотности электрической и магнитной энергий вещества: $W_{MED}^e = W_{MED}^m = W_{EM}$, поскольку в рассматриваемой среде $\vec{H} = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} \vec{E}$. Это означает, что полная плотность энергии поле–вещество есть $W = 3W_{EM}$, а скорость энергии в три раза меньше скорости света: $v_e = c/3$. Это же следует из формул работы [41] для групповой скорости в плазме электрических и магнитных монополей: $|\vec{v}_g| = c/3$, $\vec{v}_g = -\vec{v}_p/3$. Распространение волны вызывает токи поляризации среды, а те, в свою очередь, поддерживают волну. Именно нахождение их в противофазе приводит к обратной волне. Однако энергия и переносящие ее фотоны движутся в прямом направлении от источника, что не может приводить к отрицательному световому давлению, так как импульс поля переносится в направлении вектора Пойнтинга (в рассмотренном случае в направлении \vec{n}_0 оси z). Следует заметить,

что в wire media без потерь и в рассматриваемых гипотетических бесстолкновительных средах всегда имеются абсолютно упруго рассеянные фотоны, сдвинутые по фазе относительно поля и движущиеся в обоих направлениях. Однако результирующий перенос энергии и импульса осуществляется в положительном направлении, а в результате интерференции волн фаза бежит назад. В работе [42] в этой связи допущена очевидная ошибка. Поскольку монополи Дирака до сих пор не открыты, а бесстолкновительную плазму создать нельзя в принципе, подобные среды следует считать гипотетическими. Из уравнения (6) при аналогичных предположениях следуют ДУ, в которые входит эрмитово-сопряженный тензор \hat{n}^* . Трудности введения $n < 0$ обсуждаются в [36], а в работе [43] предложено всегда считать $n > 0$, выбирая соответствующие знаки в решениях ДУ, в формуле Снелля и в других формулах.

Модель среды можно взять и в форме, используемой в [18] с учетом возбуждения экситонов. Такая модель удобна для природных кристаллов или метаматериалов с наноразмерными включениями, когда усреднение по физически бесконечно малому объему уже не работает, а их собственные проницаемости и поверхностные импедансы использовать неправомерно. В [18] показано, что в этом случае $\varepsilon(\omega)$, а особенно $\mu(\omega)$ имеют ограниченный физический смысл.

Выводы

Итак, нет единого действительного показателя преломления. Обе величины \hat{n} и \hat{n}^* , которые в обычном смысле могут соответствовать n , комплексные, и более того – тензорные. Вообще даже двух комплексных тензоров \hat{n} и \hat{n}^* для описания левосторонних сред недостаточно, и надо использовать четыре тензора. В гипотетическом случае отрицательных проницаемостей $\varepsilon < 0$, $\mu < 0$ можно ввести один действительный положительный показатель преломления (коэффициент замедления или коэффициент рефракции) $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, выбирая знак у k_z , соответствующий обратной волне, поскольку именно k_z (а не n) есть результат решения простей-



шего одномерного ДУ. Тогда этот показатель преломления имеет смысл замедления $n = |k_z|/k_0 = |\vec{v}_p|/c$. Принцип Ферма для такой гипотетической среды имеет такой же вид, как и в [43] с той лишь разницей, что вместо отрицательного n следует использовать отрицательный путь, так как фаза движется вспять движению энергии. Изменением знака модифицируется и закон Снелля [43]. Если обычная оптическая линза в конечной полосе частот абсолютно прозрачна (не имеет потерь), то фазовая и групповая скорости в указанной полосе равны: $\vec{v}_p = \vec{v}_g$ [23, 24]. Поэтому все лучи в фокус линзы приходят в фазе с одинаковым групповым временем задержки $\tau_g = \tau_p = 1 / \int |\vec{v}_p| dl = [c \int ndl]^{-1}$. В случае же идеальной ЛВП при фокусировке поля нормально расположенного точечного диполя все лучи в фокус приходят в фазе (нулевой), но с разными временами групповых задержек, лежащих в бесконечном интервале $4d/c \leq \tau_g < \infty$. Линза не фокусирует точно точечный квазистационарный источник. Тем более она не фокусирует короткий импульс, излученный этим источником, что, в частности, констатируется в [44]. Расположенный нормально на расстоянии $l < d$ гармонический диполь должен для фокусировки действовать бесконечно долго. Для касательного точечного диполя даже в этом случае полной фокусировки нет, так как его поле азимутально несимметрично, и диполь не создает сходящуюся в точку сферическую волну как в нормальном случае [17]. Кстати, во всей имеющейся по ЛВП литературе рассматривается фокусировка только для нормального диполя. Заметим также, что при конечном d и расположении диполя на конечном расстоянии теорема погашения для ЛВП не доказана и, по-видимому, не может быть доказана без введения промежуточных слоев [39]. Поэтому диполь, расположенный на расстоянии $l < d$ к «идеально согласованной» ЛВП, создает отраженную квазисферическую волну тем более сильную, чем меньше l . Строгая волновая картина изображения реального объекта дается комбинацией трехмерного векторного спектрального, а также и

поверхностного (или объемного) интегралов от распределения источников по его поверхности (или в его объеме) по всевозможным пространственным спектральным переменным k_x, k_y, k_z в диапазонах $(-\infty, \infty)$, включая распространяющиеся под всеми углами и затухающие («эванесцентные») волны. Такое интегральное преобразование дает изображение, т.е. переносит значение источника из точки \vec{r}' объекта в точку \vec{r} его наблюдения, а ядро преобразования есть тензорная функция Грина слоя. При этом нет никакого преодоления дифракционного предела. Плотности энергии и импульса, а также скорости их переноса определяются соответственно результатам работы [45], при этом световое (электромагнитное) давление всегда положительное.

Список литературы

1. Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН. 1967. Т. 92, вып. 3. С. 517–526.
2. Левин Л. Современная теория волноводов. М., 1954. 216 с.
3. Brown W. F. Dielectrics. Handbuch der Physik XVII. Berlin, 1956.
4. Brown W. Artificial dielectrics // Progress in dielectrics. 1960. Vol. 2. P. 195–225.
5. Силин Р. А. Необычные законы преломления и отражения. М., 1999. 80 с.
6. Силин Р. А., Чепурных И. П. О средах с отрицательной дисперсией // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 10. С. 1212–1217.
7. Силин Р. А. Построение законов преломления и отражения с помощью изочастот // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 2. С. 186–191.
8. Силин Р. А. О средах с необычными квазиоптическими свойствами // Исследовано в России. 2002. С. 948–951 [Электрон. журн.]. URL: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/086.pdf>
9. Pendry J. B. Negative refraction makes a perfect lens // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85, № 18. P. 3966–3969.
10. 't Hooft G. W. Comment on «Negative Refraction Makes a Perfect Lens» // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87, № 24. P. 249701-1.
11. Williams J. M. Some problems with negative refraction // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87. P. 249703-1.
12. Garcia N., Nieto-Vesperinas M. Left-handed materials do not make a perfect lens // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88, № 20. P. 207403-4.
13. Garcia N., Nieto-Vesperinas M. Erratum: Left-handed materials do not make a perfect lens // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90. P. 229903-1.



14. Nieto-Vesperinas M., Garcia N. Nieto-Vesperinas and Garcia Reply // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. P. 099702-1.
15. Mump P. Критический взгляд на метаматериалы // РЭ. 2007. Т. 52, № 9. С. 1051–1058.
16. Valanju P. M., Walser R. M., Valanju A. P. Wave Refraction in Negative-Index Media: Always Positive and Very Inhomogeneous // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88. P. 187401-4.
17. Шевченко В. В. О сверхфокусировке плоской линзы из отрицательного материала // Журн. радиоэлектроники. 2007. № 6 [Электрон. журн.]. URL: <http://jrt.cplire.ru/jre/jun07/5/text.html>
18. Агранович В. М., Гартштейн Ю. Н. Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // УФН. 2006. Т. 176, № 10. С. 1051–1068.
19. Блюх К. Ю., Блюх Ю. П. Что такое левые среды и чем они интересны? // УФН. 2004. Т. 174. С. 439–447.
20. Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. A composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84, № 18. P. 4184–4187.
21. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теории экситонов. М., 1965. 376 с.
22. Шевченко В. В. Прямые и обратные волны: три определения, их взаимосвязь и условия применимости // УФН. 2007. Т. 177, № 3. С. 301–306.
23. Давидович М. В. О парадоксе Хартмана, туннелировании электромагнитных волн и сверхсветовых скоростях (отклик на статью А. Б. Шварцбурга «Туннелирование электромагнитных волн – парадоксы и перспективы») // УФН. 2009. Т. 179, № 4. С. 443–446.
24. Давидович М. В. О плотности электромагнитной энергии и ее скорости в среде с аномальной положительной дисперсией // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 22. С. 53–63.
25. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. C. Homogenization in Deterministic and Stochastic Problems // Stochastic Problems in Dynamics / ed. B. L. Clarkson. L., 1977. P. 106–115.
26. Папаниколау Дж. Электромагнитные задачи для составных материалов в линейных и нелинейных режимах // Нелинейные электромагнитные волны. М., 1983. Гл. 9. С. 185–191.
27. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984. 472 с.
28. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984. 372 с.
29. El Feddi M., Ren Z., Razeq A. Homogenization Technique for Maxwell Equations in Periodic Structures // IEEE Trans. 1997. Vol. Magnet. 33, № 2. P. 1382–1385.
30. Smith D. R., Schultz S., Markos P., Soukoulis C. M. Determination of permittivity and permeability of metamaterials from scattering data // Phys. Rev. 2002. Vol. B 65. P. 1951041–1951045.
31. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М., 2003. 377 с.
32. Silveirinha M. G., Fernandes C. A. Homogenization of Metamaterial Surfaces and Slabs: The Crossed Wire Mesh Canonical Problem // IEEE Trans. 2005. Vol. AP-53, № 1. P. 59–69.
33. Silveirinha M. G., Fernandes C. A. Homogenization of 3-D-Connected and Nonconnected Wire Metamaterials // IEEE Trans. 2005. Vol. MTT-53, № 4. P. 1418–1430.
34. Ouchetto O., Zouhdi S., Bossavit A., Griso G., Miara B. Modeling of 3D periodic multiphase composites by homogenization // IEEE Microwave Theory and Techniques. 2006. Vol. MTT-54, № 6. Part 2. P. 2615–2619.
35. Симовский К. П. Об использовании формул Френеля для отражения и прохождения электромагнитных волн вне квазистатического приближения // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 9. С. 1031–1050.
36. Виноградов А. П., Дорофеев А. В., Зухди С. К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов // УФН. 2008. Т. 178, № 5. С. 511–518.
37. Davidovich M. V., Stephuk J. V. Homogenization of periodic artificial media // Modeling in Applied Electromagnetics and Electronics. Saratov, 2007. Iss. 8. P. 67–75.
38. Davidovich M. V., Stephuk J. V. Homogenization of periodic metamaterials // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory: Proc. of 12th Intern. Conf. (MMET'2008). Odessa, Ukraine, 2008. P. 527–529.
39. Graglia R. D., Uslenghi P. L. E., Zich R. E. // IEEE Trans. 1991. Vol. AP-39, № 1. P. 83–90.
40. Давидович М. В. Фотонные кристаллы: функции Грина, интегродифференциальные уравнения, результаты моделирования // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 2. С. 150–163.
41. Веселаго В. Г. Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления // УФН. 2003. Т. 173, № 7. С. 790–794.
42. Веселаго В. Г. Перенос энергии, импульса и массы при распространении электромагнитной волны в среде с отрицательным преломлением // Исследовано в России. 2009. С. 279–289 [Электрон. журн.]. URL: [<http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/028.pdf>]
43. Pokrovsky A. L., Efros A. L. Sign of refractive index and group velocity in left-handed media // Solid State Commun. 2002. Vol. 125. P. 283–287.
44. Веселаго В. Г. О формулировке принципа Ферма для света, распространяющегося в веществах с отрицательным преломлением // УФН. 2002. Т. 172, № 10. С. 1215–1218.
45. Давидович М. В. О законах сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в среде и при дифракции на проводящей пластине // УФН. 2010. Т. 180, № 6. С. 623–638.