



РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

УДК 537.86

ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ И РАЗМЕРНОСТЬ АФРАЙМОВИЧА–ПЕСИНА В НЕАВТОНОМНОМ КОНСЕРВАТИВНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

Н. И. Семенова¹, Т. И. Галактионова², В. С. Анищенко³

¹Семенова Надежда Игоревна, аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, semenovani@info.sgu.ru

²Галактионова Татьяна Игоревна, магистрант кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, galaktozat@ya.ru

³Анищенко Вадим Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, wadim@info.sgu.ru

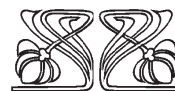
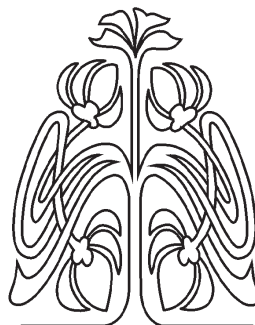
Одной из фундаментальных особенностей временной динамики является возврат Пуанкаре. Показано, что статистика времен возврата при глобальном подходе зависит от топологической энтропии h . Случай $h > 0$ (множество с перемешиванием) уже был исследован теоретически, а выводы теории были подтверждены результатами численного моделирования. Случай $h = 0$ (множество без перемешивания) также был исследован теоретически, но недавние результаты численного моделирования выявили некоторые расхождения с теорией. В частности, было получено, что зависимость средних минимальных времен возврата в окрестность размера ε в отображении окружности является ступенчатой функцией («Лестница Фибоначчи»). В данной работе методом численного анализа исследуются возвраты Пуанкаре на инвариантных кривых в стробоскопическом сечении неавтономного консервативного осциллятора при глобальном подходе. Получена ступенчатая зависимость среднего минимального времени возврата от размера ε -окрестности возврата («Лестница Фибоначчи»), а также найдены условия возникновения этой зависимости и влияние на нее амплитуды внешнего гармонического воздействия. Найдена размерность Афраймовича–Песина, как в случае рационального, так и иррационального отношения собственной и внешней частоты.

Ключевые слова: возвраты Пуанкаре, гамильтоновы системы, размерность Афраймовича–Песина, число вращения, «Лестница Фибоначчи», неавтономный консервативный осциллятор, множество без перемешивания, топологическая энтропия, золотое сечение, время возврата.

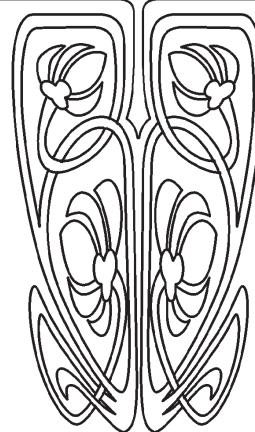
DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-4-195-203

Введение

Как известно, динамические системы со сложным характером траекторий можно описывать с точки зрения геометрии предельных множеств в фазовом пространстве, а также с точки зрения эволюции фазовых траекторий во времени. Одной из фундаментальных особенностей временной динамики систем является возврат Пуанкаре. Возвращаемость по Пуанкаре означает, что практически любая траектория, стартующая из некоторой точки \vec{x}_0 предельного множества, во времени бесконечное число раз пройдет сколь угодно близко от



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





начального состояния. Системы, обладающие таким свойством, называются устойчивыми по Пуассону. Для динамических систем с заданной мерой статистические характеристики времен возврата детально исследованы как теоретически [1, 2], так и с помощью численного эксперимента [3, 4].

Существует два подхода к расчетам возвратов Пуанкаре: локальный и глобальный. Идея локального подхода заключается в расчете возвратов Пуанкаре в некоторую ε -окрестность заданного начального состояния [2]. В случае же глобального подхода возвраты Пуанкаре рассчитываются для всего множества в целом, т.е. все множество разбивают на отрезки, квадраты или кубы (в зависимости от размерности системы) размером ε , и для каждого считается минимальное время возврата с последующим усреднением [3, 5, 6]. Одной из характеристик последовательности времен возврата при глобальном подходе является размерность Аффраймовича–Песина, которая была введена в статье [5].

Показано, что статистика времен возврата при глобальном подходе зависит от топологической энтропии h_T . Случай $h_T > 0$, т.е. множество с перемешиванием, уже был детально исследован теоретически [3, 5, 6], а выводы теории подтверждены результатами численных экспериментов [4, 7–9]. Что же касается множеств без перемешивания, $h_T = 0$, то здесь ситуация иная. В работах [3, 5, 6] были получены строгие теоретические результаты, которые были подтверждены численно и вскрыли ряд интересных особенностей [9, 10].

Рассмотрим их на примере отображения окружности:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + K \sin \theta_n \pmod{2\pi}, \quad (1)$$

где Δ – параметр линейного сдвига на окружности, K – параметр нелинейности. При $K = 0$ отображение (1) трансформируется в линейное отображение:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta \pmod{2\pi}, \quad (2)$$

в котором число вращения зависит от параметра Δ как $\rho = \Delta/2\pi$. Число вращения в общем случае определяется как среднее приращения угла за одну итерацию, при этом расчет угла отображения в системах (1) и (2) осуществляется (без знака $\pmod{2\pi}$) как

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n}. \quad (3)$$

Для системы (2) было показано, что при иррациональном числе вращения ρ зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ от размера области возврата ε представляет собой ступенчатую функцию (рис. 1), названную «Лестницей Фибоначчи» [10].

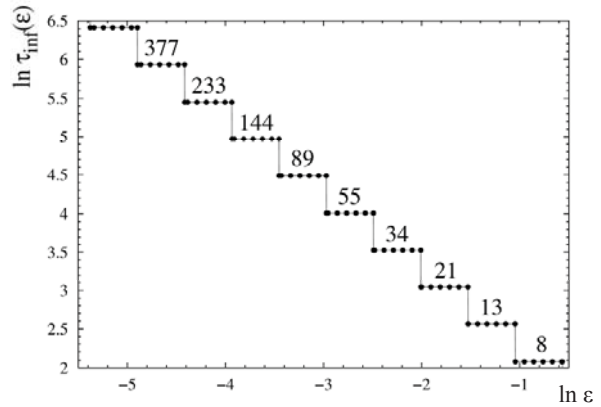


Рис. 1. Зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности в отображении окружности при числе вращения $\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, «Лестница Фибоначчи»

Стоит отметить, что среднее минимальное время возврата является одной из основных характеристик глобальной теории возвратов Пуанкаре. Для расчета $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ множество фазовых траекторий покрывается ячейками элементарного объема $\xi_i (i = 1, 2, \dots, N)$ размера ε . Далее, для каждого ξ_i вычисляется минимальное время возврата Пуанкаре $\tau_{\text{inf}}(\xi_i)$. После этого вычисляется $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ как

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_{\text{inf}}(\xi_i). \quad (4)$$

Доказано [3,5], что для линейного отображения окружности среднее минимальное время возврата Пуанкаре можно определить следующим образом

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{-\frac{d}{\alpha_C}} \quad (5)$$

или

$$\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\alpha_C} \ln \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad d = 1,$$

где α_C – размерность Аффраймовича–Песина, которая может быть вычислена как коэффициент угла наклона прямой $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ от $\ln \varepsilon$.

Показано [10], что «Лестница Фибоначчи» обладает следующими свойствами.

1. Последовательность значений $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ с уменьшением величины ε строго совпадает с последовательностью знаменателей, подходящих к числу вращения ρ дробей $p_i/q_i (i = 1, 2, \dots)$. На



рис. 1 представлен случай золотого сечения, т.е. когда число вращения $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. В этом случае

знаменателями подходящих дробей являются числа Фибоначчи. В случае серебряного сечения числом вращения является $\rho = \sqrt{2} + 1$, а в качестве подходящих дробей выступают числа Пелля.

2. При изменении величины ε в пределах любой из ступенек лестницы регистрируются три времени возврата: $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$, причем $\tau_1 = \tau_{\text{inf}}$. Это свойство следует из теоремы Слейтера [11].

3. В случаях золотого и серебряного сечений, для которых выполняется условие $q_i = p_{i+1}$, ширина и высота ступенек лестницы (см. рис. 1) определяются числом вращения и равны $|\ln \rho|$.

Отметим, что статистика возвратов численно исследована применительно к диссипативным эргодическим системам. Представляет интерес провести соответствующие расчеты применительно к консервативным системам.

В фазовом пространстве гамильтоновых систем могут существовать различные фрактальные объекты, сложность структуры которых отражает сложность поведения орбит [3]. По этой причине этот тип систем представляет собой интерес с точки зрения возвратов Пуанкаре. Гамильтоновы системы исследовались с точки зрения локальных возвратов Пуанкаре достаточно давно. В последнее время чаще встречаются работы с мультифрактальным анализом гамильтоновых систем [3, 6, 12, 13]. В основе этих работ лежит исследование вероятностного распределения времен возврата, полученных методом мультифрактального анализа [3]. Примерами гамильтоновых систем могут служить: модель Энно–Эйлеса [14], рассеивающие бильярды (бильярд Синая), ротатор, испытывающий периодические толчки [15], двойной маятник [16], а также некоторые отображения [3, 6].

1. Исследуемая система

В рамках данной работы нас будет интересовать статистика времен возврата Пуанкаре при глобальном подходе. Мы будем рассчитывать минимальные времена возврата Пуанкаре и размерность Афраймовича–Песина. Рассмотрим один из примеров гамильтоновой системы – математический маятник под внешним гармоническим воздействием (вынужденный маятник). Маятник описывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin x + b \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где амплитуда колебаний маятника равна единице, а его частота $\omega_0 = 1$. Внешнее воздействие имеет амплитуду b и частоту Ω . Фазовые траектории системы (6) расположены на поверхности двумерного тора. Поведение траекторий на торе сильно зависит от отношения частот Ω/ω_0 . Если это отношение рационально, т.е. $\Omega/\omega_0 = p/q$, где p и q – целые числа, то через время $T = 2\pi(p\Omega + q/\omega_0)$ траектория будет возвращаться в точку, из которой она вышла в момент времени $t_0 = t - T$ (резонанс на торе). В случае иррационального отношения частот фазовая траектория не замыкается сама на себя и с течением времени будет всюду плотно покрывать поверхность тора без самопересечения (эргодический случай).

На рис. 2 представлены проекции фазовых траекторий системы (6) на xu -плоскость и соответствующие множества, полученные в стробоскопическом сечении системы (6), для нескольких значений амплитуды воздействия b . При малых значениях параметра b система (6) схожа с математическим маятником $\ddot{x} = -\sin x$. Фазовое пространство математического маятника двумерно, и для него осуществимо каноническое преобразование, с помощью которого можно перейти к переменным действие–угол: $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{\alpha}, \vec{J})$. В этом случае для описания динамики в пространстве $(\vec{\alpha}, \vec{J})$ очень удобной оказывается полярная система координат, в которой величине \vec{J} ставится в соответствие расстояние от начала координат до некоторой точки фазового пространства, а величине $\vec{\alpha}$ – угол. Движение при заданном \vec{J} представляет собой движение по окружности с радиусом J . Меняя радиус, получаем множество вложенных центрированных окружностей, которые полностью заполняют фазовое пространство такой системы (см. рис. 2). Скорость движения по каждой окружности в общем случае зависит от значения переменной действия \vec{J} , т.е. $\omega = \omega(J)$.

Система (6) имеет трехмерное фазовое пространство. При больших значениях параметра b при переходе к переменным действие–угол (если каноническое преобразование $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{\alpha}, \vec{J})$ возможно) динамика таких систем наглядно может быть представлена следующим образом: движение по окружности с центром O_1 , образованной переменными α_1, J_1 , и одновременно по

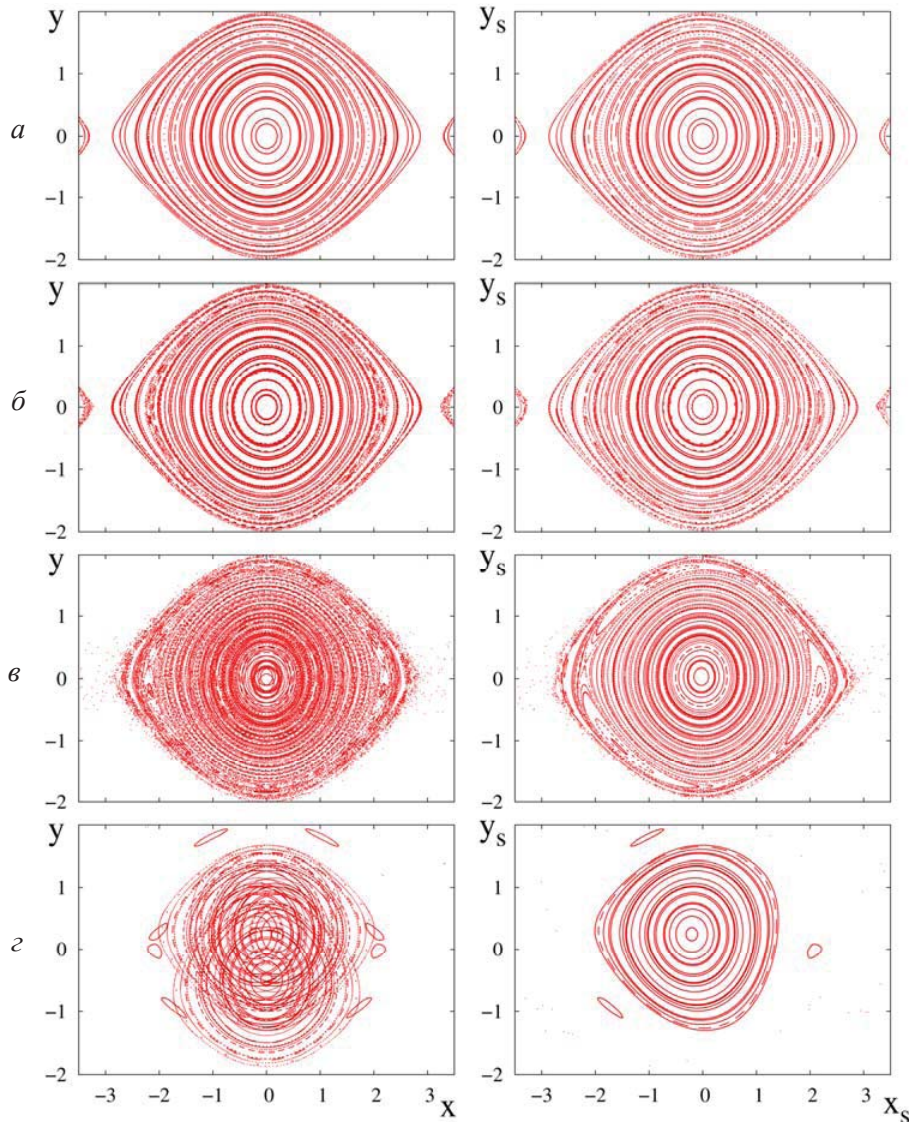


Рис. 2. Проекция фазовых траекторий на плоскость xu (левая колонка) и соответствующие множества точек в стробоскопическом сечении (правая колонка) системы (6) для параметров $b = 0.001$ (а), $b = 0.01$ (б), $b = 0.1$ (в), $b = 0.8$ (г). Параметр $\Omega = 2\pi/3$

окружности с центром O_2 (лежащей в плоскости, перпендикулярной плоскости окружности O_1), образованной переменными α_2, J_2 . Суперпозиция таких вращения задает движение на торе, размерность которого равна двум (см. рис. 2, б, в).

Начиная с некоторого значения b становится невозможным различить по фазовому портрету квазипериодические и хаотические движения, поэтому далее при анализе гамильтоновой динамики мы будем использовать стробоскопическое сечение, т.е. фиксировать точки с интервалом 2π по фазовой переменной θ . Это поможет разграничить типы движения. Периодичным движениям будет соответствовать конечный набор точек, замкнутым траекториям – инвариантные

замкнутые кривые, случайному множеству точек – хаотический режим. Соответствующие множества точек в стробоскопическом сечении приведены на рис. 2 справа.

2. Возвраты Пуанкаре на инвариантных кривых гамильтоновой системы

Рассмотрим что происходит с зависимостью $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ в случае гамильтоновых систем. Как видно из рис. 2, при малых значениях параметра b фазовые портреты и множества точек в стробоскопическом сечении представляют собой набор окружностей разного радиуса и эллипсов. При больших значениях параметра b и рациональном отношении собственной частоты и



частоты внешнего воздействия (2:3 на рис. 2, *в* и 2, *г*) в фазовом пространстве проявляется типичная структура гамильтоновых систем [3]: появляются дополнительные неподвижные точки, окруженные периодическими траекториями, которые образуют острова устойчивости (на рис. 2, *в* их три). И в случае больших амплитуд *b*, и в случае малых *b* рассматривается множество инвариантных кривых. Рассмотрим различия в возвратах Пуанкаре и размерностях Афраймовича–Песина в этих множествах.

2.1. Случай малых амплитуд *b*

Зафиксируем параметр $b = 0.001$, что соответствует панели *a* на рис. 2. Фазовый портрет и стробоскопическое сечение в этом случае представляют собой множество окружностей с разным радиусом и эллипсов. Попадание на то или иное множество точек зависит от начальных условий, поэтому зафиксируем начальные условия на $x_0 = 0.44, y_0 = 0$. Таким начальным условия соответствует окружность постоянного радиуса $r \approx 0.4$, поэтому далее мы перейдем в радиальную систему координат и вместо пары координат x, y будем рассматривать только одну – угол ψ . На рис. 3, *a* приведена зависимость числа вращения от частоты внешнего воздействия Ω . Такая зависимость близка к $\rho = 1/\Omega$. Исходя из этого можно подобрать такую частоту Ω , чтобы число вращения было близко к золотому сечению.

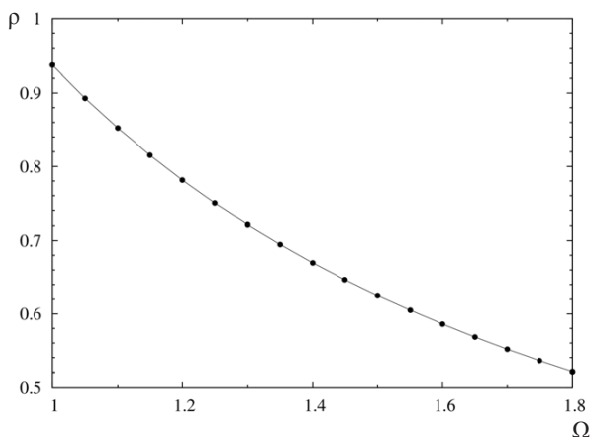


Рис. 3. Зависимость числа вращения ρ от частоты внешнего воздействия Ω в системе (6) при $b = 0.001$ и начальных условиях $x_0 = 0.44, y_0 = 0$

Однако следует учитывать тот факт, что в гамильтоновых системах частоты, а следовательно, и числа вращения сильно зависят от радиуса окружности. Это позволяет задавать число вра-

щения только с некоторой погрешностью. Далее в п. 2.1 мы будем рассматривать только окружность радиуса 0.4.

На рис. 1 приведена зависимость $\tau_{\text{inf}}(\epsilon)$ для отображения окружности. Вычисления проводились без усреднения, так как распределение плотности вероятности на окружности было равномерным. При этом результаты с усреднением по ансамблю были такими же, как и без усреднения.

В случае же вынужденного маятника, несмотря на малость параметра $b = 0.001$, плотность распределения вероятности системы (6) на окружности ≈ 0.4 является неравномерной. Вследствие этого усреднение по множеству точек нельзя заменить расчетами для одной точки. Для иллюстрации вышесказанного на рис. 4 приведены зависимости $\tau_{\text{inf}}(\epsilon)$, полученные при расчете возвратов в две точки: $\psi_0 = \pi/3$ и $\psi_0 = 2\pi/3$. Как видно из графиков, начиная с некоторой ступеньки с $\tau_{\text{inf}} = 13$ зависимости начинают расходиться, что говорит о необходимости усреднения по ансамблю точек.

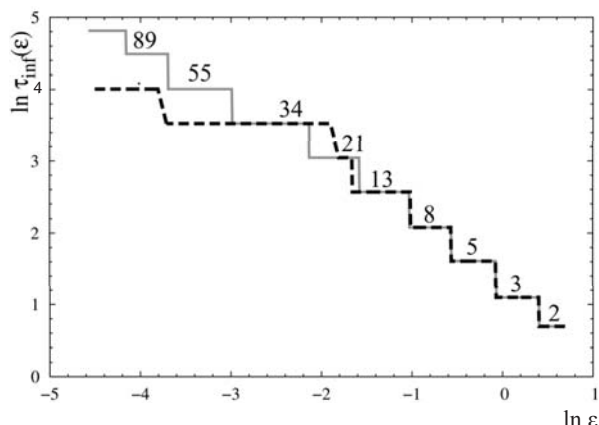


Рис. 4. Зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности при локальном подходе в системе (6) при $b = 0.001, \Omega = 1.598233989$ и начальных условиях $x_0 = 0.44, y_0 = 0$. Черная кривая соответствует окрестности возврата в точку $\psi_0 = \pi/3$, серая – $\psi_0 = 2\pi/3$

На рис. 5 приведена зависимость $\langle \tau_{\text{inf}}(\epsilon) \rangle$, рассчитанная с использованием глобального подхода. Видно, что разрушение лестницы происходит начиная со ступеньки с $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle = 13$. Как уже отмечалось ранее, в системе (6) такое значение числа вращения ρ может варьироваться в зависимости от рассматриваемой окружности. При параметре $b \neq 0$ в математический маятник добавляется некоторая нелинейность, которая делает невозможным точное задание числа



вращения. Ввиду этого, по нашему мнению, «Лестница Фибоначчи» разрушается при ε меньше некоторого критического значения ε_{cr} . Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим случай $b = 10^{-5}$. Предполагается, что уменьшение значения параметра b будет приводить к уменьшению нелинейности и одновременно к увеличению точности задания числа вращения.

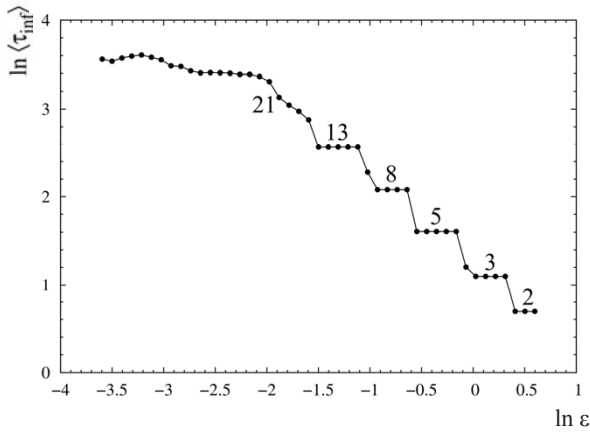


Рис. 5. Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности при глобальном подходе в системе (6) при $b = 0.001$, $\Omega = 1.598233989$. Разрушение «Лестницы Фибоначчи» начинается со ступеньки с числом $\langle \tau_{inf} \rangle = 13$

Результаты, показанные на рис. 6, подтверждают предположения. Приведены расчеты времен возврата при глобальном подходе (см. рис. 6, б) и возвраты, рассчитанные для окрестностей точек $\psi_0 = \pi/3$ и $\psi_0 = 2\pi/3$. Лестница разрушается «позже», со ступеньки $\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle = 34$ благодаря уменьшению влияния нелинейности.

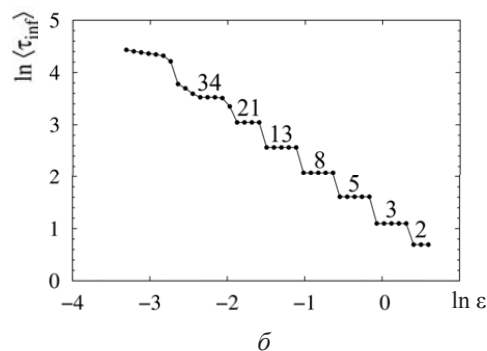
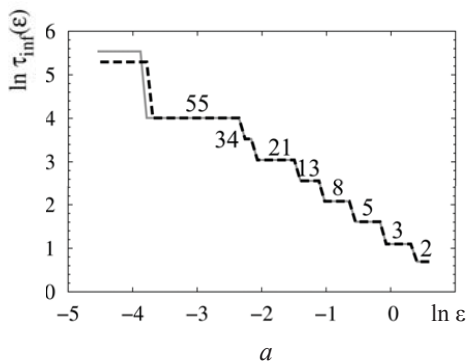


Рис. 6. Зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности при локальном подходе в системе (6) при $b = 0.00001$, $\Omega = 1.598033989$ и начальных условиях $x_0 = 0.44$, $y_0 = 0$. Черная кривая соответствует окрестности возврата в точку $\psi_0 = \pi/3$, серая – $\psi_0 = 2\pi/3$ (а); зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности при глобальном подходе в системе (6) при $b = 0.00001$, $\Omega = 1.598033989$. Разрушение «Лестницы Фибоначчи» начинается со ступеньки с числом $\langle \tau_{inf} \rangle = 34$ (б)

На рис. 6 приведены расчеты времен возврата при локальном и глобальном подходах при $b = 0.00001$. Видно, что разрушение лестницы происходит позже (со ступеньки с числом 34).

Из графиков видно, что разрушение «Лестницы Фибоначчи» происходит, когда величина ε принимает значения меньше некоторого ε_{cr} . Отсюда следует вывод, что при $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ динамика точек на окружностях в гамильтоновых системах демонстрирует все те же режимы, что и отображение окружности: при малой амплитуде внешнего воздействия зависимость $\tau_{inf}(\varepsilon)$ соответствует «Лестнице Фибоначчи». Начиная с некоторого $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ лестница разрушается. Увеличение амплитуды внешнего воздействия b приводит к сдвигу порога разрушения лестницы ε_{cr} в сторону больших ε .

2.2. Случай больших амплитуд

На рис. 7,а приведено множество точек, полученное в стробоскопическом сечении системы (6) при $b = 0.1$, начальных условиях $x_0 = -2.1$, $y_0 = -0.6$ и частоте внешнего воздействия $\Omega = 2\pi/3$. В отличие от п. 2.1 выбор такого параметра Ω соответствует рациональному отношению внешней и собственной частот: 2:3. Это приводит к рождению трех неподвижных периодических точек. В окрестности этих точек существует множество инвариантных кривых (см. рис. 2,в). Одно из таких множеств приведено на рис. 7,а. Интерес представляет рассмотреть статистику возвратов Пуанкаре в этом множестве. На рис. 7,б приведена соответствующая зависимость $\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle$. Зависимость $\langle \tau_{inf}(\varepsilon) \rangle$ от размера окрестности



свидетельствует о том, что ее можно аппроксимировать линией: $\ln\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle = -\ln\varepsilon + C$. Однако начиная с некоторого $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ значения $\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle$ почти не меняются, что, по нашему мнению, объясняется высокой степенью нелинейности при $b=0.1$. Таким образом, при $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ зависимость $\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle$

представляет собой прямую линию с наклоном -1 . Отсюда следует, что размерность Афраймовича–Песина равна единице. Если же $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$, то значения $\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle$ практически не изменяются, и из-за нелинейности расчет размерности Афраймовича–Песина не представляется возможным.

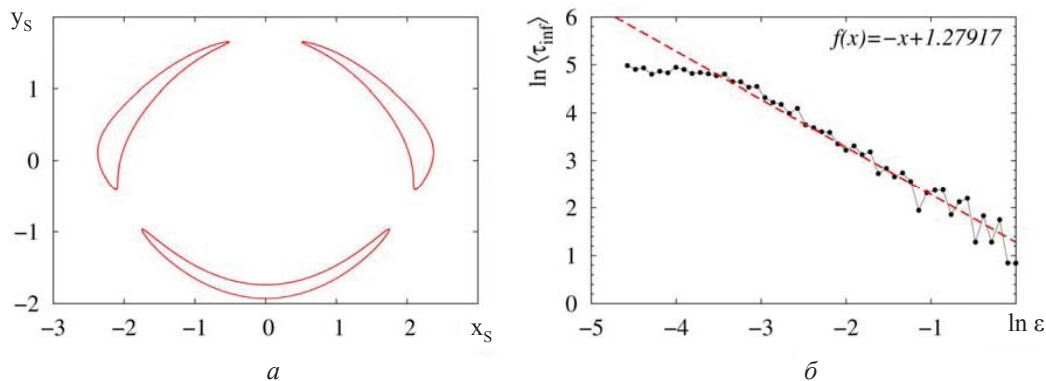


Рис. 7. Множество, полученное в стробоскопическом сечении системы (6) при $b=0.1$, начальных условиях $x_0 = -2.1, y_0 = -0.6$ и частоте внешнего воздействия $\Omega = 2\pi/3$ (а); зависимость $\ln\langle\tau_{\text{inf}}(\ln\varepsilon)\rangle$ (б)

Выводы

В работе представлены результаты статистического анализа множеств, полученных в стробоскопическом сечении гамильтоновой системы – математического маятника под внешним гармоническим воздействием. Рассмотрены два основных случая: случай малых и больших амплитуд внешнего воздействия b . Рассмотрены два основных типа инвариантных кривых в стробоскопическом сечении гамильтоновой системы: окружности, которые получаются при иррациональном отношении собственной и внешней частот; инвариантные кривые, которые образуются вокруг трех неподвижных периодических точек при рациональном отношении частот 2:3. В случае иррационального отношения исследование статистики времен возврата в рассматриваемое множество показало, что в зависимости $\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle$ в гамильтоновых системах можно выделить два участка, разделенных значением $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$, где ε_{cr} есть некоторое критическое значение. При $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ зависимость $\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle$ схожа с аналогичной зависимостью, полученной в отображении окружности при таком же числе вращения, «Лестницей Фибоначчи». Для малых $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ лестница разрушается. Стоит также отметить, что уменьшение амплитуды внешнего воздействия приводит к сдвигу критического значения ε_{cr} в сторону меньших ε . Исследование статистики

времен возврата в резонансных торах показало, что зависимость $\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle$ также можно разбить на два участка, разделенных критическим значением ε_{cr} . Причем для $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ зависимость $\ln\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle$ можно аппроксимировать прямой линией с коэффициентом угла наклона -1 , что говорит о том, что на этом участке размерность Афраймовича–Песина есть $\alpha_c = 1$. В случае же $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ значения $\langle\tau_{\text{inf}}\rangle$ практически не изменяются.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-02-02288).

Список литературы

1. Пуанкаре А. Избранные труды : в 3 т. Т. 2 : Небесная механика. Топология. Теория чисел. М. : Наука, 1972. 1000 с.
2. Hirata M., Saussol B., Vaienti S. Statistics of Return Times : A General Framework and New Applications // Commun. Math. Phys. 1999. Vol. 206, iss. 1. P. 33—55.
3. Afraimovich V., Ugalde E., Urias J. Fractal dimension for Poincaré recurrences. Elsevier, 2006. 245 p.
4. Анищенко В. С., Астахов С. В. Теория возвратов Пуанкаре и её приложение к задачам нелинейной физики // УФН. 2013. Т. 183. С. 1009–1028.
5. Afraimovich V. Pesin’s dimension for Poincaré recurrences // Chaos. 1997. Vol. 7, iss. 1. P. 12–20.
6. Afraimovich V., Zaslavsky G. M. Fractal and multifractal properties of exit times and Poincaré recurrences // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. P. 5418–5426.



7. Penné V., Saussol B., Vaienti S. Fractal and statistical characteristics of recurrence times // *Journal de Physique*. 1998. Vol. 8, iss. 6. P. 163–171.
8. Anishchenko V. S., Astakhov S. V., Boev Ya. I., Biryukova N. I., Strelkova G. I. Statistics of Poincaré recurrences in local and global approaches // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2013. Vol. 18, iss. 12. P. 3423–3435.
9. Anishchenko V. S., Boev Ya. I., Semenova N. I., Strelkova G. I. Local and global approaches to the problem of Poincaré recurrences. Applications in nonlinear dynamics // *Phys. Rep.* 2015. Vol. 587. P. 1–39.
10. Semenova N. I., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Statistical properties of Poincaré recurrences and Afraimovich–Pesin dimension for the circle map // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2015. Vol. 22. P. 1050–1061.
11. Slater N. B. Gaps and steps for the sequence $n\theta \bmod 1$ // *Proc. Camb. Philos. Soc.* 1967. Vol. 63, iss. 4. P. 1115–1123.
12. Chirikov B. V., Shepelyansky D. L. Asymptotic Statistics of Poincaré Recurrences in Hamiltonian Systems with Divided Phase Space // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82. P. 528–531.
13. Shepelyansky D. L. Poincaré recurrences in Hamiltonian systems with a few degrees of freedom // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 82. P. 055202.
14. Lichtenberg A. J., Leiberman M. A. Regular and Stochastic Motion. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1982. 499 p.
15. Заславский Г. М., Кириченко Н. А. Хаос динамический // *Физическая энциклопедия* : в 5 т. / глав. ред. А. М. Прохоров. М. : Сов.энцикл., 1988. Т. 5. С. 397–402.
16. Srivastava N., Kaufman C., Müller G. Hamiltonian chaos // *Computers in Physics*. 1990. Vol. 4. P. 549–553.

Образец для цитирования:

Семенова Н. И., Галактионова Т. И., Анищенко В. С. Возвраты Пуанкаре и размерность Афраймовича–Песина в неавтономном консервативном осцилляторе // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 195–203. DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-4-195-203.

Poincaré Recurrences and Afraimovich–Pesin Dimension in a Nonautonomous Conservative OscillatorN. I. Semenova¹, T. I. Galaktionova², V. S. Anishchenko³

¹Nadezhda I. Semenova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, semenovani@info.sgu.ru

²Tatyana I. Galaktionova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, galaktozat@ya.ru

³Vadim S. Anishchenko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, wadim@info.sgu.ru

Background and Objectives: One of the fundamental features of the temporal dynamics is Poincaré recurrence. It has been shown that statistics of return time in global approach depends on topological entropy h . The case of $h > 0$ (set with mixing) has been already studied theoretically. The theoretical conclusions have been confirmed by numerical simulation. The case of the sets without mixing ($h = 0$) has been studied theoretically, but recent numerical results shows some special aspects which are absent in theory. In particular, it has been obtained that the dependence of the mean minimal return time on the size of ε -vicinity in a circle map is a step function («Fibonacci stairs»). **Materials and Methods:** In the present paper the Poincaré recurrences are studied numerically for invariant curves in the stroboscopic section of trajectories of a nonautonomous conservative oscillator. **Results:** It is shown that the dependence of the mean minimal return time on the size of ε -vicinity is a step function («Fibonacci stairs»). In addition, the Afraimovich–Pesin dimension has been calculated in cases of rational and irrational natural and external frequency ratios. **Conclusion:** We have found the conditions of occurrence of «Fibonacci stairs» and the impact of the amplitude of the external harmonic force. It is shown that this dependence

exists only in some interval of ε . The size of the interval depends on amplitude of external force.

Key words: Poincaré recurrences, Hamiltonian systems, Afraimovich–Pesin dimension, rotation number, Fibonacci stairs, nonautonomous conservative oscillator, set without mixing, topological entropy, golden ratio, return time.

References

1. Poincaré H. *Izbrannyye trudy: v 3 t. T. 2: Nebesnaya mekhanika. Topologiya. Teoriya chisel* [Selected works: in 3 vols. Vol. 2: Celestial mechanics. Topology. Number theory]. Moscow : Nauka, 1972. 1000 p. (in Russian).
2. Hirata M., Saussol B., Vaienti S. Statistics of Return Times: A General Framework and New Applications. *Commun. Math. Phys.*, 1999, vol. 206, iss. 1, pp. 33–55.
3. Afraimovich V., Ugalde E., Urias J. *Fractal dimension for Poincaré recurrences*. Elsevier, 2006. 245 p.
4. Anishchenko V. S., Astakhov S. V. Poincaré recurrence theory and its applications to nonlinear physics. *Phys. Usp.*, 2013, vol. 56, pp. 955–972.
5. Afraimovich V. Pesin’s dimension for Poincaré recurrences. *Chaos*, 1997, vol. 7, iss. 1, pp. 12–20.
6. Afraimovich V., Zaslavsky G. M. Fractal and multifractal properties of exit times and Poincaré recurrences. *Phys. Rev. E.*, 1997, vol. 55, pp. 5418–5426.
7. Penné V., Saussol B., Vaienti S. Fractal and statistical characteristics of recurrence times. *Journal de Physique*, 1998, vol. 8, iss. 6, pp. 163–171.
8. Anishchenko V. S., Astakhov S. V., Boev Ya. I.,



- Biryukova N. I., Strelkova G. I. Statistics of Poincaré recurrences in local and global approaches. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2013, vol. 18, iss. 12, pp. 3423–3435.
9. Anishchenko V. S., Boev Ya. I., Semenova N. I., Strelkova G. I. Local and global approaches to the problem of Poincaré recurrences. Applications in nonlinear dynamics. *Phys. Rep.*, 2015, vol. 587, pp. 1–39.
 10. Semenova N. I., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Statistical properties of Poincaré recurrences and Afraimovich–Pesin dimension for the circle map. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2015, vol. 22, pp. 1050–1061.
 11. Slater N. B. Gaps and steps for the sequence $n\theta \pmod 1$. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1967, vol. 63, iss. 4, pp. 1115–1123.
 12. Chirikov B. V., Shepelyansky D. L. Asymptotic Statistics of Poincaré Recurrences in Hamiltonian Systems with Divided Phase Space. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 82, pp. 528–531.
 13. Shepelyansky D. L. Poincaré recurrences in Hamiltonian systems with a few degrees of freedom. *Phys. Rev. E.*, 2010, vol. 82, pp. 055202.
 14. Lichtenberg A. J., Leiberman M. A. *Regular and Stochastic Motion. Applied mathematical sciences.* Springer-Verlag, 1982. 499 p.
 15. Zaslavsky G. M., Kirichenko N. A. Хаос динамический [Dynamic Chaos]. *Fizicheskaya entsiklopediya* [Physical encyclopedia: in 5 vols]. Ans. ed. A. M. Prokhorov. Moscow, Great Soviet Encyclopedia Publ., 1988, vol. 5, pp. 397–402 (in Russian).
 16. Srivastava N., Kaufman C., Müller G. Hamiltonian chaos. *Computers in Physics.*, 1990, vol. 4, pp. 549–553.

Please cite this article in press as:

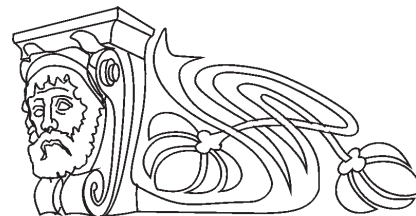
Semenova N. I., Galaktionova T. I., Anishchenko V. S. Poincaré Recurrences and Afraimovich–Pesin Dimension in a Nonautonomous Conservative Oscillator. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 195–203. DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-4-195-203.

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

УДК 53.06

РАСЧЕТ И АППРОКСИМАЦИЯ РАДИАЛЬНОЙ ДОЗОВОЙ ФУНКЦИИ ИРИДИЕВЫХ ИСТОЧНИКОВ

А. В. Белоусов¹, А. А. Белянов², А. П. Черняев³



¹Белоусов Александр Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики ускорителей и радиационной медицины, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, BelousovAV@physics.msu.ru

²Белянов Александр Александрович, младший научный сотрудник кафедры физики ускорителей и радиационной медицины, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, belyanov@cern.ch

³Черняев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики ускорителей и радиационной медицины; заведующий лабораторией пучковых технологий и медицинской физики, Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, a.p.chernyev@yandex.ru

Задачей исследования является вычисление дозиметрических характеристик капсулированных источников для брахитера-

пии. Расчеты выполнены с помощью написанного авторами программного кода на основе пакета библиотек GEANT4, предназначенного для моделирования методом Монте–Карло процессов транспорта частиц. Определены следующие характеристики источника: константа мощности дозы, радиальная дозовая функция и функция анизотропии. Получено удовлетворительное согласие с данными сторонних авторов. Данные, получаемые с помощью разработанного и верифицированного программного кода, могут быть использованы для внесения в системы дозиметрического планирования. Также в настоящей работе представлена улучшенная функциональная форма для аппроксимирования радиальной дозовой функции закрытых источников для брахитерапии на основе нуклида ¹⁹²Ir. Предложенные функции позволяют точно аппроксимировать радиальную дозовую функцию в диапазоне 0.5–20 см. Максимальные отклонения между данными аппроксимирования и данными моделирования по методу Монте–Карло не превышают 0.6%, тогда как средние отклонения составляют порядка 0.1%. Коэффициенты аппроксимирования для предложенных функций приводятся для 11 источников различных производителей.