



проще методов интерферометрии, поскольку не требуется формирования опорного пучка, что существенно упрощает оптическую установку.

Благодарности

Авторы благодарят кандидата физико-математических наук В. В. Лычагова, кандидата физико-математических наук О. А. Перепелицыну, кандидата физико-математических наук Д. В. Лякина за помощь в экспериментальных исследованиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)» (проекты № 2.1.1/4973, 2.2.1.1/2950).

Список литературы

1. Джоунс Р., Уайкс К. Голографическая и спекл-интерферометрия / пер. с англ. М. : Мир, 1986. 328 с.
2. Франсон М. Оптика спеклов / пер. с англ. М. : Мир, 1980. 171 с.
3. Разумовский И. А. Интерференционно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. М. : Изд-во Моск. гос. техн. ун-та, 2007. 240 с.
4. Резчиков А. Ф., Рябухо В. П. Высокора разрешающие интерференционные методы контроля рельефа поверхности и слоистой структуры изделий точного машиностроения и приборостроения // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. Вып. 1. С. 68–79.
5. Гужов В. И., Ильиных С. П. Компьютерная интерферометрия : учеб. пособие. Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2004. 252 с.
6. Schnars U., Jueptner W. Digital holography. Springer-Verlag, 2004. 164 p.
7. Baltiysky S., Gurov I., De Nicola S., Ferraro P., Finizio A., Coppola G. Characterization of microelectromechanical systems by the digital holography method // The Imaging Science J. 2006. Vol. 54. № 2. P.103–110.
8. Дифракционная компьютерная оптика / под ред. В. А. Сойфера М. : Физматлит, 2007. 736 с.
9. Горбатенко Б. Б., Гребенюк А. А., Максимова Л. А., Перепелицына О. А., Рябухо В. П. Спекл-фотография и голографическая интерферометрия с цифровой записью дифракционного поля в фурье-плоскости // Комп. оптика. 2010. Вып. 34, № 1. С. 69–81.
10. Горбатенко Б. Б., Рябухо В. П., Гребенюк А. А., Мысина Н. Ю., Максимова Л. А. Контроль микроперемещений методами цифровой голографической и спекл-интерферометрии // Вестн. СГТУ. 2010. Вып. 4(49). С. 14–24.
11. Laser speckle and related phenomena. Topics in Applied Physics / ed. J. C. Dainty. Berlin : Springer-Verlag, 1975. Vol. 9. 286 p.
12. Горбатенко Б. Б., Гребенюк А. А., Максимова Л. А., Рябухо В. П. Пространственный спектр (дифракционное гало) фурье-спеклограммы рассеивающего объекта // Комп. оптика. 2009. Т. 33, № 1. С. 43–51.
13. Рябухо В. П., Горбатенко Б. Б., Максимова Л. А. Цифровая голография с виртуальной опорной волной // Изв. Саратов. ун-та. Нов.сер. 2008. Т. 8. Сер. Физика, вып. 2. С.11–23.
14. Горбатенко Б. Б., Максимова Л. А., Рябухо В. П. Восстановление голограммной структуры по цифровой записи фурье-спеклограммы // Опт. и спектр. 2009. Т. 106, № 2. С. 321–328.
15. Oppenheim A. V., Schaffer R. W. Digital signal processing. New Jersey : Prentice-Hall, Inc. ; Englewood Cliffs, 1975. 416 p.

УДК 621.372

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР С ПОЛОСКОВЫМИ И ЩЕЛЕВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА СРЕД



С. В. Алексутова

Саратовский государственный университет
E-mail: aleksutova@list.ru

В работе изложен эффективный алгоритм моделирования сложных многослойных электродинамических систем с полосковыми и щелевыми элементами на границах раздела сред. Разработан подход к построению алгоритма автоматизированного проектирования подобных систем по заданной топологии поперечного сечения и параметрам системы.

Ключевые слова: математическое моделирование, распространение электромагнитных волн, дисперсионное уравнение, многослойные волноводящие структуры, полосковые линии, щелевые линии, метод Галеркина.

Mathematical Modelling Multilayered Waveguides Magnitodielectrical Structures with Strip and Slot Elements on Borders of Section of Environments

S. V. Aleksutova

The effective algorithm of modeling of difficult multilayered electrodynamic systems with strip and slot elements on borders of layers is presented. The approach to construction of algorithm of the automated designing of such systems by a given topology and parameters was developed.



Key words: mathematical modeling, propagation of electromagnetic waves, dispersion equation, multilayered waveguides structures, strip lines, slot lines, Galerkin's method.

Введение

Многослойные магнитоэлектрические структуры с полосковыми и щелевыми линиями на границах сред используются при проектировании элементной базы различных высокочастотных устройств и систем в радиофизике, оптике и технике.

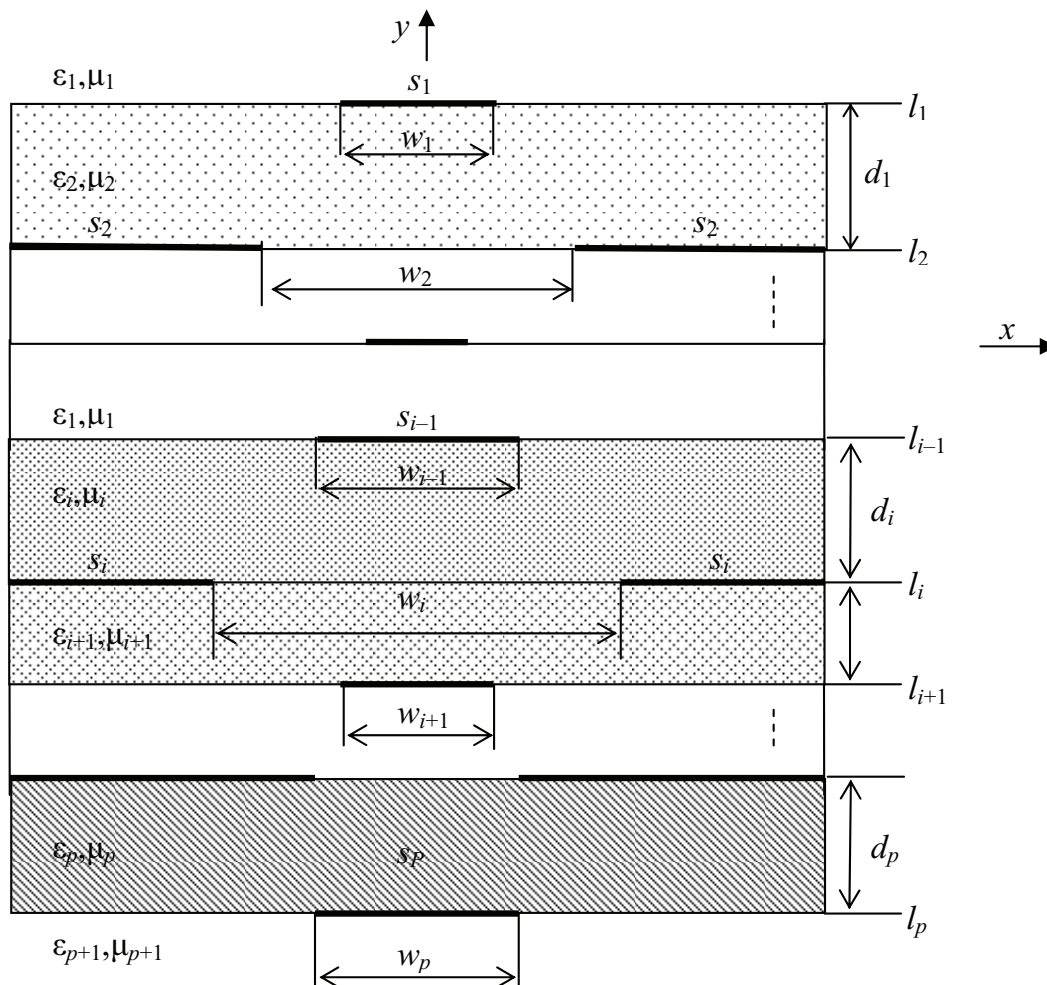
Использование строгих методов анализа и синтеза при моделировании означает применение алгоритмов на основе уравнений Максвелла и строгих решений уравнений движения. Несомненный интерес представляет расчет полей электромагнитных мод в многослойных магнитоэлектрических волноводах, характер поведения дисперсионных кривых, особенности распространения волн [1, 2]. С расширением топологии волноведущих структур значительно рас-

ширяется спектр собственных волн, варьируется характер их поведения в частотном диапазоне. При этом расширяются возможности управления и выбора характеристик распространения волн при проектировании тех или иных устройств [3]. Одновременно усложняется задача построения строгих математических моделей для их численного исследования [4]. Решение подобных задач путем прямого сшивания полей на границах раздела сред ведет к значительному усложнению формулировки модели.

В данной работе предлагается эффективный подход к построению математических моделей подобных структур.

Построение математической модели

Рассмотрим многослойную магнитоэлектрическую структуру с полосковыми и щелевыми линиями на границах раздела сред, поперечное сечение которой изображено на рисунке.



Поперечное сечение многослойной магнитоэлектрической структуры с полосковыми и щелевыми линиями на границах раздела сред



Структура состоит из плоскопараллельных магнитоэлектрических слоев толщиной d_i и проницаемостями ε_i, μ_i , не ограниченных в направлении оси x и z . На границах раздела сред l_i может находиться по одному полосковому либо щелевому волноведущему элементу шириной w_i . Плоскость YOZ является продольной плоскостью симметрии системы, регулярной по оси z . Металлические поверхности s_i , образующие полосковые элементы и полуплоскости вне щелевых элементов, считаются бесконечно

тонкими, потери в металле и диэлектрике не учитываются.

Задача определения мод, имеющих распространение в рассматриваемой структуре, сводится к решению уравнений Максвелла с известными граничными условиями на границах раздела сред и границах рассматриваемой области. Учитывая однородность задачи в направлении оси z , будем искать решение уравнений Максвелла для полей E и H в виде зависимости от электрических и магнитных потенциалов V^e и V^h в виде [5]:

$$\begin{aligned} E_z &= j \frac{k_i^2 - \beta^2}{\beta} V^e(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)}, & H_z &= j \frac{k_i^2 - \beta^2}{\beta} V^h(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)}, \\ E_x &= \left[\frac{\partial V^e}{\partial x} + \frac{\omega \mu_0 \mu_i}{\beta} \frac{\partial V^h}{\partial y} \right] e^{j(\omega t - \beta z)}, & H_x &= \left[\frac{\partial V^h}{\partial x} - \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_i}{\beta} \frac{\partial V^e}{\partial y} \right] e^{j(\omega t - \beta z)}, \\ E_y &= \left[\frac{\partial V^e}{\partial y} - \frac{\omega \mu_0 \mu_i}{\beta} \frac{\partial V^h}{\partial x} \right] e^{j(\omega t - \beta z)}, & H_y &= \left[\frac{\partial V^h}{\partial y} + \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_i}{\beta} \frac{\partial V^e}{\partial x} \right] e^{j(\omega t - \beta z)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где β – неизвестное продольное волновое число, ω – круговая частота, ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная проницаемости свободного про-

странства, $k_i^2 = k_0^2 \varepsilon_i \mu_i$, $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Сами потенциалы при этом удовлетворяют волновым уравнениям вида

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_i^2 - \beta^2 \right] V^e(x, y) = 0, \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_i^2 - \beta^2 \right] V^h(x, y) = 0. \quad (2)$$

Касательные компоненты полей на границе раздела сред подчиняются условиям:

$$E_z^+ - E_z^- = 0, \quad E_x^+ - E_x^- = 0, \quad (3)$$

$$H_z^+ - H_z^- = -J_x, \quad H_x^+ - H_x^- = J_z, \quad (4)$$

где индексы «+» и «-» определяют значения полей по разные стороны границы раздела сред; J_x, J_z – компоненты плотности тока на металлической поверхности s_i границы раздела сред l_i .

Поиск решения задачи

Учитывая бесконечность структуры по оси x , применим к уравнениям (1)–(4) преобразование Фурье по переменной x в виде

$$\tilde{F}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-j\alpha x} dx. \quad (5)$$

В результате полученных преобразований перейдем от исходной задачи к поиску решения уравнений в пространстве преобразований Фурье вида

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z &= j \frac{k_i^2 - \beta^2}{\beta} \tilde{V}^e(\alpha, y) e^{j(\omega t - \beta z)}, & \tilde{H}_z &= j \frac{k_i^2 - \beta^2}{\beta} \tilde{V}^h(\alpha, y) e^{j(\omega t - \beta z)}, \\ \tilde{E}_x &= \left[j\alpha \tilde{V}^e + \frac{\omega \mu_0 \mu_i}{\beta} \frac{\partial \tilde{V}^h}{\partial y} \right] e^{j(\omega t - \beta z)}, & \tilde{H}_x &= \left[j\alpha \tilde{V}^h - \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_i}{\beta} \frac{\partial \tilde{V}^e}{\partial y} \right] e^{j(\omega t - \beta z)}, \\ \tilde{E}_y &= \left[\frac{\partial \tilde{V}^e}{\partial y} - j\alpha \frac{\omega \mu_0 \mu_i}{\beta} \tilde{V}^h \right] e^{j(\omega t - \beta z)}, & \tilde{H}_y &= \left[\frac{\partial \tilde{V}^h}{\partial y} + j\alpha \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_i}{\beta} \tilde{V}^e \right] e^{j(\omega t - \beta z)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma_i^2 \right] \tilde{V}^e(\alpha, y) = 0, \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma_i^2 \right] \tilde{V}^h(\alpha, y) = 0, \quad (7)$$



где \tilde{V}^e и \tilde{V}^h – спектральные образы искомым потенциалов V^e и V^h , α – спектральный коэффициент разложения в преобразовании Фурье или постоянная распространения вдоль оси x , $\gamma_i^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k_i^2$.

Решения уравнений (7) для V^e и V^h в одиночном i -том выделенном слое могут быть записаны в виде :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i^e(\alpha, y) &= [A_i(\alpha) sh \gamma_i y + B_i(\alpha) ch \gamma_i y], \\ \tilde{V}_i^h(\alpha, y) &= [C_i(\alpha) sh \gamma_i y + D_i(\alpha) ch \gamma_i y]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь A_i, B_i, C_i, D_i – неизвестные амплитудные коэффициенты. Значения их определим из граничных условий для потенциалов V^e и V^h . Зададимся на границах l_{i-1} и l_i выделенного i -го слоя распределением электрического поля

$$\tilde{e}_{i-1} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_x \\ \tilde{e}_z \end{pmatrix}_{i-1}, \quad \tilde{e}_i = \begin{pmatrix} \tilde{e}_x \\ \tilde{e}_z \end{pmatrix}_i.$$

Из условия согласования компонент электрического поля на границах слоя при $y = y_{i-1}$ и $y = y_i$ получаем:

$$\begin{aligned} j \frac{k_i^2 - \beta}{\beta} [A_i(\alpha) sh \gamma_i y_{i-1} + B_i(\alpha) ch \gamma_i y_{i-1}] &= \tilde{e}_{zi-1}, \\ j \frac{k_i^2 - \beta}{\beta} [A_i(\alpha) sh \gamma_i y_i + B_i(\alpha) ch \gamma_i y_i] &= \tilde{e}_{zi}, \\ j \alpha [A_i(\alpha) sh \gamma_i y_{i-1} + B_i(\alpha) ch \gamma_i y_{i-1}] &+ \\ + \frac{\omega \mu_0 \mu_i}{\beta} \gamma_i [C_i(\alpha) ch \gamma_i y_{i-1} + D_i(\alpha) sh \gamma_i y_{i-1}] &= e_{xi-1}, \\ j \alpha [A_i(\alpha) sh \gamma_i y_i + B_i(\alpha) ch \gamma_i y_i] &+ \\ + \frac{\omega \mu_0 \mu_i}{\beta} \gamma_i [C_i(\alpha) ch \gamma_i y_i + D_i(\alpha) sh \gamma_i y_i] &= \tilde{e}_{xi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Откуда находим:

$$\begin{aligned} A_i(\alpha) &= \frac{\beta}{j(k_i^2 - \beta) sh \gamma_i d_i} [\tilde{e}_{zi-1}(\alpha) ch \gamma_i y_i - \tilde{e}_{zi}(\alpha) ch \gamma_i y_{i-1}], \\ B_i(\alpha) &= \frac{\beta}{j(k_i^2 - \beta) sh \gamma_i d_i} [\tilde{e}_{zi}(\alpha) sh \gamma_i y_{i-1} - \tilde{e}_{zi-1}(\alpha) sh \gamma_i y_i], \\ C_i(\alpha) &= \frac{\beta}{\omega \mu_0 \mu_i \gamma_i sh \gamma_i d_i} \left[(\tilde{e}_{xi} sh \gamma_i y_{i-1} - \tilde{e}_{xi-1} sh \gamma_i y_i) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \beta}{k_i^2 - \beta^2} (\tilde{e}_{zi} sh \gamma_i y_{i-1} - \tilde{e}_{zi-1} sh \gamma_i y_i) \right], \\ D_i(\alpha) &= \frac{\beta}{\omega \mu_0 \mu_i \gamma_i sh \gamma_i d_i} \left[(\tilde{e}_{xi-1} ch \gamma_i y_i - \tilde{e}_{xi} ch \gamma_i y_{i-1}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \beta}{k_i^2 - \beta^2} (\tilde{e}_{zi-1} ch \gamma_i y_i - \tilde{e}_{zi} ch \gamma_i y_{i-1}) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), запишем выражения потенциалов V^e и V^h через амплитудные коэффициенты в слое:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i^e(\alpha, y) &= \frac{\beta}{j(k_i^2 - \beta) sh \gamma_i d_i} [\tilde{e}_{zi-1} sh \gamma_i (y - y_i) - \\ &\quad - \tilde{e}_{zi} sh \gamma_i (y - y_{i-1})], \\ \tilde{V}_i^h(\alpha, y) &= \frac{\beta}{\omega \mu_0 \mu_i \gamma_i th \gamma_i d_i} [\{\tilde{e}_{xi-1} ch \gamma_i (y - y_i) - \\ &\quad - \tilde{e}_{xi} ch \gamma_i (y - y_{i-1})\} - \frac{\alpha \beta}{k_i^2 - \beta^2} \{\tilde{e}_{zi-1} ch \gamma_i (y - y_i) - \\ &\quad - \tilde{e}_{zi} ch \gamma_i (y - y_{i-1})\}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Решения уравнений для потенциалов \tilde{V}^e и \tilde{V}^h многослойной структуры должны удовлетворять граничным условиям на границах раздела сред. Подставляя (11) с учетом (6) в (3) и (4), получаем следующее функциональное уравнение для i -той границы раздела сред :

$$A_{i-1} \tilde{e}_{i-1} + A_{ii} \tilde{e}_i + A_{i+1} \tilde{e}_{i+1} = \tilde{J}, \quad (12)$$

где $\tilde{e}_i = \begin{pmatrix} \tilde{e}_x \\ \tilde{e}_z \end{pmatrix}_j$ – образ Фурье распределения электрического поля на границе l_j ($j=i, i, i+1$);

$\tilde{J}_i = \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_z \end{pmatrix}_i$ – образ Фурье распределения тока на

металлической поверхности i -той границы; A_{ij} – квадратные матрицы второго порядка.

Функциональное уравнение связывает распределения полей $\tilde{e}_{i-1}, \tilde{e}_i, \tilde{e}_{i+1}$ на границах $i-1, i, i+1$ и тока \tilde{J}_i на i -той границе раздела сред. Для практической реализации метода эффективно формировать функциональное уравнение в таком виде, где в качестве неизвестных распределений полей \tilde{e}_i на бесконечных границах раздела сред и токов \tilde{J}_i на металлических полуплоскостях выступают распределения полей \tilde{E}_i на щелевых и токов \tilde{I}_i на полосковых линиях, имеющих конечные интервалы их распределения. Именно эти функции определены только на ширине волноведущего щелевого или полоскового элемента соответственно. Поэтому функциональное уравнение (12) будет иметь следующий вид для i -той границы со щелевым элементом :

$$A_{i-1} \tilde{e}_{i-1} + A_{ii} \tilde{E}_i + A_{i+1} \tilde{e}_{i+1} = \tilde{J}_i, \quad (13)$$

и для i -той границы с полосковым элементом :

$$B_{i-1} \tilde{e}_{i-1} + B_{ii} \tilde{I}_i + B_{i+1} \tilde{e}_{i+1} = \tilde{e}_i. \quad (14)$$



$$\text{Здесь } A_{ii-1} = \begin{pmatrix} -\frac{p_i}{s_i} & -\frac{\alpha}{s_i} \\ -\frac{\alpha}{s_i} & -\frac{\sigma_i}{s_i} \end{pmatrix}; \quad A_{ii} = \begin{pmatrix} \frac{p_i + p_{i+1}}{t_i} & \frac{\alpha}{t_i} + \frac{\alpha}{t_{i+1}} \\ \frac{\alpha}{t_i} + \frac{\alpha}{t_{i+1}} & \frac{\sigma_i}{t_i} + \frac{\sigma_{i+1}}{t_{i+1}} \end{pmatrix}; \quad A_{ii+1} = \begin{pmatrix} -\frac{p_{i+1}}{s_{i+1}} & -\frac{\alpha}{s_{i+1}} \\ -\frac{\alpha}{s_{i+1}} & -\frac{\sigma_i}{s_{i+1}} \end{pmatrix};$$

$$B_{ii-1} = A_{ii}^{-1} \cdot A_{ii-1}; \quad B_{ii} = A_{ii}^{-1}; \quad B_{ii+1} = A_{ii}^{-1} \cdot A_{ii+1};$$

$$p_i = \frac{k_i - \beta^2}{\beta}; \quad \sigma_i = \frac{\alpha^2 - M_i \xi_i \gamma_i^2}{p_i}; \quad M_i = \frac{\omega \mu_0 \mu_i}{\beta}; \quad \xi_i = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_i}{\beta};$$

$$s_i = M_i \gamma_i \text{sh } \gamma_i d_i; \quad t_i = M_i \gamma_i \text{th } \gamma_i d_i; \quad \gamma_i = \alpha^2 + \beta^2 - k_i^2.$$

Использование базовых уравнений (13), (14) позволяет построить общие функциональные уравнения для всей многослойной структуры, изображенной на рисунке. Опуская

громоздкие выкладки, запишем функциональное уравнение для композиционной системы общего вида для i -той границы со щелевым элементом:

$$L_{ih^+}^+ \tilde{E}_{h^+} + \sum_{j=i+1}^{h^+-1} R_{ij}^+ \tilde{I}_j + Q_{ii} \tilde{E}_i + \sum_{j=i-1}^{h^-+1} R_{ij}^- \tilde{I}_j + L_{ih^-}^- \tilde{E}_{h^-} = \tilde{J}_i. \quad (15)$$

Для границы с полосковым элементом получаем:

$$D_{ii} \left[F_{ih^+}^+ \tilde{E}_{h^+} + \sum_{j=i+1}^{h^+-1} P_{ij}^+ \tilde{I}_j + B_{ii} \tilde{I}_i + \sum_{j=i-1}^{h^-+1} P_{ij}^- \tilde{I}_j + F_{ih^-}^- \tilde{E}_{h^-} \right] = \tilde{\alpha}_i, \quad (16)$$

где операторы уравнений (15) и (16) являются комбинациями матриц A и B .

Здесь введены следующие обозначения :

$$L_{ih^\pm}^\pm = A_{ii\pm 1} (C_{i\pm 1 i\pm 1}^{-1} B_{i\pm 1 i\pm 2}) \dots (C_{h^\pm \mp 1 h^\pm \mp 1}^{-1} B_{h^\pm \mp 1 h^\pm}), \quad R_{ij}^\pm = \sum_{\ell=j}^{h^\pm \mp 1} (A_{ii\pm 1} Y_{i\pm 1 \ell} C_{\ell \ell}^{-1} Y_{\ell j} B_{jj}),$$

$$Q_{ii} = H_{ii}^+ + A_{ii} + H_{ii}^-, \quad H_{ii}^\pm = \sum_{\ell=i\pm 1}^{h^\pm \mp 1} (A_{ii\pm 1} Y_{i\pm 1 \ell} C_{\ell \ell}^{-1} Y_{\ell i\pm 1} Y_{i\pm 1 i}), \quad Y_{i\pm 1 \ell} = (C_{i\pm 1 i\pm 1}^{-1} B_{i\pm 1 i\pm 2}) \dots (C_{\ell \mp 1 \ell \mp 1}^{-1} B_{\ell \mp 1 \ell}),$$

$$Y_{\ell i\pm 1} = (B_{\ell \ell \mp 1} C_{\ell \mp 1 \ell \mp 1}^{-1}) \dots (B_{i\pm 2 i\pm 1} C_{i\pm 1 i\pm 1}^{-1}), \quad Y_{\ell j} = (B_{\ell \ell \mp 1} C_{\ell \mp 1 \ell \mp 1}^{-1}) (B_{\ell \mp 1 \ell \mp 2} C_{\ell \mp 2 \ell \mp 2}^{-1}) \dots (B_{j\pm 1 j} C_{jj}^{-1}),$$

$$C_{\ell \ell} = I - B_{\ell \ell \mp 1} C_{\ell \mp 1 \ell \mp 1}^{-1} B_{\ell \mp 1 \ell}, \quad \ell = i \pm 2, i \pm 3, \dots, h^\pm \mp 1,$$

$$C_{i+1 i+1} = I, \quad Y_{\ell \ell} = I, \quad \ell = i, i \pm 1, \dots, h^\pm \mp 1, \quad \text{где } I - \text{единичная матрица,}$$

$$F_{ih^\pm}^\pm = \bar{Y}_{ih^\pm \mp 1} B_{h^\pm \mp 1 h^\pm}, \quad D_{ii} = \prod_{\ell=i+1}^{h^\pm \mp 1} (T_{ii}^{-1}), \quad P_{ij}^\pm = \sum_{\ell=i+1}^{h^\pm \mp i} (B_{ii\pm 1} \bar{Y}_{i\pm 1 \ell} T_{\ell \ell}^{-1} \bar{Y}_{\ell j} B_{jj}),$$

$$T_{ii}^{-1} = I - \prod_{k=i+1}^{\ell} ({}_{k\pm 1} T_{ii}) (B_{ii\pm 1} \bar{Y}_{i\pm 1 \ell} T_{\ell \ell}^{-1} \bar{Y}_{\ell i\pm 1} B_{i\pm 1 i}),$$

$$\bar{Y}_{ih^\pm \mp 1} = (B_{ii\pm 1} T_{i\pm 1 i\pm 1}^{-1}) (B_{i\pm 1 i\pm 2} T_{i\pm 2 i\pm 2}^{-1}) \dots (B_{h^\pm \mp 2 h^\pm \mp 1} T_{h^\pm \mp 1 h^\pm \mp 1}^{-1}),$$

$$\bar{Y}_{i\pm 1 \ell} = (T_{i\pm 1 i\pm 1}^{-1} B_{i\pm 1 i\pm 2}) (T_{i\pm 2 i\pm 2}^{-1} B_{i\pm 2 i\pm 3}) \dots (T_{\ell \mp 1 \ell \mp 1}^{-1} B_{\ell \mp 1 \ell}),$$

$$\bar{Y}_{\ell j} = (B_{\ell \ell \mp 1} T_{\ell \mp 1 \ell \mp 1}^{-1}) (B_{\ell \mp 1 \ell \mp 2} T_{\ell \mp 2 \ell \mp 2}^{-1}) \dots (B_{j\pm 1 j} T_{jj}^{-1}),$$



$$\bar{Y}_{\ell i \pm 1} = (B_{\ell \ell \mp 1} T_{\ell \mp 1 \ell \mp 1}^{-1})(B_{\ell \mp 1 \ell \mp 2} T_{\ell \mp 2 \ell \mp 2}^{-1}) \dots (B_{i \pm 2 i \pm 1} T_{i \pm 1 i \pm 1}^{-1}),$$

$$T_{\ell \ell} = I - B_{\ell \ell \mp 1} T_{\ell \mp 1 \ell \mp 1}^{-1} B_{\ell \mp 1 \ell}, \quad \ell = i \pm 2, i \pm 3, \dots, h^{\pm} \mp 1, \quad T_{ii} = I, \quad T_{i+i+1} = I.$$

Уравнения (15), (16) позволяют получить эффективный алгоритм автоматизированного построения математических моделей подобных структур произвольной топологии. Построенный алгоритм сводит решение исходной задачи по расчету собственных волн к системе функциональных уравнений с числом уравнений, равным числу границ с волноведущими элементами:

$$M \cdot X = Y, \quad (17)$$

где $X = \begin{pmatrix} \psi_{1i} \\ \psi_{2i} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, p$ – вектор искомых распределений соответствующих компонент полей E и токов I на щелевых и полосковых элементах соответственно, $Y_i = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ – вектор распределений токов $\tilde{J}_i = \begin{pmatrix} \tilde{J}_z \\ \tilde{J}_x \end{pmatrix}_i$, либо полей $\tilde{e}_i = \begin{pmatrix} \tilde{e}_z \\ \tilde{e}_x \end{pmatrix}_i$ вне волноведущих элементов.

Решение системы (17) проводится проекционным методом Галеркина.

Для этого неизвестные распределения полей и токов на соответствующих волноведущих элементах представим в виде разложения в ряд по системе ортогональных функций в виде:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_0^{\infty} a_{1n}^i f_{1n}(t_i) \\ \sum_0^{\infty} a_{2n}^i f_{2n}(t_i) \end{pmatrix}, \quad t_i = \frac{2x}{w_i}, \quad |x| \leq \frac{w_i}{2}, \quad (18)$$

где $f_{1n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t)$,

$$f_{2n}(t) = -j \sqrt{1-t^2} U_n(t), \quad |t| \leq 1,$$

$T_n(t)$, $U_n(t)$ – полиномы Чебышева I, II рода.

Применяя преобразование Фурье к (18) и подставляя в систему (17), путем проведения проекционной процедуры переходим к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых распределений полей и токов в следующем виде:

$$K \cdot A = 0. \quad (19)$$

Элементы матрицы коэффициентов K линейной алгебраической системы (19) вычисляются по формуле

$$K_{jmn}^{\ell p} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ji}^{\ell p}(\alpha, \beta) J_m\left(\frac{\alpha w_i}{2}\right) J_n\left(\frac{\alpha w_j}{2}\right) d\alpha, \quad (20)$$

где $R_{ji}^{\ell p}(\alpha, \beta)$ – элементы матричных операторов при функциях распределения Ψ_i на элементах w_i в функциональных уравнениях (15), (16); J_m , J_n – функции Бесселя; $\ell, p = 1, 2$; $j, i = 1, 2, \dots, N$; $m, n = 1, 2, \dots, k_j$; N – число волноведущих элементов в системе, k_j – число учитываемых членов ряда в разложении.

Система (19) однородных уравнений имеет стандартное решение.

Из условия $Det \|K\| = 0$ получаем дисперсионное уравнение для определения искомых постоянных распространения β собственных волн в данном волноводе. Решение системы дает коэффициенты разложения в (18) и позволяет найти распределения полей и токов на волноведущих элементах, а также функции электрических и магнитных полей собственных волн в рассматриваемой структуре.

Заключение

В статье дается алгоритм математического моделирования многослойных волноведущих магнитодиэлектрических структур с полосковыми и щелевыми линиями на границах раздела сред магнитодиэлектриков. На основе строгого решения уравнений Максвелла, применения граничных условий для электромагнитных полей строится система функциональных уравнений относительно искомых функций распределения полей на щелевых и токов на полосковых линиях. Полученные результаты используются автором для создания систем автоматизированного моделирования подобных многослойных структур по виду заданной топологии моделируемой структуры.

Список литературы

1. Голант Е. И. Новый подход к расчету вытекающих мод многослойных волноводных структур, основанный на точном методе конечных разностей // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 24. С. 81–87.
2. Тихонравов А. В., Трубецков М. К. Новые задачи многослойной оптики // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 2. С. 265–272.
3. Rodriguez-Berral R., Mesa F., Jackson D. R. Gap Discontinuity in Microstrip Lines : An Accurate



Semianalytical Formulation // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2011. Vol. 59, № 6. P. 1441–1453.

4. *Alecsutova S. V.* Mathematical Modelling of Multilayered Waveguides with Non-Uniform Boundaries // Моделиро-

вание в прикладной электродинамике и электронике : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 8. С. 76–81.

5. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М. : Наука, 1989. 544 с.

УДК 534.1:539.3

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ДИНАМИКУ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ПЬЕЗОГИРОСКОПА

В. Ю. Ольшанский, А. В. Серебряков*, И. Ф. Абитова

Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов
*Энгельсский технологический институт (филиал)
Саратовского государственного технического университета
E-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru; abitovaif@rambler.ru
E-mail: bundzin@inbox.ru

Рассмотрены колебания в чувствительном элементе пьезогироскопа при измерении угловой скорости. Решена связанная задача электроупругости для системы упругих пьезокерамических пластин и присоединенной массы. Учитывалось наличие сил вязкости при деформациях пьезокерамики. Исследовано влияние условий закрепления пластин на амплитудно-частотные характеристики устройства.

Ключевые слова: сила Кориолиса, угловая скорость, пьезоэффект, электроупругость.

The Influence of the Boundary Conditions on the Dynamics of the Piezogyroscope's Sensitive Element

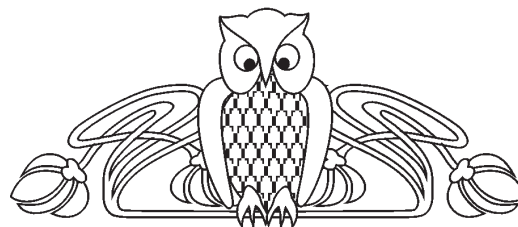
V. Yu. Olshanskiy, A. V. Serebryakov, I. F. Abitova

There has been considered the fluctuations inside the sensitive element of the piezogyroscope while measuring the angular velocity. The coupled electroelasticity problem for the system of the elastic piezoceramic plates and associated mass has been solved. The presence of the viscous forces during the deformation was taken into consideration. There has been investigated the influence of the plate fixation on the amplitude-frequency characteristics of the device.

Keywords: Coriolis force, angular velocity, piezoeffect, electroelasticity.

1. Объект исследования

Рассматривается пьезогироскоп – датчик инерциальной информации (ДИИ). Устройство предназначено для измерения угловых скоростей. Чувствительный элемент датчика состоит из двух взаимно перпендикулярных пластин и присоединенной к ним массы. Пьезокерамические пластины Π_1 , Π_2 имеют толщины $h_1 = h_2 = h$. У каждой пластины одно из оснований закреплено, а другое находится в контакте с грузом массы M . Груз присоединен так, что на пластины передаются только нормальные механические усилия. На пластину Π_1 подается переменный ток. Вслед-



ствие этого в ней за счет обратного пьезоэффекта возбуждаются упругие волны, которые вызывают колебания присоединенной массы. При наличии угловой скорости переносного вращения присоединенная масса воздействует на пластину Π_2 . За счет прямого пьезоэффекта в этой пластине генерируется электрический ток. Характеристики тока зависят от величины угловой скорости.

В настоящей работе, в рамках предложенной ранее модели ДИИ [1, 2], исследовано влияние на выходной сигнал различных условий закрепления пьезопластин. Представлена зависимость выходного тока от частоты возбуждающих колебаний и угловой скорости.

2. Математическая модель

Механические колебания в пластине Π_1 описываются перемещениями $u_1(x_1, t)$ в направлении оси Ox_1 . Эти колебания передаются присоединенной массе. Когда ДИИ вращается с угловой скоростью Ω относительно инерциальной системы отсчета, на присоединенную массу действует кориолисова сила $F^c = -2 M (\Omega \times v_r)$.

Так как период колебаний пластин мал и за один период угловая скорость Ω изменяется незначительно, рассмотрим стадию установившихся колебаний при $\Omega = \text{const}$. Рассмотрим связанную задачу электроупругости. Используем уравнение механических колебаний при наличии вязкого трения

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

уравнения (1) записаны в безразмерной форме.