



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 535.14; 537.8

AD НОС КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

В. И. Цой

Цой Валерий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиофизики и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, tsoyvi@info.sgu.ru

Предложен вариант устранения имеющегося несоответствия между экспериментальными импульсами фотона в прозрачной среде с дисперсией и теоретическим импульсом фотона в схеме ad hoc квантования. Показано, что при квантовании электромагнитных импульсов в среде с дисперсией рационально исходить из обобщенной формулы для импульса Минковского. Обобщенная формула имеет вид формулы для среды без дисперсии с коэффициентом, учитывающим наличие дисперсии, и соответствует сохраняющейся величине. Этот коэффициент совпадает с коэффициентом, отличающим плотность энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией от плотности энергии без дисперсии. Квантование импульса, заданного в такой форме, приводит к теоретическому импульсу фотона в среде, согласующемуся с импульсами, передаваемыми излучающим или поглощающим частицам внутри среды. Рассмотренная схема квантования включает в себя случай, когда среда имеет отрицательные электрическую и магнитную проницаемость (случай левой среды).

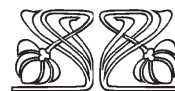
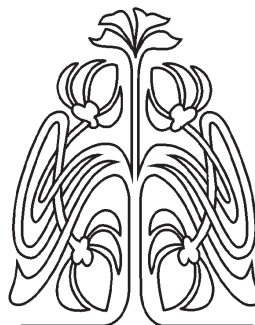
Ключевые слова: импульс Абрагама, импульс Минковского, импульс фотона в среде, фотон в левой среде.

DOI: 10.18500/1817-3020-2017-17-1-5-10

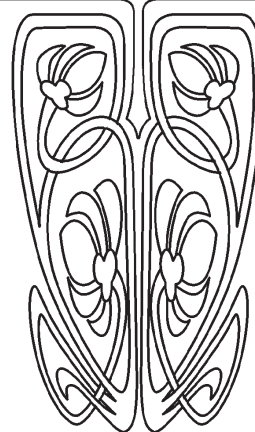
Введение

Проблема описания сил и импульсов в среде с электромагнитным полем является одной из постоянно дискутируемых общих проблем электродинамики и оптики [1–10]. Эти дискуссии важны также для понимания прикладных задач, в частности, в связи с оптическими силами – давлением отраженной, пропущенной и поглощенной волнами, а также объемными силами [4]. Одна из объемных сил – сила Абрагама в прозрачном диэлектрике. Сила Абрагама связана с сохранением скорости центра энергии в системе поле–вещество и была обнаружена экспериментально в работе [11]. Не связанный с веществом «собственный» импульс поля в соответствии с теорией относительности определяется плотностью потока энергии \mathbf{S} излучения и равен плотности полевого импульса Абрагама $\mathbf{g}^A = \mathbf{s}^0 (S/c^2)$. Этот импульс был зарегистрирован на оптических частотах при выходе излучения из оптического волокна [12].

В случае однородного диэлектрика без дисперсии с электрической и магнитной проницаемостью $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ допустимо такое описание импульса электромагнитного поля, при котором никакие силы в среде не рассматриваются. В этом случае поле описывается



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





плотностью импульса Минковского $\mathbf{g}^M = \varepsilon\mu \mathbf{g}^A$ [4–10]. При этом энергия поля в среде переносится со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, и импульс Абрагама должен уменьшаться, а импульс Минковского увеличиваться пропорционально показателю преломления $n_{ph} = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Эксперименты [13] с высокой точностью показали, что импульс, переданный зеркалу, погруженному в среду, увеличивается пропорционально показателю преломления, в том числе при наличии дисперсионной зависимости показателя преломления от частоты $n = n(\omega)$. В этом случае сохранение импульса вполне описывается по Минковскому.

Таким образом, в макроскопической электродинамике используются по крайней мере два способа описания импульса, по Абрагаму и по Минковскому. Этим двум способам должны соответствовать две меры импульса фотона, \mathbf{p}^A и \mathbf{p}^M .

Импульсы макроскопической электродинамики и импульсы фотонов в среде

Макроскопическая плотность импульса поля, передаваемого внутри среды, именно плотность Минковского \mathbf{g}^M , соответствует определяемому волновым вектором $\mathbf{k} = k\mathbf{k}^0$ импульсу фотона в среде $\mathbf{p}_{phot} = \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}_0 n_{ph} = \mathbf{p}^M$. Для этого импульса и энергии фотона $E_{phot} = \hbar\omega$ справедливы законы сохранения [6]. Эти характеристики для фотона в среде были впервые введены В. Л. Гинзбургом в квантовой теории черенковского излучения [14]. В этой связи следует упомянуть предсказанный в работе [15] и экспериментально обнаруженный в работе [16] обратный эффект Черенкова в среде с отрицательными проницаемостями. Тот факт, что направление излучения в этом случае образует тупой угол с направлением сверхсветовой скорости в среде излучающей частицы, также можно объяснить тем, что импульс фотона в среде равен $\hbar\mathbf{k}$. Нужно добавить, что сохранение импульсов $\hbar\mathbf{k}$ согласуется с условиями фазового синхронизма в нелинейной оптике [4].

Прямое измерение импульса фотона, распространяющегося в среде, было осуществлено путем экспериментального определения импульса поглощающего атома, и оказалось, что импульс отдачи атома $\mathbf{p}_{atom} = \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}_0 n_{ph} = \mathbf{p}^M$

[17]. С другой стороны, в полном соответствии с представлением о скорости распространения энергии было подтверждено экспериментально, что одиночные фотоны проходят через стеклянную пластинку не с фазовой скоростью $v = c/n_{ph}$, а с групповой скоростью $v_{gr} = c/n_{gr}$ [18]. Это приводит к заключению об импульсе фотона $\mathbf{p}_{phot} = \hbar\omega\mathbf{v}_{gr}/c^2 = \mathbf{p}_0/n_{gr} = \mathbf{p}^A$ в соответствии с макроскопической плотностью импульса Абрагама $\mathbf{g}^A = \mathbf{S}/c^2$. Таким образом, результаты измерений над одиночными фотонами соответствуют макроскопическим измерениям в том смысле, что импульсы Абрагама и Минковского дополняют друг друга и равны для фотонов величинам

$$\mathbf{p}^A = \hbar\omega\mathbf{v}_{gr}/c^2 = \mathbf{p}_0/n_{gr}, \quad (1)$$

$$\mathbf{p}^M = \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}_0 n_{ph}. \quad (2)$$

Квантование электромагнитных импульсов

В среде без дисперсии групповой и фазовой показатели преломления совпадают, $n_{gr} = n_{ph}$, и импульсы Абрагама и Минковского для фотона соотносятся так же, как в макроскопической электродинамике, $\mathbf{p}^M = \mathbf{p}^A n_{ph}^2$. Однако в случае среды с дисперсией вопрос о соответствии макроскопического и квантового описания импульсов поля не тривиален. Прделанное в работе [19] «ad hoc» квантование электромагнитных импульсов привело к выводу о том, что теоретическая величина импульса фотона по Абрагаму совпадает, а теоретическая величина импульса по Минковскому отличается от полученных экспериментально величин (1), (2):

$$\mathbf{p}_{GC}^A = \mathbf{p}_0/n_{gr}, \quad \mathbf{p}_{GC}^M = \mathbf{p}_0(n_{ph}^2/n_{gr}). \quad (3)$$

Заметим, что вытекающее из последних выражений соотношение $\mathbf{p}_{GC}^M = \mathbf{p}_{GC}^A n_{ph}^2$ совпадает с соотношением между макроскопическими импульсами в среде без дисперсии. Возникает вопрос: почему в среде с дисперсией сохраняется не импульс Минковского (3), а «канонический импульс» (2)? Один из возможных ответов на этот вопрос предложен в работе [20], в которой предполагается, что при квантовании импульса Минковского кванты поля в среде с дисперсией являются совокупностью поляритонов, каждый из которых вносит свою долю (3) в импульс (2). В работе [21] разработана схема экспериментальной проверки этого предположения.



Покажем, что проблему можно решить, не прибегая к картине поляритонов. Выразим энергию электромагнитного поля W в среде с дисперсией через комплексные амплитуды $A(\mathbf{k})$ пространственных гармоник векторного потенциала. Следуя работе [19], разложим векторный потенциал по поляризованным (с векторами поляризации \mathbf{e}_s) поперечным, $\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{k} = 0$, плоским волнам в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \overline{A}(\mathbf{r}, t) + \overline{A}^*(\mathbf{r}, t) = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A_s(\mathbf{k}) \mathbf{e}_s \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t) + cc. \end{aligned} \quad (4)$$

Пользуясь формулой Бриллюэна для плотности энергии w в среде с дисперсией [1]

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} \langle \mathbf{E}^2 \rangle + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} \langle \mathbf{H}^2 \rangle \right) = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} \left\langle \left(\frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 \right\rangle + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} \frac{1}{\mu^2} \langle (\text{rot } \mathbf{A})^2 \rangle \right], \end{aligned} \quad (5)$$

получим распределение энергии поля по осцилляторам

$$W = \int w d^3r = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(\frac{n_{ph}/\mu}{v_{gr}/c} \right) A_s^*(\mathbf{k}) A_s(\mathbf{k}). \quad (6)$$

В этом выражении дисперсия проявляется посредством групповой скорости

$$\begin{aligned} v_{gr} &= \frac{c}{n_{ph} + \omega(dn_{ph}/d\omega)} = \\ &= v_{ph} \frac{1}{1 + (\omega/2\varepsilon)(d\varepsilon/d\omega) + (\omega/2\mu)(d\mu/d\omega)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что в случае плоской волны плотность энергии (5) можно представить в виде плотности энергии в отсутствие дисперсии w_0 , умноженной на коэффициент v_{ph}/v_{gr} , учитывающий дисперсию:

$$w = \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{4\pi} \left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} + \frac{\omega}{2\mu} \frac{\partial\mu}{\partial\omega} \right) = w_0 \frac{v_{ph}}{v_{gr}}. \quad (8)$$

Согласно последней формуле материалы с отрицательными проницаемостями (левые среды) можно отличать от обычных материалов, полагая формально $w_0 < 0$ и $v_{ph}/v_{gr} < 0$, $v_{ph}v_{gr} < 0$. В картине с использованием разложения (4) в спектр волновых векторов, направление которых совпадает с направлением фазовых скоростей

$\mathbf{v}_{ph} = d\omega/d\mathbf{k}$, фазовая скорость должна считаться положительной, $v_{ph} > 0$. Тогда для левых сред групповая скорость должна считаться отрицательной, $v_{gr} < 0$.

Энергия (6) представлена суммой энергии осцилляторов поля, следовательно, суммой энергии фотонов

$$W = \int w d^3r = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar\omega(k) \alpha_s^*(\mathbf{k}) \alpha_s(\mathbf{k}). \quad (9)$$

Этот интеграл соответствует гамильтониану набора осцилляторов

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar\omega(k) a_s^+(\mathbf{k}) a_s^-(\mathbf{k}) \quad (10)$$

с операторами рождения кванта a_s^+ и уничтожения a_s^- , подчиненными условию коммутации [19]

$$[a_r^-(\mathbf{k}) a_s^+(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (11)$$

При этом оператору $\hat{n}(\mathbf{k}) = a_s^+(\mathbf{k}) a_s^-(\mathbf{k})$ можно придать смысл оператора плотности числа фотонов в шкале пространственных частот ($k_\alpha/2\pi$). Таким образом, квантование поля в среде с дисперсией можно осуществлять заменой комплексной амплитуды пространственной гармоники векторного потенциала $A_s(\mathbf{k})$ на содержащее оператор уничтожения $a_s^-(\mathbf{k})$ выражение по правилу

$$A_s(\mathbf{k}) \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} v_{ph} v_{gr} \mu a_s^-(\mathbf{k}). \quad (12)$$

В соответствии с разложением (4) по пространственным частотам и определением плотности импульса Абрагама $\mathbf{g}^A = (1/4\pi c)(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ представим полный импульс Абрагама \mathbf{G}^A в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^A &= \int \mathbf{g}^A d^3r = \int \left(\frac{1}{4\pi c} \right) \left(-\frac{1}{\mu c} \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \times \text{rot } \mathbf{A} \right) d^3r = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k\omega}{\mu c^2} A_s^*(\mathbf{k}) A_s(\mathbf{k}) \mathbf{k}^0 = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{v_{ph} v_{gr}}{c^2} \frac{\hbar\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} a_s^+(\mathbf{k}) a_s^-(\mathbf{k}) \mathbf{k}^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Обратим внимание на то, что волновое число $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$ вещественно, если электрическая и магнитная проницаемости имеют одинаковый, положительный или отрицательный знак. Одновременная смена знака проницаемостей сопровождается изменением направления импульса



Абрагама (13) на противоположное вследствие изменения знака групповой скорости v_{gr} . С учетом этого процедура квантования (11) приводит к оператору импульса Абрагама

$$\hat{\mathbf{G}}^A = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega}{c} \frac{v_{gr}}{c} \mathbf{k}^0 \hat{n}(\mathbf{k}) \quad (14)$$

в согласии с тем, что в среде с отрицательной групповой скоростью $v_{gr} < 0$ направление потока энергии противоположно направлению волнового вектора. Из последнего выражения видно, что модуль импульса Абрагама одного фотона дается, как и ожидалось, формулой (1).

Обратимся к определению плотности импульса Минковского без дисперсии $\mathbf{g}_0^M = (1/4\pi c)(\mathbf{D} \times \mathbf{B})$ [4, 22] и материальным уравнениям для сред с дисперсией [1]

$$\partial \bar{\mathbf{D}} / \partial t = -i\omega \epsilon \bar{\mathbf{E}} + (d\omega \epsilon / d\omega) (\partial \bar{\mathbf{E}}_0 / \partial t) \exp(-i\omega t), \quad (15)$$

$$\partial \bar{\mathbf{B}} / \partial t = -i\omega \mu \bar{\mathbf{H}} + (d\omega \mu / d\omega) (\partial \bar{\mathbf{H}}_0 / \partial t) \exp(-i\omega t). \quad (16)$$

Примем также во внимание соотношение (7) между групповой и фазовой скоростями. Используя эти выражения, можно показать, что в среде с дисперсией сохраняется обобщенный импульс Минковского [10] с плотностью

$$\mathbf{g}_d^M = \mathbf{g}_0^M (v_{ph}/v_{gr}) = \mathbf{k}^0 (w_0/v_{ph}) (v_{ph}/v_{gr}). \quad (17)$$

Так как плотность импульса по Абрагаму в среде с дисперсией равна

$$\mathbf{g}_d^A = \mathbf{S}/c^2 = \mathbf{k}^0 (w v_{gr}/c^2), \quad (18)$$

получим из равенств (8), (17), (18) соотношение между плотностями импульса Минковского и Абрагама в среде с дисперсией:

$$\mathbf{g}_d^M = \mathbf{k}^0 (w v_{gr}/v_{ph}^2) (v_{ph}/v_{gr}) = \mathbf{g}_d^A n_{ph} n_{gr}. \quad (19)$$

Таким образом, полный импульс Минковского определяется такими же интегралами, как (13), (14), но только подынтегральные выражения приобретают множитель $n_{ph} n_{gr}$. Следовательно, оператор импульса Минковского имеет вид

$$\hat{\mathbf{G}}^M = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega}{c} n_{ph} \mathbf{k}^0 \hat{n}(\mathbf{k}), \quad (20)$$

т.е. соответствующий обобщенному импульсу Минковского импульс одного фотона описывается формулой (2).

Заключение

Хотя к настоящему времени сложилось достаточно полное общее представление об

электромагнитных импульсах и силах в среде без дисперсии, остаются вопросы, касающиеся импульсов в средах с дисперсией. В частности, нет единого мнения о направлении импульса поля в средах с отрицательными проницаемостями. Кроме того, нет однозначного соответствия между классическими импульсами и импульсами фотонов в схеме квантования: имеется различие между полученными экспериментально и получаемыми теоретически импульсами фотонов. В данной статье показано, что к согласующемуся с экспериментальными данными импульсу фотона в среде с дисперсией приводит квантование обобщенного импульса Минковского, рассмотренного в работе [10]. В этой связи стоит упомянуть замечание В. Л. Гинзбурга относительно того, что результаты квантовой теории излучения в среде должны «получаться и при правильном применении выражений для тензора энергии-импульса поля в среде» [6].

Список литературы

1. Ландау Д. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. 504 с.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электричество. М.: Мир, 1966. 343 с.
4. Griffiths D. J. Resource Letter EM-1: Electromagnetic Momentum // Amer. J. Phys. 2012. Vol. 75. P. 7–18. DOI: 10.1119/1.3641979.
5. Скобельцын Д. В. О тензоре импульс-энергии электромагнитного поля // УФН. 1973. Т. 110. С. 253–292. DOI: 10.3367/UFNr.0110.197306d.0253.
6. Гинзбург В. Л. О законах сохранения энергии и импульса при излучении электромагнитных волн (фотонов) в среде и о тензоре энергии-импульса в макроскопической электродинамике // УФН. 1973. Т. 110. С. 309–319. DOI: 10.3367/UFNr.0110.197306f.0309.
7. Веселаго В. Г. Перенос энергии, импульса и массы при распространении электромагнитной волны в среде с отрицательным преломлением // УФН. 2009. Т. 179. С. 689–694. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200906j.0689.
8. Макаров В. П., Рухадзе А. А. Сила, действующая на вещество в электромагнитном поле // УФН. 2009. Т. 179. С. 995–1001. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200909e.0995.
9. Давидович М. В. О законах сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в среде и при дифракции на проводящей пластине // УФН. 2010. Т. 180. С. 623–638. DOI: 10.3367/UFNr.0180.201006e.0623.
10. Топтыгин И. Н., Левина К. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в средах с дисперсией // УФН. 2016. Т. 186. С. 146–158. DOI: 10.3367/UFNr.0186.201602c.0146.



11. Walker G. B., Lahoz D. G. Experimental observation of Abraham force in a dielectric // *Nature*. 1975. Vol. 253. P. 339–340.
12. She W., Yu J., Feng R. Observation of a Push Force on the End Face of a Nanometer Silica Filament Exerted by Outgoing Light // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101. P. 243601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.243601.
13. Jones R. V., Leslie B. The measurement of optical radiation pressure in dispersive media // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1978. Vol. 360. P. 347–363. DOI: 10.1098/rspa.1978.0072.
14. Франк И. М. Оптика источников света, движущихся в преломляющих средах // *УФН*. 1959. Т. 68. С. 397–415.
15. Pafomov V. E. Transition Radiation and Cerenkov Radiation // *Soviet Physics JETP*. 1959. Vol. 36. P. 1321–1324.
16. Sheng Xi, Hongsheng Chen, Tao Jian., Lixin Ran, Ji-angtao Huangfu, Bac-Ian Wu, Jin Au Kong, Min Chen. Experimental Verification of Reversed Cerenkov Radiation in Left-Handed Metamaterial // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 103. P. 194801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.194801.
17. Campbell G. K., Leanhardt A. E., Mun J., Boyd M., Streed W., Ketterle W., Pritchard D. E. Photon Recoil Momentum in Dispersive Media // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 170403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.170403.
18. Steinberg A. M., Kwiat P. G., Chiao R. Y. Dispersion Cancellation in a Measurement of the Single-Photon Propagation Velocity in Glass // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68. P. 2421–2424. DOI: 10.1103/PhysRevLett.68.2421.
19. Garrison J. C., Chiao R. Y. Canonical and kinetic forms of the electromagnetic momentum in an ad hoc quantization scheme for a dispersive dielectric // *Phys. Rev. A*. 2004. Vol. 70. P. 053826. DOI: 10.1103/PhysRevA.70.053826.
20. Barnett S. M. Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 104. P. 070401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.070401.
21. Wen Zhuo Zhang, Peng Zhang, Ru-Quan Wang, Wu-Ming Liu. Testing the equivalence between the canonical and Minkowski momentum of light with ultracold atoms // *Rev. A*. 2012. Vol. 85. 053604. DOI: 10.1103/PhysRevA.85.053604.
22. Milonni P. W., Boyd R. W. Recoil and Photon Momentum in a Dielectric // *Laser Physics*. 2005. Vol. 15. P. 1432–1438.

Образец для цитирования:

Цой В. И. AD НОС квантование электромагнитных импульсов в среде с дисперсией // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*. 2017. Т. 17, вып. 1. С. 5–10. DOI: 10.18500/1817-3020-2017-17-1-5-10.

AD НОС Quantization of the Electromagnetic Momentum for a Dispersive Medium

V. I. Tsoy

Valery I. Tsoy, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, tsoyvi@info.sgu.ru

Background and Objectives: There are two types of linear field momentum in the macroscopic electrodynamics: Minkowski momentum, and Abraham momentum. The first is conserved inside the uniform substance, the second is included into the momentum balance in relation to the center of energy. These two quantities must comply with two measures of photon momentum. Unfortunately, the ad hoc quantization of the Minkowski momentum in dispersive medium leads to the theoretical photon momentum, which differs from the observed momentum. To overcome the discrepancy, it was assumed that field quanta are polaritons in medium with dispersion, and the photon momentum is defined by momenta of these polaritons. **Methods:** This paper proposes another way to eliminate the inconsistency between experimental photon momentum and photon momentum in the ad hoc quantization scheme. The assumption about polaritons is not used in this approach. **Results and Conclusion:** It is shown that a generalization of Minkowski momentum formula is needed in the quantization scheme for a transparent dispersive medium. The factor that takes into account the dispersion should be used in the formula. This factor exactly the multiplier that translates the field energy density in nondispersive medium into the energy density in dispersive one. The

proposed quantization scheme also applied to the case of materials with negative permittivity and permeability (left-handed media). **Key words:** Abraham momentum, Minkowski momentum, momentum of the photon in the medium, photon in the left-handed medium.

References

1. Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd ed. Vol. 8. Butterworth–Heinemann, 1984. 460 p. (Russ. ed.: Landau L. D., Lifshitz E. M. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow: Nauka Publ., 1982. 620 p.).
2. Tamm I. E. *Osnovy teorii elektrichestva* [Principles of theory of electricity]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 504 p. (in Russian).
3. Feynman R., Leighton R., Sands M. *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. 2. Addison-Wesley, 1964. 536 p. (Russ. ed.: Feynman R., Leyton R., Sands M. *Feynmanovskie lektsii po fizike. Elektrichestvo* [The Feynman Lectures on Physics. Electricity]. Moscow, Mir Publ., 1966. 343 p.).
4. Griffiths D. J. Resource Letter EM-1: Electromagnetic Momentum. *Amer. J. Phys.*, 2012, vol. 80, pp. 7–18. DOI: 10.1119/1.3641979.
5. Skobel'tsyn D. V. The momentum-energy tensor of the electromagnetic field. *UFN* [Phys. Usp.], 1973, vol. 110, pp. 253–292. DOI: 10.3367/UFNr.0110.197306d.0253 (in Russian).



6. Ginzburg V. L. The laws of conservation of energy and momentum in emission on electromagnetic waves (photons) in a medium and the energy-momentum tensor in macroscopic electrodynamics. *UFN [Phys. Usp.]*, 1973, vol. 110, pp. 309–319. DOI: 10.3367/UFNr.0110.197306f.0309 (in Russian).
7. Veselago V. G. Energy, linear momentum and mass transfer by an electromagnetic wave in a negative refraction medium]. *UFN [Phys. Usp.]*, 2009, vol. 179, pp. 689–694. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200906j.0689 (in Russian).
8. Makarov V. P., Rukhadze A. A. Force on matter in an electromagnetic field. *UFN [Phys. Usp.]*, 2009, vol. 179, pp. 995–1001. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200909e.0995 (in Russian).
9. Davidovich M. V. On energy and momentum conservation laws for an electromagnetic field in a medium or at diffraction on a conducting plate. *UFN [Phys. Usp.]*, 2010, vol. 180, pp. 623–638. DOI: 10.3367/UFNr.0180.201006e.0623 (in Russian).
10. Toptygin I. N., Levina K. Energy-momentum tensor of the electromagnetic field in dispersive media. *UFN [Phys. Usp.]*, 2016, vol. 59, pp. 141–152. DOI: 10.3367/UFNr.0186.201602c.0146 (in Russian).
11. Walker G. B., Lahoz D. G. Experimental observation of Abraham force in a dielectric. *Nature*, 1975, vol. 253, pp. 339–340.
12. She W., Yu J., Feng R. Observation of a Push Force on the End Face of a Nanometer Silica Filament Exerted by Outgoing Light. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, pp. 243601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.243601.
13. Jones R. V., Leslie B. The measurement of optical radiation pressure in dispersive media. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1978, vol. 360, pp. 347–363. DOI: 10.1098/rspa.1978.0072.
14. Frank I. M. Optika istochnikov sveta dvizhuschikhsya v prelomlyayuschikhsya sredakh [Optics Light Sources Moving in Refractive Media], *UFN*, 1959, vol. 68, pp. 397–415 (in Russian).
15. Pafomov V. E. Transition Radiation and Cerenkov Radiation. *Soviet Physics JETP*, 1959, vol. 36, pp. 1321–1324.
16. Sheng Xi, Hongsheng Chen, Tao Jian., Lixin Ran, Jiangtao Huangfu, Bac-Ian Wu, Jin Au Kong, Min Chen. Experimental Verification of Reversed Cherenkov Radiation in Left-Handed Metamaterial. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 103, pp. 194801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.194801.
17. Campbell G. K., Leanhardt A.E., Mun J., Boyd M., Streed W., Ketterle W., Pritchard D. E. Photon Recoil Momentum in Dispersive Media. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 94, pp. 170403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.170403.
18. Steinberg A. M., Kwiat P. G., Chiao R. Y. Dispersion Cancellation in a Measurement of the Single-Photon Propagation Velocity in Glass. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, vol. 68, pp. 2421–2424. DOI: 10.1103/PhysRevLett.68.2421.
19. Garrison J. C., Chiao R. Y. Canonical and kinetic forms of the electromagnetic momentum in an ad hoc quantization scheme for a dispersive dielectric. *Phys. Rev. A*, 2004, vol. 70, pp. 053826. DOI: 10.1103/PhysRevA.70.053826.
20. Barnett S. M. Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 104, pp. 070401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.070401.
21. Wen Zhuo Zhang, Peng Zhang, Ru-Quan Wang, Wu-Ming Liu. Testing the equivalence between the canonical and Minkowski momentum of light with ultracold atoms. *Phys. Rev. A*, 2012, vol. 85, pp. 053604. DOI: 10.1103/PhysRevA.85.053604.
22. Milonni P. W. Boyd R. W. Recoil and Photon Momentum in a Dielectric. *Laser Physics*, 2005, vol. 15, pp. 1432–1438.

Cite this article as:

Tsoy V. I. AD HOC Quantization of the Electromagnetic Momentum for a Dispersive Medium. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2017, vol. 17, iss. 1, pp. 5–10 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2017-17-1-5-10.
