



Заключение

Рассмотрено применение гипотезы АС в механике столкновения составных частиц при высоких энергиях. Показано, что АС обуславливает (как и модель Фейнмана) двухэтапный механизм взаимодействия: упругое рассеяние групп конstituентов на первом этапе с последующей их адронизацией на втором; сами группы конstituентов x_g совпадают с партонами Бьёркена x .

Показано, что упругий характер столкновения партонов позволяет, в свою очередь, определить инвариантные переменные (x_a , x_b и переданный 4-импульс Q^2), аналогичные используемым в ГНР, через параметры двух регистрируемых адронных ливней.

Предложенный подход может представлять интерес для КХД-обработки совместных данных ГНР и адронных взаимодействий (global fit), для развития концепции кумулятивных событий, поиска кварк-глюонной плазмы и промежуточной фазы на NICA (здесь требуется дополнительное изучение).

Автор выражает благодарность В.В. Кухтину, О.В. Рогачевскому, А.П. Чеплакову и Н.Д. Джавадову за полезные обсуждения и помощь в работе.

УДК 537.533.9+51-73

ПОЛУЧЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ

И.П. Юдин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
E-mail: yudin@jinr.ru

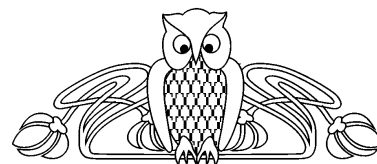
Приведены алгоритмы решения неоднородных дифференциальных уравнений с помощью метода функции влияния. Исследуются неоднородные дифференциальные уравнения нелинейной динамики заряженных частиц в соленоидальном магнитном поле.

В работе используются алгоритмы замены нелинейных членов на разложение их по начальным, известным значениям вектора состояния. Приведены формулы для абберрационных коэффициентов нелинейной оптики. Получены результаты для рассматриваемого приложения (канал инжекции синхротрона для адронной терапии).

Ключевые слова: функция влияния, неоднородные дифференциальные уравнения, нелинейная динамика пучков заряженных частиц, соленоидальное магнитное поле.

Список литературы

1. Тэйлор Р.Э. Глубокоупругое рассеяние: Ранние годы // УФН. 1991. Т.161. С.39–73.
2. Кендалл Г.У. Глубокоупругое рассеяние: Эксперименты на протоне и наблюдение скейлинга // УФН. 1991. Т.161. С.75–106.
3. Фридман Дж.Ф. Глубокоупругое рассеяние: сравнение с кварковой моделью // УФН. 1991. Т.161. С.106–128.
4. Feynman R. Very High-Energy Collisions of Hadrons // Phys. Rev. Lett. 1969. Vol.23. P.1415–1417.
5. Bjorken J.D., Paschos E. Inelastic Electron-Proton and γ -Proton Scattering and the Structure of the Nucleon // Phys. Rev. 1969. Vol.185. P.1975–1982.
6. Gross D.J., Wilczek F. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories // Phys. Rev. Lett. 1973. Vol.30. P.1343–1346.
7. Politzer H.D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? // Phys. Rev. Lett. 1973. Vol.30. P.1346–1349.
8. Гросс Д.Дж. Открытие асимптотической свободы и появление КХД // УФН. 2005. Т.175. С.1306–1318.
9. Балдин А.М. Физика релятивистских ядер // ЭЧАЯ. 1977. Т.8. С.429–477.
10. Балдин А.М., Балдин А.А. Релятивистская ядерная физика: пространство относительных 4-скоростей, симметрии решений, принцип ослабления корреляций, подобие, промежуточные асимптотики // ЭЧАЯ. 1998. Т.29. С.577–630.
11. Черников Н.А. Геометрия Лобачевского и релятивистская механика // ЭЧАЯ. 1973. Т.4. С.773–810.



Solution Method of the Nonlinear Equations of Mathematical Physics by the Influence Function

I.P. Yudin

The nonhomogeneous differential equation was investigated by means of a method of the influence function for the problems of nonlinear beam dynamics in the solenoid magnetic field up to the third order. The algorithms within the matrix formalism to obtain the solution of nonlinear equations by the influence function method, are described. Formulas – a view of the influence function and the solution of the nonhomogeneous differential equation are received for the potentials responsible for the nonhomogeneity in the investigated differential equation. The program is written for analytical and numerical solutions (results for the considered application are given).

Key words: influence function, nonhomogeneous differential equation, nonlinear beam dynamics, solenoidal magnetic field.



1. Метод функций влияния

Приведем обоснование применения метода функций влияния как одного из действенных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, являющихся уравнениями движения заряженных частиц во многих известных конфигурациях электрических и магнитных полей.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(u) = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u^{(1)} + p_n u = f(s)$$

$$(u^{(i)} = \frac{\partial^i u}{\partial s^i})$$

и начальными условиями

$$u^{(i)}(0) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Его решение дается формулой

$$u(s) = \int_0^s U(s-\xi) \cdot f(\xi) \cdot d\xi \quad (0 < \xi < s),$$

где функция влияния $U(s-\xi)$ есть решение однородного уравнения

$$L(U) = U^{(n)} + p_1 U^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} U^{(1)} + p_n U = 0$$

с начальными условиями

$$U^{(i)}(0) = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, n-2), \quad U^{(n-1)}(0) = 1.$$

2. Нелинейные уравнения движения

Выберем цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z) с осью Z , направленной вдоль оси соленоида. Запишем уравнение Лоренца для силы, действующей на частицу с зарядом q и массой покоя m , находящуюся во внешнем осесимметричном поле. Положив $E_r = E_z = E_\vartheta = B_\vartheta = 0$, получим следующие исходные уравнения движения в магнитном поле соленоида по проекциям:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) - \gamma m \dot{\vartheta}^2 - q r \dot{\vartheta} B_z = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma m r^2 \dot{\vartheta} + q \int_0^r B_z r dr \right) = 0, \quad (1б)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{z}) + q r \dot{\vartheta} B_r = 0. \quad (1в)$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, v – скорость частицы, c – скорость света, B_r и B_z – компоненты магнитного поля.

Нетрудно получить разложение скалярного магнитного потенциала по степеням r

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2n}(z) \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}, \quad (2)$$

удовлетворяющее условию симметрии $\varphi(r, z) = \varphi(-r, z)$. В данной геометрии ограничимся членами разложения компонент поля до третьего порядка включительно:

$$B_z(r, z) = B(z) - \frac{1}{4} B''(z) r^2 + \dots, \quad (3a)$$

$$B_r(r, z) = -\frac{1}{2} B'(z) r + \frac{1}{16} B'''(z) r^3 - \dots, \quad (3б)$$

где $B(z)$ – аксиальное магнитное поле, производные от $B(z)$ берутся по z . Интегрируя уравнение движения частицы с начальным условием $\theta = 0$, получим уравнение для угловой скорости θ в любой точке внутри поля линзы:

$$\dot{\vartheta} = \omega_l \cdot \left(1 - \frac{B''}{8B} r^2 \right),$$

где $\omega_l = \frac{qB(z)}{2\gamma m c}$ – ларморова частота.

Отбрасывая члены выше третьего порядка, нелинейное уравнение для радиальной траектории частицы запишем в виде

$$r'' = -k^2 r \left(1 - \frac{B''}{2B} r^2 + r'^2 + k^2 r^2 - \frac{B'}{B} r r' \right), \quad (4)$$

где $k = \frac{qB(z)}{2\gamma m c \beta} = \frac{qB(z)}{2p}$ – фокусирующая

сила линзы, p – импульс частицы. Выбрав среди частиц пучка «равновесную» с импульсом p_0 , можно для любой частицы с импульсом $p = p_0(1 + \delta)$ после разложения в ряд по отклонениям δ записать окончательное траекторное уравнение:

$$r'' = -k_0^2 r \left[1 - 2\delta - \frac{B''}{2B} r^2 + r'^2 + k_0^2 r^2 - \frac{B'}{B} r r' + 3\delta^2 \right], \quad (5)$$



$$\text{где } k_0 = \frac{qB(z)}{2\gamma mc\beta} = \frac{qB(z)}{2p_0}.$$

Можно заметить, что aberrации второго порядка для соленоидального поля являются хроматическими (т.е. зависящими только от δ).

При малых значениях r , r' и δ получаем линейное уравнение движение для параксиальной частицы

$$r'' = -k_0^2(z)r. \quad (6)$$

3. Линейная оптика соленоидальной линзы

Выберем вектор состояния с независимыми переменными r , r' , l и δ . Здесь l – различие в длинах траекторий между равновесной и выбранной частицы. Выбрав центральную траекторию в качестве равновесной, можно определить переменную l как

$$l = \int_0^z \left(\sqrt{1 + r'^2 + r^2 \vartheta'^2} - 1 \right) dz. \quad (7)$$

На интервале $\Delta_i = (z_i, z_{i+1})$ постоянства k_i известно решение линейного уравнения:

$$\begin{pmatrix} r_i \\ r'_i \\ l \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k_i \Delta & k_i^{-1} \sin k_i \Delta & 0 & 0 \\ -k_i \sin k_i \Delta & \cos k_i \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i-1} \\ r'_{i-1} \\ l \\ \delta \end{pmatrix} \quad (8)$$

Матрица перехода на всем интервале действия поля вычисляется путем перемножения N матриц R^i из (2.1):

$$R(D) = \prod_{i=1}^N R^i = R^N \cdot R^{N-1} \cdot \dots \cdot R^1. \quad (9)$$

4. Уравнение второго порядка

Уравнение второго порядка здесь

$$r'' = -k^2 r \cdot (1 - 2\delta), \quad (10)$$

а вектор начального состояния есть $X^0 = (r_0, r'_0, l, \delta)$. Вектор состояния $X = (r, r', l, \delta)$ предлагается искать в виде

$$X_i(z) = \sum_{j=1}^4 R_{ij}(z) X_j^0 + \sum_{j=1}^4 \sum_{k=j}^4 T_{ijk}(z) X_j^0 X_k^0 + \sum_{j=1}^4 \sum_{k=j}^4 \sum_{l=k}^4 U_{ijkl}(z) X_j^0 X_k^0 X_l^0, \quad (11)$$

где R_{ij} , T_{ijk} и U_{ijkl} определим как aberrационные коэффициенты соответственно первого, второго и третьего порядка.

Будем использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R_{2j} &= R'_{1j}, \quad R_{4j} = R'_{3j}, \\ T_{2jk} &= T'_{1jk}, \quad T_{4jk} = T'_{3jk}, \\ U_{2jkl} &= U'_{1jkl}, \quad U_{4jkl} = U'_{3jkl}. \end{aligned} \quad (12)$$

Нетрудно получить дифференциальные уравнения для коэффициентов R_{ij} :

$$R''_{ij} + k^2 R_{ij} = 0, \quad i=1, 2, \quad j=1, \dots, 4. \quad (13)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} R_{11}(0) = 1, \quad R_{12}(0) = R_{13}(0) = R_{14}(0) = 0, \\ R'_{1j}(0) = 0, \quad j=1, \dots, 4, \\ R_{21}(0) = 1, \quad R_{21}(0) = R_{23}(0) = R_{24}(0) = 0, \\ R'_{2j}(0) = 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases} \quad (14)$$

Из формулы (8) следует, что $R_{33}(z) = 1$ и $R_{44}(z) = 1$.

Вычисляя функцию влияния $U(z, \xi)$ для (10), получим:

$$U(z, \xi) = \frac{1}{k} \sin(k(z - \xi)). \quad (15)$$

Теперь можно записать соотношение для $r(z)$ во втором порядке как

$$\begin{aligned} r(z) &= R_{11} r_0 + R_{12} r'_0 + R_{13} l + R_{14} \delta + \\ &+ T_{111} r_0^2 + T_{112} r_0 r'_0 + T_{113} r_0 l_0 + T_{114} r_0 \delta + \\ &+ T_{122} r_0'^2 + T_{123} r_0' l_0 + T_{124} r_0' \delta + \\ &+ T_{133} l_0^2 + T_{134} l_0 \delta + T_{144} \delta^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим (16) в (10). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, легко определим, что все aberrационные коэффициенты второго порядка являются решениями уравнений гармонических колебаний с «вы-



нуждающимися силами», равными произведениям абберрационных коэффициентов первого порядка:

$$f_{ijk}^T(\xi) = \sum_m \sum_n E_{imn} R_{mj}(\xi) R_{nk}(\xi). \quad (17)$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} T_{1jk}(0) = T'_{1jk}(0) = 0, \\ T_{2jk}(0) = T'_{2jk}(0) = 0, \\ T'_{2jk}(0) = T''_{1jk}(0) = f_{1jk}^T(0). \end{cases} \quad (18)$$

Действительно,

$$T''_{111} + k^2 T_{111} = 2k^2 R_{11} R_{41},$$

$$T''_{112} + k^2 T_{112} = 2k^2 (R_{11} R_{42} + R_{12} R_{41})$$

и т.д.

Из общего вида R-матрицы (8) и последних уравнений следует, что

$$\begin{aligned} T_{111}(z) = T_{112}(z) = T_{113}(z) = T_{122}(z) = \\ = T_{123}(z) = T_{133}(z) = T_{134}(z) = T_{144}(z) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая (15) и (12), легко определить ненулевые элементы T-матрицы, удовлетворяющие условию (18):

$$\begin{cases} T_{114}(z) = kz \sin kz, \\ T_{124}(z) = \frac{1}{k} \sin kz - z \cos kz, \\ T_{214}(z) = k \sin kz + k^2 z \cos kz, \\ T_{224}(z) = kz \sin kz. \end{cases} \quad (19)$$

С учетом членов второго порядка интеграл (7) запишется как

$$l = \frac{1}{2} \int_0^z (k^2 r^2 + r'^2) dz - \dots \quad (20)$$

Ненулевые матричные элементы 3-й строки T-матрицы имеют вид

$$\begin{cases} T_{311}(z) = \frac{k^2 z}{2}, \\ T_{322}(z) = \frac{z}{2}. \end{cases} \quad (21)$$

5. Уравнение третьего порядка

Ограничиваясь членами третьего порядка, можно записать, что

$$\begin{aligned} r(z) = R_{11} r_0 + R_{12} r'_0 + T_{114} r_0 \delta + T_{124} r'_0 \delta + \\ + U_{1111} r_0^3 + U_{1211} r_0^2 r'_0 + U_{1311} r_0^2 l_0 + U_{1411} r_0^2 \delta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + U_{1122} r_0 r_0'^2 + U_{1123} r_0 r_0' l_0 + U_{1124} r_0 r_0' \delta + \\ + U_{1133} r_0 l_0^2 + U_{1134} r_0 l_0 \delta + U_{1144} r_0 \delta^2 + \\ + U_{1222} r_0'^3 + U_{1223} r_0'^2 l_0 + U_{1224} r_0'^2 \delta + \\ + U_{1133} r_0 l_0^2 + U_{1134} r_0 l_0 \delta + U_{1144} r_0 \delta^2 + \\ + U_{1222} r_0'^3 + U_{1223} r_0'^2 l_0 + U_{1224} r_0'^2 \delta + \\ + U_{1133} r_0 l_0^2 + U_{1134} r_0 l_0 \delta + U_{1144} r_0 \delta^2 + \\ + U_{1333} l_0^3 + U_{1334} l_0^2 \delta + U_{1344} l_0 \delta^2 + U_{1444} \delta^3. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь подставляем (22) в (5). Все коэффициенты U_{ijkl} , также как и T_{ijk} , являются решениями уравнений гармонических колебаний с «возбуждающими силами»

$$\begin{aligned} f_{ijkl}^U = \sum_m \sum_n E_{imn} R_{mj} T_{nkl} + \\ + \sum_m \sum_n E_{imn} T_{mjk} R_{nl} + \sum_m \sum_n \sum_p F_{imnp} R_{nj} R_{mk} R_{pl} \end{aligned}$$

и начальными условиями:

$$\begin{cases} U_{1jkl}(0) = U'_{1jkl}(0) = U_{2jkl}(0) = 0, \\ U'_{2jkl}(0) = f_{1jkl}^U(0). \end{cases}$$

Для разложения (22) нетрудно получить следующие (не равные нулю) коэффициенты строки U_{ijkl} из уравнений:

$$\begin{aligned} U''_{1111} + k^2 U_{1111} = k^2 \left(\frac{B''}{2B} - k^2 \right) R_{11}^3 - \\ - k^2 R_{11} R_{21}^2 + k^2 \frac{B'}{B} R_{11}^2 R_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U''_{1211} + k^2 U_{1211} = 3k^2 \left(\frac{B''}{2B} - k^2 \right) R_{11}^2 R_{12} - \\ - 2k^2 R_{11} R_{21} R_{22} - k^2 R_{12} R_{21}^2 + \\ + 2k^2 \frac{B'}{B} R_{11} R_{12} R_{21} + k^2 \frac{B'}{B} R_{11}^2 R_{22} \end{aligned}$$

и т.д.

Окончательный вид искомым коэффициентов разложения $r(z)$ и $r'(z)$, учитывая (12), таков:

$$\begin{aligned} U_{1111} = \frac{1}{8} \left(\frac{3B''}{2B} - 4k^2 \right) kz \cos kz + \\ + k \frac{B'}{8B} kz \cos kz - k \frac{B'}{4B} \sin kz + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{B''}{32B} \cos kz \sin kz + k \frac{B'}{16B} \sin kz \sin 2kz, \\
 U_{1211} & = -\frac{1}{8k} \left(\frac{3B''}{2B} - k^2 \right) kz \cos kz + \\
 & + \frac{1}{2k} \left(\frac{3B''}{8B} - k^2 \right) \sin kz + \frac{B'}{8B} (kz \sin kz + \\
 & + \frac{3}{2} \sin kz \sin 2kz) + \frac{3B''}{16kB} \sin^3 kz, \\
 U_{1122} & = \frac{1}{8k^2} \left(\frac{3B''}{2B} - 4k^2 \right) kz \sin kz - \\
 & - \frac{3B''}{32k^2 B} \sin kz \sin 2kz + \frac{B'}{8kB} kz \cos kz - \\
 & - \frac{B'}{8kB} \sin kz + \frac{3B'}{8kB} \sin^3 kz, \\
 U_{1144} & = -\frac{1}{2} kz \sin kz - \\
 & - \frac{1}{2} k^2 z^2 \cos kz - \frac{1}{4} kz \cos kz \sin 2kz, \\
 U_{1222} & = -\frac{1}{2k^3} \left(\frac{3B''}{8B} - k^2 \right) (kz \cos kz - \sin kz) + \\
 & + \frac{B'}{8k^2 B} kz \sin kz + \frac{B''}{16k^3 B} \sin^3 kz - \\
 & - \frac{B'}{16k^2 B} \sin kz \sin 2kz, \\
 U_{1244} & = -\frac{1}{2} z \sin kz, \\
 U_{2111} & = \frac{k}{8} \left(\frac{3B''}{2B} - 4k^2 \right) kz \cos kz + \\
 & + \frac{k}{8} \left(\frac{B''}{B} - 4k^2 - k \frac{B'}{B} kz \right) \sin kz + \\
 & + \frac{3k}{16B} \left(\frac{B''}{2} \cos kz - kB' \sin kz \right) \sin 2kz, \\
 U_{2122} & = \frac{1}{2k} \left(\frac{3B''}{8B} - k^2 \right) kz \cos kz + \\
 & + \frac{1}{2k} \left(\frac{3B''}{4B} - k^2 - k^2 z \frac{B'}{4B} \right) \sin kz -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{9}{16} \left(\frac{B''}{2kB} \cos kz - \frac{B'}{B} \sin kz \right) \sin 2kz, \\
 U_{2222} & = -\frac{1}{2k} \left(\frac{3B''}{8B} - k^2 \right) kz \sin kz + \\
 & + \frac{B'}{8kB} kz \cos kz + \frac{B'}{4kB} \sin kz + \\
 & + \frac{3}{16k} \left(\frac{B''}{2kB} \sin kz - \frac{B'}{B} \cos kz \right) \sin 2kz, \\
 U_{2144} & = -k \sin kz - 2k^2 z \cos kz + \\
 & + \frac{k^3 z^2}{2} \sin kz + \frac{3k}{4} \sin kz \sin 2kz, \\
 U_{2244} & = -\frac{1}{2} (\sin kz + kz \cos kz).
 \end{aligned}$$

Подставляя разложения для $r(z)$ и $r'(z)$ до второго порядка в (7), получим следующие ненулевые элементы строки U_{3jki} :

$$\left\{ \begin{aligned}
 U_{3114}(z) & = -k(1 - \cos kz), \\
 U_{3214}(z) & = \frac{1}{2} \sin^2 kz, \\
 U_{3224}(z) & = \frac{1}{2k} \left(kz - \frac{1}{2} \sin 2kz \right).
 \end{aligned} \right.$$

Для дальнейших вычислений величин $r(z)$ и $r'(z)$ можно привести следующую удобную формулу:

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = [R + T_4 \cdot \delta + U_{11} \cdot r_0^2 + U_{22} \cdot r_0'^2 + \\
 + U_{44} \cdot \delta^2] \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_0' \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} T_{114} & T_{124} \\ T_{214} & T_{224} \end{pmatrix},$$

$$U_{11} = \begin{pmatrix} U_{1111} & U_{1211} \\ U_{2111} & U_{2211} \end{pmatrix}, U_{22} = \begin{pmatrix} U_{1122} & U_{1222} \\ U_{2122} & U_{2222} \end{pmatrix},$$

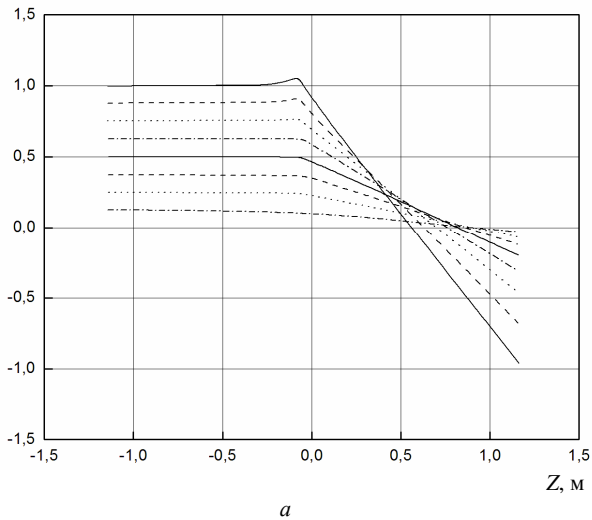
$$U_{44} = \begin{pmatrix} U_{1144} & U_{1244} \\ U_{2144} & U_{2244} \end{pmatrix}.$$



Заключение

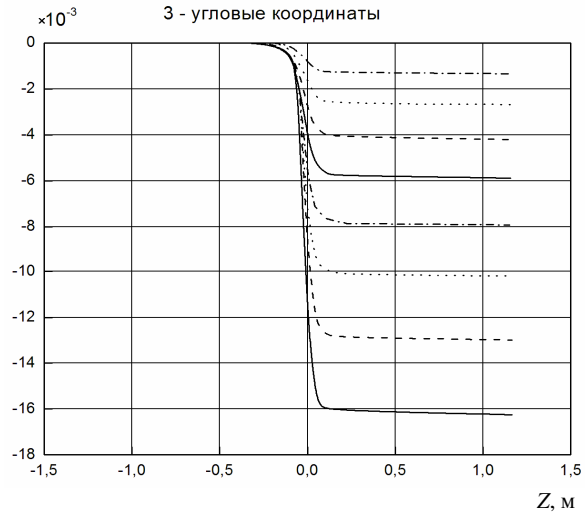
Для получения решения нелинейных уравнений представление (11) оказалось продуктивным. Результат прохождения пучка

Радиус R , см



a

Угол R , рад



б

Траектории частиц пучка (*a*) и угловые координаты частиц вдоль пучка (*б*) в реальном магнитном поле соленоида. Приближение третьего порядка.

Внешние частицы пучка пересекают осевую линию намного раньше места предполагаемого фокуса линзы. Это приводит к существенному искривлению фазовых прямых. Уже к $z = 0.2$ м движение пучка перестает быть ламинарным, формируется трубчатая структура плотности тока. К $z = 0.4$ м

образуется довольно отчетливое гало вокруг центральной плотной области. В дальнейшем подобная структура сохраняется. Отметим большое влияние aberrации третьего порядка в приведенной линзе, тогда как хроматическая aberrация существенна лишь до $z = 0.4$ м.