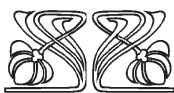
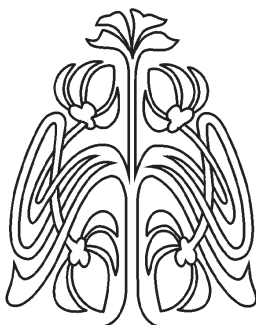
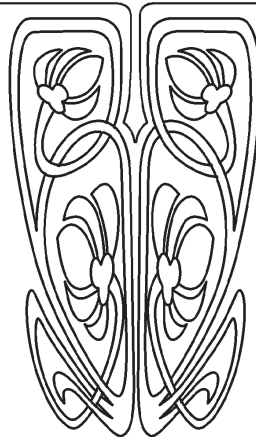




РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



УДК 535.361:53.06:617.73:76.03.29

АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА В СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ: ПРИМЕР ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА

С. П. Кузнецов, П. В. Купцов

Кузнецов Сергей Петрович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения, Удмуртский государственный университет, Ижевск; главный научный сотрудник, заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики, Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН (Саратовский филиал); профессор факультета нелинейных процессов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, spkuz@yandex.ru

Купцов Павел Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Приборостроение», Институт электронной техники и машиностроения, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., p.kuptsov@sstu.ru

Вводится в рассмотрение пример системы, описываемой дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, в которой в бесконечномерном фазовом пространстве имеет место хаотический аттрактор, аналогичный по свойствам аттрактору Лоренца. Показано, что хаотическая динамика на аттракторе соответствует математической теории псевдогиперболической динамики Шильникова и Тураева, которая обеспечивает условия неразрушения хаоса при малых вариациях параметров и функций в динамических уравнениях. В статье рассмотрен и апробирован вычислительный инструментарий, необходимый для выявления и тестирования псевдогиперболической природы хаоса. Представлены иллюстрации хаотической динамики – реализации колебательных процессов, портреты аттракторов, результаты вычисления показателей Ляпунова. Выполнена проверка подразумеваемого определением псевдогиперболичности отсутствия касаний у подпространств векторов малых возмущений для траекторий на аттракторе («критерий углов»). Представлена схема электронного генератора, описываемого предложенными уравнениями, и проведено его моделирование в программной среде Multisim, в частности, представлены осциллограммы и спектры хаотических колебаний, генерируемых системой. Результаты исследования позволяют заключить, что концепция псевдогиперболичности заслуживает внимания в прикладном плане, в частности, для создания генераторов хаоса, характеризуемого свойством не разрушаться при наличии погрешностей изготовления и разного рода нестабильностей, для возможных приложений (генераторы шума, схемы скрытой коммуникации, шумовой радар, криптографические приложения). Представленный в статье материал может быть полезен также для подготовки студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики и нелинейной динамики, в том числе в лекционных курсах, лабораторных и компьютерных практикумах.

Ключевые слова: динамическая система, аттрактор, хаос, отображение, показатель Ляпунова, запаздывание, модель Лоренца.

DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-3-162-176



Введение

С точки зрения возможных приложений хаоса важно, чтобы хаотическая динамика при малом возмущении параметров системы не разрушалась и не трансформировалась в регулярные, например, периодические, режимы [1]. Такими свойствами заведомо обладает хаос, ассоциирующийся с равномерно гиперболическими аттракторами, которые были введены в рассмотрение математиками в 1960–1970-е гг. (соленоид Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина) и которые обладают строго доказанным свойством структурной устойчивости. А именно при малом изменении оператора эволюции (сохраняющем свойство гладкости) динамика остается эквивалентной исходной с точностью до непрерывной замены переменных [2–4].

Гиперболические аттракторы составлены из седловых траекторий, у которых в касательном пространстве (пространстве векторов бесконечно малых возмущений) можно выделить сжимающее S и растягивающее U инвариантные подпространства. Первое образовано векторами, нормы которых экспоненциально убывают при эволюции в прямом времени, а второе – векторами, нормы которых экспоненциально убывают в обратном времени. В системах с непрерывным временем добавляется еще нейтральное подпространство векторов, норма которых в среднем не убывает и не возрастает, – подпространство N . При этом произвольный вектор малого возмущения представляется линейной комбинацией векторов из U , S , N . Множества изображающих точек, приближающихся к данной траектории в прямом или обратном времени, отвечают соответственно ее устойчивому и неустойчивому многообразию. Эти многообразия могут пересекаться, но не должны иметь касаний.

Имевшиеся первоначально ожидания, что гиперболический хаос как грубый феномен должен встречаться во многих физических ситуациях [3], не оправдались: по мере развития нелинейной динамики и ее приложений стало ясно, что конкретные хаотические системы различной природы, ставшие предметом многочисленных исследований, не вписываются в узкие рамки ранней гиперболической теории. Чаще всего приходится сталкиваться с ситуацией квазиаттрактора [4], когда наряду с хаотическими траекториями в соответствующей области фазового пространства присутствуют устойчивые периодические движения с узкими

бассейнами притяжения, либо таковые возникают при малом изменении параметров. По замечанию Д. В. Аносова, складывается «*такое впечатление, будто Господь Бог предпочитает скорее пойти на некоторое ослабление гиперболичности, нежели возиться с ограничениями на топологию аттрактора, возникающими при его настоящей (полной и равномерной) гиперболичности образца 60-х годов*» [5, с. 1–18]. В связи с этим гиперболическая динамика стала рассматриваться главным образом как рафинированный абстрактный образ хаоса, а усилия математиков оказались перенаправлены на развитие более широко применимых обобщений.

Одно из обобщений предложено Шильниковым и Тураевым, которые ввели представление о псевдогиперболической динамике [6–10]. Имеется в виду ослабленное условие, когда одно инвариантное подпространство S сжимающее, тогда как другое инвариантное подпространство U таково, что в нем элемент объема претерпевает при эволюции во времени экспоненциальное растяжение. Отсюда следует, что сумма соответствующих показателей Ляпунова в количестве, равном размерности U , должна быть положительной, однако это совсем не подразумевает нарастания во времени норм всех принадлежащих этому подпространству векторов. Углы между подпространствами S и U не должны обращаться в нуль, т.е. соответствующие многообразия не могут претерпевать касаний. Сжатие, которое, возможно, имеет место по каким-то направлениям в подпространстве U , должно быть слабее, чем по любому направлению в подпространстве S .

Псевдогиперболические аттракторы, как и гиперболические, реализуют хаос, не разрушающийся при малой вариации параметров (как для квазиаттракторов), хотя структурной устойчивостью в строгом смысле (эквивалентность динамики исходной и возмущенной системы с точностью до замены переменных) не обладают. Можно полагать, впрочем, что этого свойства достаточно для приложений хаоса, которые разрабатываются или будут разрабатываться (генераторы шума, схемы скрытой широкополосной коммуникации, шумовой радар, криптографические приложения).

Широко известный пример хаотического аттрактора, удовлетворяющего условиям псевдогиперболичности, – это аттрактор Лоренца в системе трех дифференциальных уравнений



первого порядка [11–13]¹. В последнее время появились и другие примеры. В частности, псевдогиперболический аттрактор обнаруживается в системе с дискретным временем, описываемой трехмерным обобщенным отображением Эно [8, 9]. Другой пример доставляет аттрактор четырехмерной системы с непрерывным временем, рассмотренный в недавней работе [10].

Подтверждение псевдогиперболическости требует не только проверки условий на показатели Ляпунова, получаемые в численных расчетах на основе хорошо известных традиционных алгоритмов [13–16], но требует еще и проверки трансверсальности подпространств S и U , т.е. отсутствия касаний соответствующих многообразий. Для упомянутых выше примеров такая проверка выполнена в работе [17] с привлечением процедуры вычисления и анализа статистики углов пересечения подпространств [18–20], получившей недавно специальное развитие для систем с высокой размерностью фазового пространства [21–23].

Поскольку концепция псевдогиперболическости с очевидностью выступает как междисциплинарная в плане применимости к системам разной природы, представляет интерес наполнение этой концепции физическим содержанием, что подразумевает нахождение допускающих реализацию на практике конкретных примеров отображений, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с запаздыванием, уравнений с частными производными. Из-за того что условия псевдогиперболическости в математическом смысле слабее, чем для равномерной гиперболическости, можно полагать, что такие

примеры найти или сконструировать проще, чем объекты с равномерно гиперболическими аттракторами [24, 25].

В настоящей статье вводится в рассмотрение и исследуется система с запаздыванием, у которой в бесконечномерном фазовом пространстве имеет место псевдогиперболический аттрактор, аналогичный аттрактору Лоренца. Система реализована в виде электронной схемы, которая оказывается проще, чем описанные в литературе схемотехнические решения, демонстрирующие классический аттрактор Лоренца [26, 27, 28], и может представлять интерес как электронный генератор хаоса.

1. От модели Лоренца к системе с запаздыванием

Аттрактор Лоренца – популярный и хорошо изученный пример странного хаотического аттрактора в модельной системе трех дифференциальных уравнений первого порядка [11–13]:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \dot{y} = rx - y - xz, \dot{z} = -bz + xy. \quad (1)$$

Первоначально эта модель была рассмотрена для задачи о конвекции жидкости в подогреваемом снизу слое, но в дальнейшем оказалась применима к описанию множества систем различной физической природы, включая динамику лазера [29], задачи о механических системах на основе вращающихся твердых тел [30, 31] и другие [32, 33].

На рис. 1 и 2 воспроизведены иллюстрации динамики модели Лоренца – графики зависимости динамических переменных от времени, двумерная проекция аттрактора и график зависимости величин последовательных максимумов переменной z от предшествующих величин. Такое отображение было построено Лоренцем в его классической работе и использовано для качественного объяснения динамической природы хаоса в данной системе. В контексте нашего исследования уместно подчеркнуть, что характерный вид отображения (с острием и без точек максимума, минимума и перегиба) может рассматриваться как качественное свидетельство в пользу псевдогиперболической природы аттрактора.

Если посмотреть на первое уравнение системы (1), то в грубом приближении его можно интерпретировать так, что функция $x(t)$ порождается функцией $y(t)$, взятой с запаздыванием порядка σ^{-1} . В самом деле, для Фурье-образов величин, связанных уравнением $\dot{x} = \sigma(y - x)$,

¹ Аттрактор Лоренца в литературе часто характеризуют также как квазигиперболический и как сингулярно гиперболический. Первый термин отражает близость к ситуации гиперболической динамики на аттракторе в смысле наличия растягивающих и сжимающих подпространств векторов возмущения траекторий, но при его использовании аттрактор Лоренца традиционно объединяют в общий класс с аттракторами систем, задаваемых с использованием негладких функций (аттрактор Лози, аттрактор Белых). Второй термин подчеркивает наличие на аттракторе особой траектории (а именно принадлежность ему неподвижной точки седло-узел в начале координат, вместе со своим одномерным неустойчивым многообразием) и совокупность связанных с этим обстоятельством свойств. Концепция псевдогиперболическости Шильникова и Тураева апеллирует к условиям, накладываемым на касательные подпространства траекторий на аттракторе (см. текст) и, как надо подчеркнуть, относится к системам, оператор эволюции которых задается гладкими функциями. Хотя для аттрактора Лоренца все три термина можно в известном смысле считать синонимами, они, вообще говоря, оттеняют несколько разные аспекты динамических свойств.

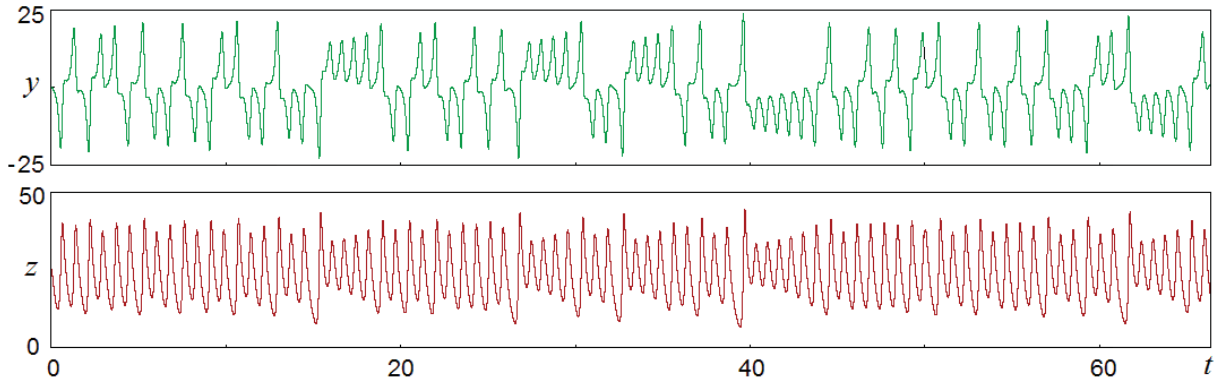


Рис. 1. Графики зависимостей от времени переменных y и z системы Лоренца (1) при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$
 Fig. 1. Waveforms of the variables y and z of the Lorenz system (1) at $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$

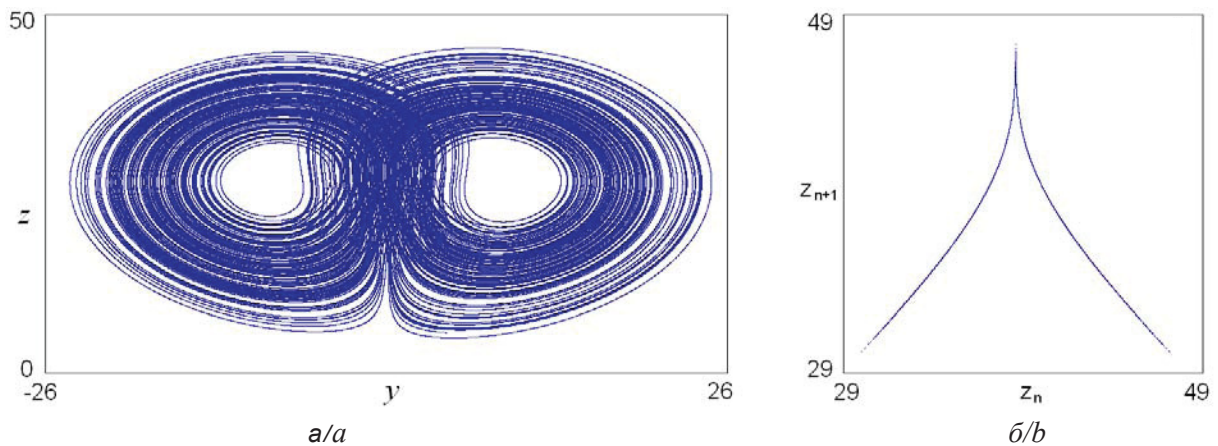


Рис. 2. Портрет аттрактора системы (1) в проекции на плоскость переменных y, z (а) и отображение для последовательных максимумов переменной z (б) при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$. Полученные численно для аттрактора Лоренца три показателя Ляпунова $\lambda_{1,2,3} = (0.897, 0.000, -14.563)$. Размерность аттрактора по Каплану – Йорке $D_{KY} = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2) / |\lambda_3| \approx 2.062$
 Fig. 2. Portrait of the attractor of the system (1) in projection onto the plane of the variables y, z (a) and the mapping for successive maxima of the variable z (b) at $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$. The Lyapunov exponents obtained numerically for the Lorenz attractor are $\lambda_{1,2,3} = (0.897, 0.000, -14.563)$, and the Kaplan – Yorke dimension of the attractor is $D_{KY} = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2) / |\lambda_3| \approx 2.062$

имеем $y(\omega) = (1 + i\omega\sigma^{-1})x(\omega)$, а при введении соотношения $x(t) = y(t - \tau)$ соответственно $y(\omega) = x(\omega)e^{i\omega\tau} \approx (1 + i\omega\tau)x(\omega)$, что совпадает в первом порядке разложения по ω , если положить $\tau = \sigma^{-1}$.

Имея в виду сделанное замечание, сконструируем систему с запаздыванием, заменив переменную x во втором и третьем уравнениях Лоренца на переменную y , взятую в запаздывающий момент времени. В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -y(t) + (r - z(t))y(t - \tau), \\ \dot{z} &= -bz(t) + y(t)y(t - \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

В отличие от модели Лоренца (1), система с запаздыванием характеризуется бесконечной размерностью фазового пространства [34–39].

В самом деле, чтобы задать состояние, позволяющее однозначно определить последующую динамику, нужно задать не только значения y и z в начальный момент времени, но еще и функцию $y(t - \tau)$ на предшествующем интервале времени длительности τ .

2. Численные результаты

Численное решение уравнений (2) показывает, что в некоторой области параметров система демонстрирует хаотическую динамику. В частности, при задании $b = 2$, $r = 14$, $\tau = 0.1$ в бесконечномерном фазовом пространстве присутствует аттрактор, аналогичный по свойствам аттрактору Лоренца и являющийся псевдогиперболическим.



На рис. 3 показаны графики зависимости динамических переменных y и z от времени в установившемся режиме колебаний, которые можно сравнить с аналогичными графиками для модели Лоренца на рис. 1. Отметим, что на графиках не усматривается признаков периодического повторения форм. На рис. 4, *a* показан портрет аттрактора в виде двумерной проекции из бесконечногомерного пространства состояний на плоскость переменных (y, z) , демонстрирующий очевидное сходство с аттрактором модели Лоренца на рис. 2, *a*. Это сходство распространяется и на вид отобра-

жения для последовательных максимумов переменной z , как можно видеть из графика на рис. 4, *b*, имеющего характерный вид с острием, без экстремумов и перегибов. Тангенс угла наклона касательной к ветвям на графике дает, очевидно, величину фактора растяжения малого возмущения вблизи траектории на аттракторе за время между достижением последовательных максимумов z , а этот фактор связан со старшим локальным показателем Ляпунова. Отсутствие наклонов, близких к нулю, говорит о том, что существенных отклонений от условий гиперболичности нет.

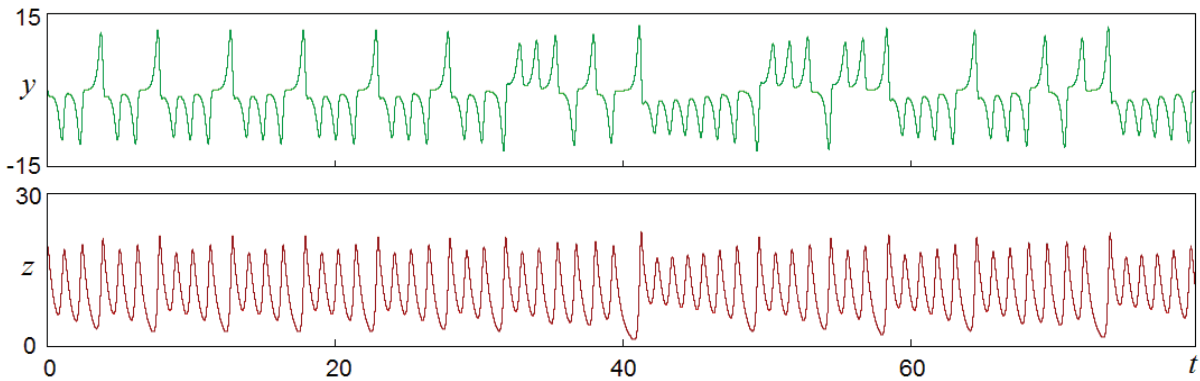


Рис. 3. Графики зависимостей от времени переменных y и z системы (2) при $b = 2, r = 14, \tau = 0.1$

Fig. 3. Waveforms of the variables y and z of the system (2) with $b = 2, r = 14, \tau = 0.1$

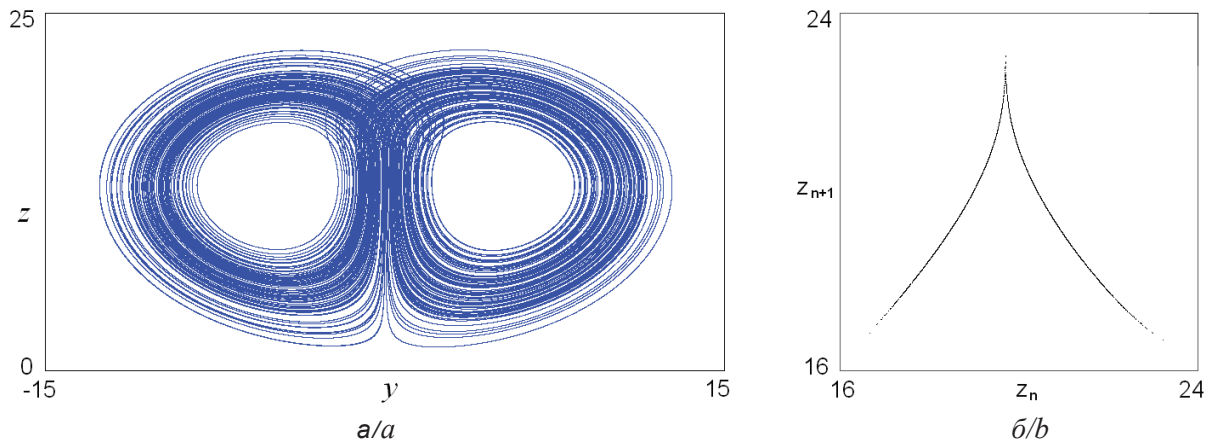


Рис. 4. Портрет аттрактора системы (2) в проекции на плоскость переменных y, z (*a*) и отображение для последовательных максимумов переменной z (*b*) при $b = 2, r = 14, \tau = 0.1$

Fig. 4. Portrait of the attractor of the system (2) in projection onto the plane of the variables y, z (*a*) and the mapping for successive maxima of the variable z (*b*) at $b = 2, r = 14, \tau = 0.1$

Для системы с запаздыванием полное количество показателей Ляпунова бесконечно, но мы можем найти несколько первых показателей, выполняя одновременно численное решение уравнений (2) совместно с соответствующим числом уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}} &= -\tilde{y}(t) + (r - z(t))\tilde{y}(t - \tau) - \tilde{z}(t)y(t - \tau), \\ \dot{\tilde{z}} &= -b\tilde{z}(t) + \tilde{y}(t)y(t - \tau) + y(t)\tilde{y}(t - \tau) \end{aligned} \quad (3)$$

с ортогонализацией векторов возмущения по Граму – Шмидту в рамках методики, адаптированной для системы с запаздыванием [36–39].



Первые три показателя Ляпунова аттрактора, показанного на рис. 2, а, составляют

$$\lambda = \{0.541, 0.000, -24.58, \dots\}, \quad (4)$$

а размерность аттрактора по формуле Каплана – Йорке $D_{KY} = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2) / |\lambda_3| \approx 2.022$.

На рис. 5 показан график зависимости наибольшего показателя Ляпунова системы (2) от параметра r при фиксированных значениях $b = 2$ и $\tau = 0.1$. Левая часть диаграммы отвечает ситуации псевдогиперболического аттрактора типа Лоренца, где вариации показателя Ляпунова в зависимости от параметра невелики, а

правая часть – ситуации квазиаттрактора, где наблюдаются провалы показателя Ляпунова до нуля, отвечающие окнам регулярной динамики. Диаграммы, иллюстрирующие вид отображения для последовательных максимумов переменной z , приведенные в верхнем ряду, показывают, как меняется вид отображения при переходе из области, где реализуется аттрактор типа Лоренца, в область квазиаттрактора. Для первой области характерна форма в виде двух ветвей монотонной зависимости, соединяющихся в точке острого угла, как на рис. 4, б, а для второй – зависимость, имеющая локальный квадратичный минимум.

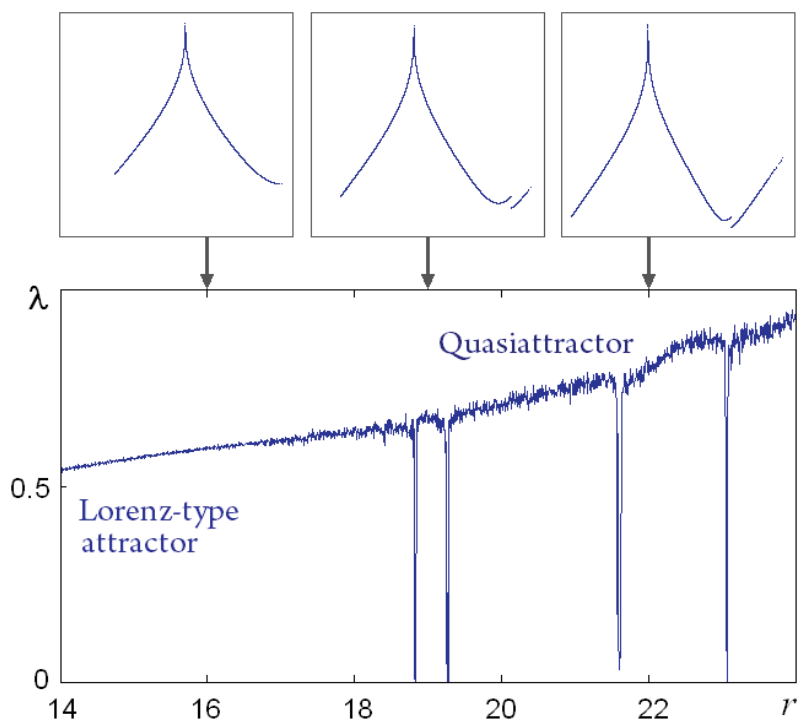


Рис. 5. График зависимости наибольшего показателя Ляпунова системы (2) от параметра r при $b = 2$, $\tau = 0.1$. В верхнем ряду показаны диаграммы, иллюстрирующие изменение вида отображения, аналогичного рис. 4, б, для последовательных максимумов переменной z при переходе из области, где реализуется аттрактор типа Лоренца, в область квазиаттрактора

Fig. 5. Dependence of the largest Lyapunov exponent of the system (2) on the parameter r for $b = 2$, $\tau = 0.1$. The upper row shows diagrams illustrating the change in the form of the mapping for successive maxima of the variable z analogous to Fig. 4, b as we move from the region where the Lorenz type attractor is realized to the region of the quasiattractor

3. Проверка критерия углов

Метод проверки гиперболичности аттракторов, предложенный изначально в работах [18, 19], заключается в том, что для типичной траектории на аттракторе проводится решение уравнений в вариациях для векторов возмуще-

ния сначала в прямом времени для определения неустойчивого подпространства, а затем в обратном времени для определения устойчивого подпространства. Далее, для множества точек траектории вычисляются углы между этими подпространствами и анализируется характер



распределения углов. Если оно отделено от области нулевых углов, то это говорит о гиперболической природе аттрактора, тогда как появление углов, близких к нулю, свидетельствует об отсутствии гиперболичности.

В случае систем с запаздыванием проблема состоит в том, что размерность фазового пространства и соответственно сжимающего подпространства бесконечна. Это затруднение удается преодолеть с помощью варианта метода, где для идентификации сжимающего подпространства используются не принадлежащие ему векторы, а векторы, задающие его ортогональное дополнение, размерность которого обычно невелика [21–23]. Последние получаются из решения сопряженной системы линеаризованных уравнений, способ построения которых для систем с одним или несколькими временами запаздывания указан в работах [22, 23].

Для системы Лоренца (1) уравнения в вариациях вблизи опорной фазовой траектории имеют вид

$$\dot{\tilde{x}} = \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}), \dot{\tilde{y}} = (r - z)\tilde{x} - \tilde{y} - x\tilde{z}, \dot{\tilde{z}} = -b\tilde{z} + \tilde{x}y + x\tilde{y}, \quad (5)$$

а сопряженная система записывается в форме

$$\dot{\xi} = \sigma\xi - \eta(r - z) - y\zeta, \dot{\eta} = -\sigma\xi + \eta - x\zeta, \dot{\zeta} = b\zeta + x\eta, \quad (6)$$

с тем, чтобы для векторов, даваемых уравнениями (5) и (6), скалярное произведение

$$\tilde{x} \cdot \xi = \tilde{x}(t)\xi(t) + \tilde{y}(t)\eta(t) + \tilde{z}(t)\zeta(t) \quad (7)$$

оставалось постоянным во времени.

Для системы с запаздыванием (2) уравнения в вариациях имеют вид (3), а сопряженная система строится способом, описанным в [22, 23], в виде системы уравнений с отклоняющимся аргументом опережающего типа, которая в нашем случае имеет вид

$$\dot{\eta} = \eta - y(t - \tau)\zeta - [r - z(t + \tau)]\eta(t + \tau), \quad (8)$$

$$\dot{\zeta} = b\zeta + y(t - \tau)\eta - y(t + \tau)\zeta(t + \tau).$$

Сопряженная система сконструирована так, что для векторов, даваемых уравнениями (3) и (7), остается постоянным скалярное произведение, определенное соотношением

$$x \cdot \xi = \tilde{y}(t)\eta(t) + \tilde{z}(t)\zeta(t) + \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(\theta)[(r - z(\theta + \tau))\eta(\tau + \theta) + y(\tau + \theta)\zeta(\tau + \theta)]d\theta. \quad (9)$$

Для аттрактора Лоренца системы (1) с показателями Ляпунова $\lambda_{1,2,3} = (0.897, 0.000, -14.563)$

имеем $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 < 0$, т.е. подпространство U двумерное, а S одномерное, имеющее двумерное ортогональное дополнение.

Для хаотических аттракторов системы с запаздыванием (2) для первых трех показателей Ляпунова выполняются такие же соотношения, хотя имеется еще бесконечное множество отрицательных показателей. Таким образом, подпространство U двумерное, а подпространство S бесконечномерное, но его ортогональное дополнение двумерное.

Процедура проверки критерия углов для модели Лоренца и системы с запаздыванием состоит в том, что сначала рассчитывается длинный отрезок реализации $x(t), y(t), z(t)$ на аттракторе системы (1) или $y(t), z(t)$ на аттракторе системы (2). Вдоль этой траектории проводим решение в прямом времени двух комплектов уравнений в вариациях с ортогонализацией и нормировкой по Граму – Шмидту, в результате чего получаем зависящие от времени векторы $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)$. Кроме того, проводим интегрирование двух комплектов сопряженной системы в обратном времени вдоль той же траектории, с ортогонализацией и нормировкой векторов. Это дает векторы $\xi_1(t), \xi_2(t)$.

Далее, используя данные, относящиеся к идентичным точкам опорной траектории, выполняем вычисление углов θ_1 между вектором $\tilde{x}_1(t)$ и подпространством, представляющим собой ортогональное дополнение одномерного подпространства, соответствующего вектору $\xi_1(t)$.

Также вычисляем углы θ_2 между подпространством, образованным линейными комбинациями векторов $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)$, и ортогональным дополнением подпространства, образованного линейными комбинациями векторов $\xi_1(t), \xi_2(t)$.

На рис. 6 показаны полученные обработкой данных численных расчетов графики функций распределения углов θ_1 и θ_2 для классического аттрактора Лоренца (рис. 6, а), а также для аттракторов системы с запаздыванием при фиксированных параметрах $\tau = 0.1, b = 2$ и разных величинах r (рис. 6, б–г). Диаграммы (а) и (б) подтверждают псевдогиперболическую природу аттракторов, поскольку распределение углов θ_2 отделено от нуля. То обстоятельство, что распределение углов θ_1 не отделено от нуля, свидетельствует, что аттрактор нельзя отнести к классу равномерно гиперболических. С другой стороны, вид распределений на диаграммах (в) и (г) говорит о нарушении условий



псевдогиперболичности, поскольку показывают присутствие углов θ_2 , близких к нулю. Иными словами, имеют место касания между подпро-

странствами, которые согласно определению псевдогиперболичности должны были бы быть трансверсальны друг другу.

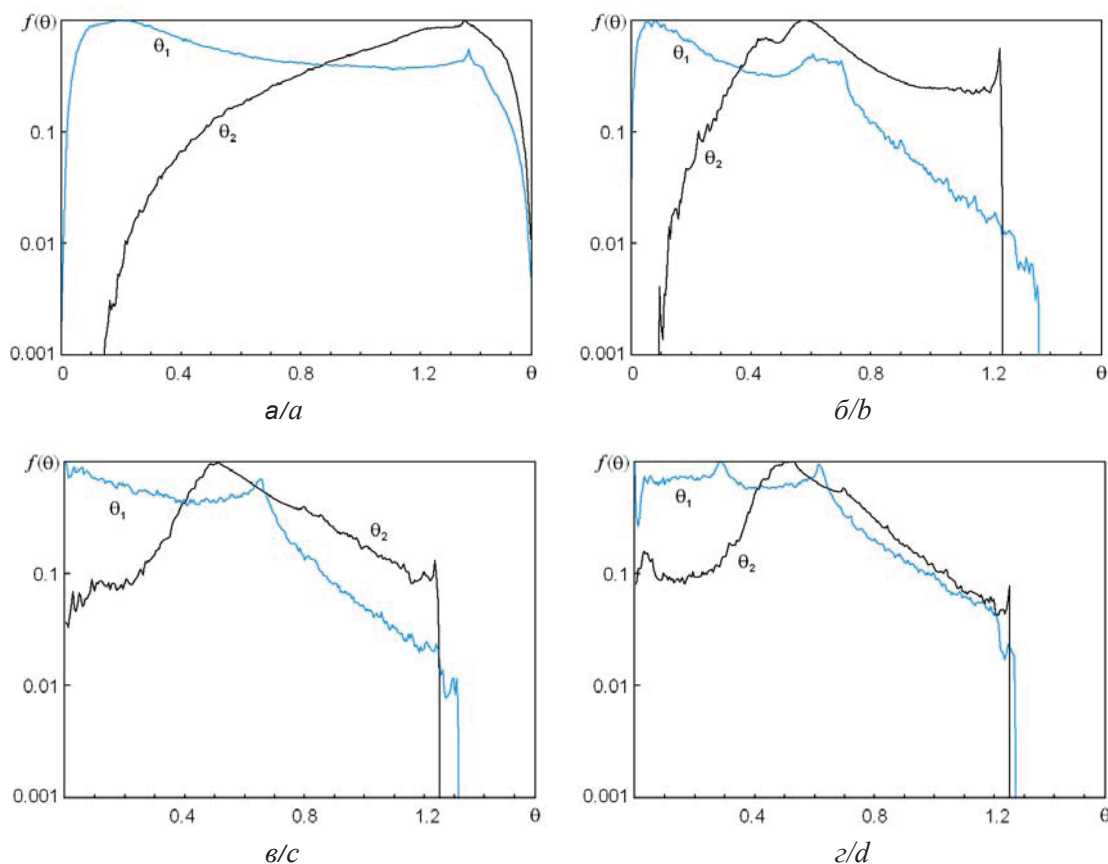


Рис. 6. Графики функций распределения углов θ_1 и θ_2 для аттрактора Лоренца с параметрами $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ (а) и для аттракторов системы с запаздыванием при $\tau = 0.1$, $b = 2$, $r = 14$ (б), $r = 18$ (в) и $r = 22$ (г). Диаграммы (а) и (б) подтверждают псевдогиперболическую природу аттракторов, поскольку распределение углов θ_2 отделено от нуля. Для ситуаций, показанных на диаграммах (в) и (г), распределение углов θ_2 свидетельствует о присутствии углов, близких к нулю, т.е. о наличии касаний между подпространствами

Fig. 6. Distribution functions of the angles θ_1 and θ_2 for the Lorenz attractor at $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ (a) and for the attractors of the system with delay at $\tau = 0.1$, $b = 2$, $r = 14$ (b), $r = 18$ (c), and $r = 22$ (d). Diagrams (a) and (b) confirm the pseudo-hyperbolic nature of the attractors, since the distribution of the angles θ_2 is separated from zero. For the situations shown in diagrams (c) and (d), the distribution of the angles θ_2 indicates the presence of angles close to zero, that is, the presence of tangencies between the subspaces

4. Схемотехническая реализация и моделирование в среде Multisim

Программный пакет Multisim компании National Instruments представляет собой удобное и популярное современное средство конструирования электронных схем и моделирования их действия [40]. Работая с программой, пользователь составляет и изображает графически на экране компьютера электронную схему, следуя стандартным обозначениям, принятым в радиотехнике и электронике, причем предусмотрено использова-

ние таких виртуальных приборов, как генераторы сигналов, осциллографы, анализатор спектра.

На рис. 7 показана схема электронного устройства с запаздыванием, реализованная с применением пакета Multisim, где присутствие запаздывания обеспечивается линией задержки W1. Импульсный источник тока П1 введен в схему только для осуществления запуска и не влияет на дальнейшее ее функционирование. Покажем, что динамика устройства описывается уравнениями (2).

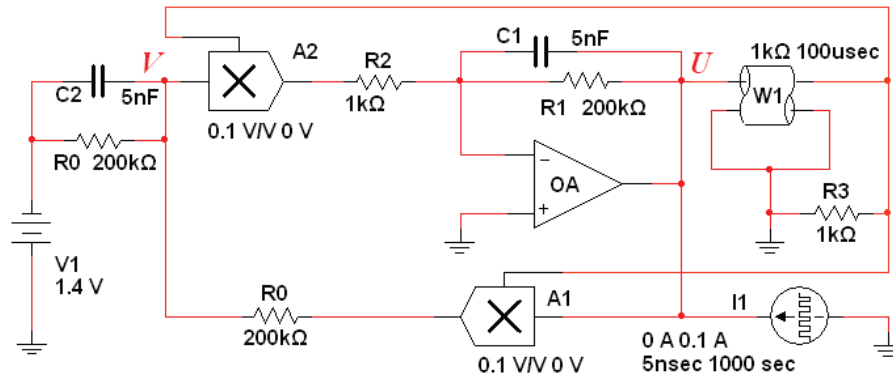


Рис. 7. Схема электронного устройства, динамика которого описывается уравнениями (2): OA – операционный усилитель, A1 и A2 – аналоговые умножители с коэффициентом передачи $\kappa = 0.1\text{В}^{-1}$, W1 – линия задержки с волновым сопротивлением 1 кОм, вносящая запаздывание $T = 100$ мкс, V1 – источник постоянного напряжения 1.4 В. Импульсный источник тока I1 введен в схему только для осуществления запуска и не влияет на дальнейшее ее функционирование

Fig. 7. Circuit diagram of the electronic device whose dynamics is described by the equations (2): OA is an operational amplifier, A1 and A2 are analog multipliers with a transmission factor $\kappa = 0.1\text{В}^{-1}$, a delay line W1 has a wave resistance of 1 кОм and provides a time-delay $T = 100$ μs , V1 is a source of constant voltage 1.4 V. A pulsed current source I1 is introduced only for initial launch of the circuit, and does not affect its further operation

Пусть $U(t)$ и $V(t)$ – напряжения в обозначенных соответствующими буквами узлах схемы в текущий момент времени t . Напряжение на выходе линии задержки, где подключено сопротивление нагрузки R3, равное по величине волновому сопротивлению линии задержки W1, составляет $U(t - T)$, где T – время запаздывания при прохождении сигнала в линии. Выходные напряжения аналоговых умножителей A1 и A2 равны соответственно $\kappa U(t)U(t - T)$ и $\kappa V(t)U(t - T)$, где κ – коэффициент передачи, принятый равным 0.1В^{-1} .

Записывая условия нулевого суммарного тока на инвертирующем входе операционного усилителя OA и на входе умножителя A2, имеем:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R_1} + \frac{\kappa V U(t - T)}{R_2} &= 0, \\ C_2 \frac{dV}{dt} + \frac{V + V_1}{R_0} + \frac{V - \kappa U U(t - T)}{R_0} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где V_1 – постоянное напряжение от источника V1.

Если вести безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$\begin{aligned} t' &= t / R_1 C_1, \quad y = \kappa U \left(\frac{K R_1 C_1}{R_0 C_2} \right)^{1/2}, \quad z = \kappa K V + \frac{1}{2} \kappa K V_1, \\ K &= R_1 R_2^{-1}, \quad \tau = T / R_1 C_1, \quad b = \frac{2 R_1 C_1}{R_0 C_2}, \quad r = \frac{1}{2} \kappa K V_1, \end{aligned} \quad (11)$$

то уравнения (10) принимают в точности вид (2) (следует опустить штрих у обозначения безразмерного времени).

В электронной схеме параметр r управляется изменением напряжения батареи V1, параметр b – изменением емкости конденсатора C2, а параметр τ изменением времени запаздывания линии задержки W1.

На рис. 8 показаны осциллограммы напряжений U и V , полученные как снимки с экрана виртуального осциллографа при моделировании динамики схемы в среде Multisim. Номиналы элементов схемы соответствуют обозначениям на рис. 7. Сравнение реализаций с рис. 3 демонстрирует очевидное качественное соответствие. Более того, как можно проверить, коэффициенты пересчета масштабов для напряжений U и V и безразмерными переменными x , y согласуются с установленными соотношениями (11). Также имеет место правильное соотношение между временными масштабами при описании в терминах размерного и безразмерного времени.

На рис. 9, а показан снимок проекции аттрактора с экрана виртуального осциллографа, у которого вход управления горизонтальной развертки отвечает напряжению U , а вертикальный – напряжению V . Отметим соответствие изображений на рис. 9, а и 4, а.

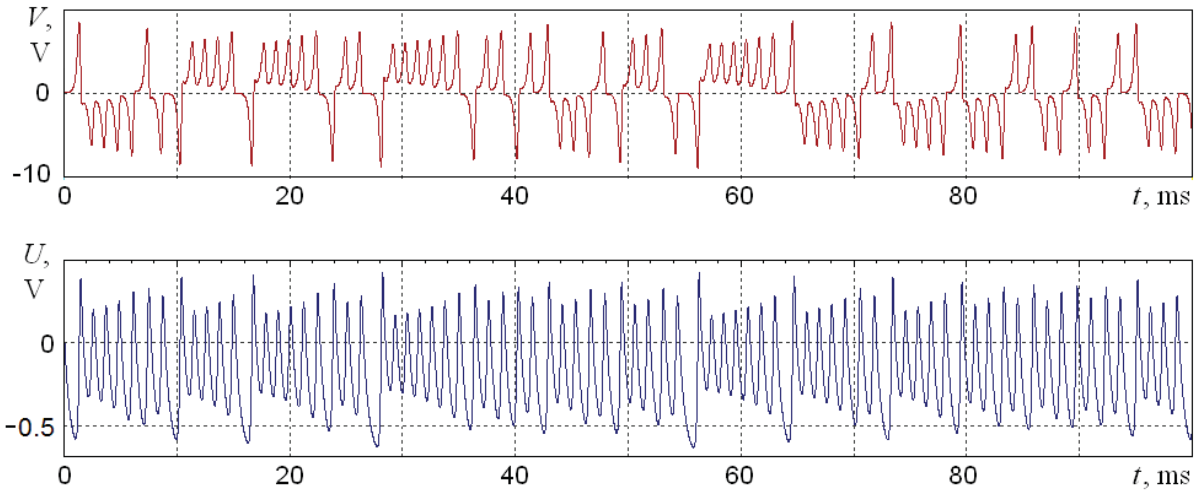


Рис. 8. Осциллограммы напряжений U и V , полученные при моделировании динамики схемы на рис. 7 в среде Multisim
 Fig. 8. The oscilloscope traces of the voltages U and V as obtained in simulating the dynamics of the circuit of Fig. 7 in the Multisim environment

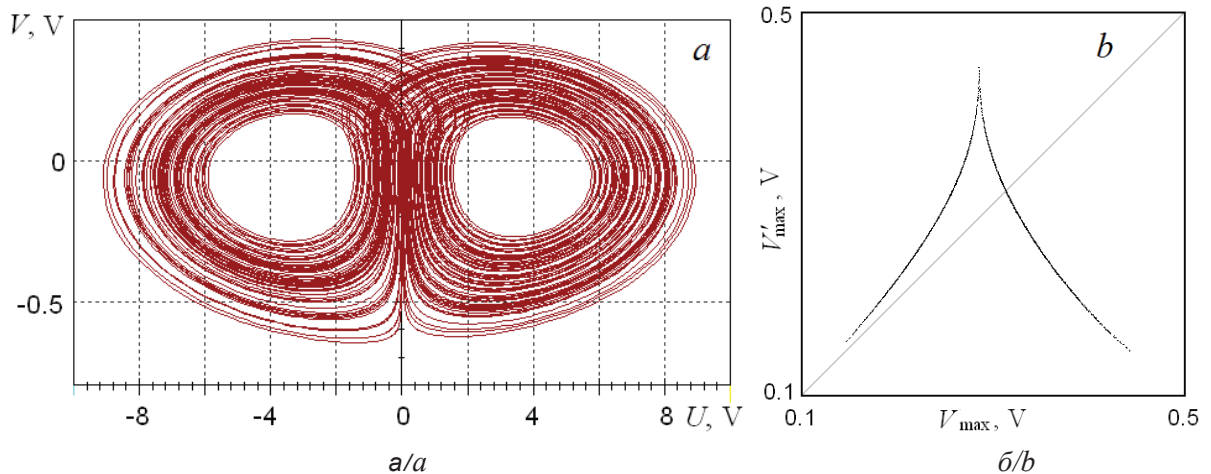


Рис. 9. Снимок проекции аттрактора с экрана виртуального осциллографа на плоскости напряжений U, V (а) и график отображения для последовательных максимумов напряжения V , записанного в виде временного ряда (б), по результатам моделирования в среде Multisim

Fig. 9. Snapshot of the projection of the attractor from the virtual oscilloscope screen on the plane of voltages U, V (a) and plot of the mapping for successive maxima of the voltage V recorded in the form of a time series (b), based on the simulation results in the Multisim environment

По результатам схемотехнического моделирования можно построить график отображения для последовательных максимумов напряжения V , аналогичный рис. 4, б. Чтобы это сделать, была использована имеющаяся в среде Multisim возможность записи регистрируемого виртуальным осциллографом напряжения в файл в виде временного ряда с помощью приложения Grafer. После получения для напряжения V такого временного ряда достаточной протяженности производилась обработка данных с помощью специальной программы. В результате получена диаграмма,

показанная на рис. 9, б. График в виде двух монотонных участков, образующих острие в месте соединения, соответствует согласно аргументации, приведённой в разделе 2, псевдогиперболическому аттрактору.

На рис. 10, а, б показаны спектры мощности сигналов, отвечающих напряжениям U и V , полученные при моделировании в среде Multisim с помощью виртуального анализатора спектра. Спектры представлены в логарифмическом масштабе. Спектры сплошные, что отражает хаотическую природу порождаемой системой

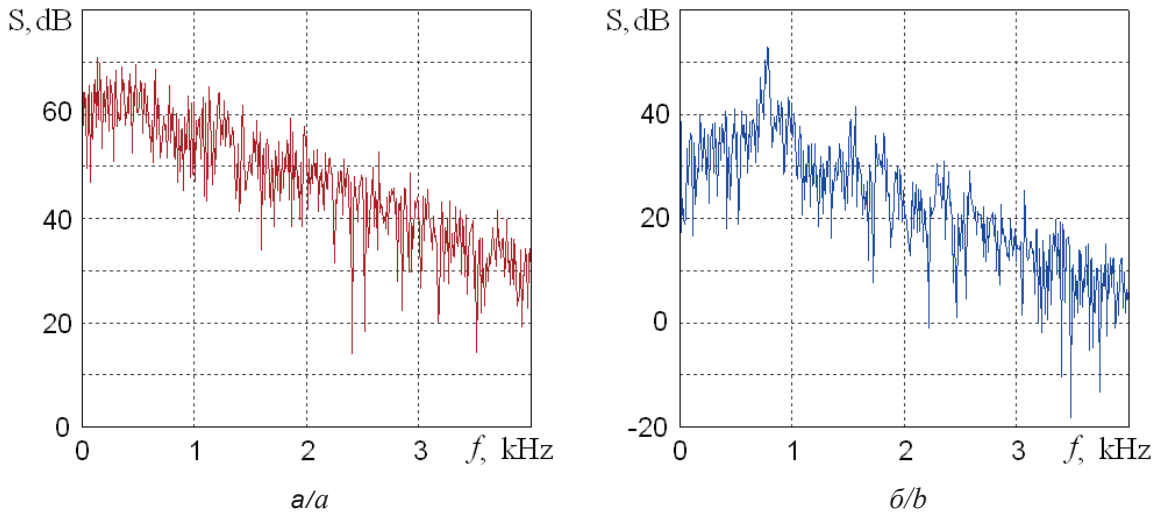


Рис. 10. Спектры сигналов, отвечающих напряжениям $U(a)$ и $V(b)$, полученные с помощью виртуального анализатора спектра при моделировании в среде Multisim

Fig. 10. Power spectra of signals corresponding to the voltages $U(a)$ and $V(b)$, obtained with the virtual spectrum analyzer in the Multisim simulation

динамики. Отметим, что изрезанность спектральной плотности мощности невелика, что является очевидным достоинством данного варианта электронного генератора хаоса.

Заключение

Математическая концепция псевдогиперболической динамики имеет, как представляется, междисциплинарное значение и с очевидностью нуждается в наполнении содержанием в виде конкретных объектов различной физической (электроника, механика, нейродинамика) и математической (отображения, дифференциальные уравнения с частными производными) природы. В данной работе авторами впервые представлен допускающий физическую реализацию пример системы с запаздыванием, для которой псевдогиперболическая природа хаотической динамики подтверждена на уровне численных расчетов, а также на базе аналогии с классическим аттрактором Лоренца. Для этого привлечен и использован методологический инструментарий, включающий не только традиционные методы нелинейной динамики (графическое представление реализаций и портретов аттракторов, вычисление показателей Ляпунова), но и более утонченный подход – «критерий углов». Он основан на вычислении углов между подпространствами векторов малых возмущений и позволяет проверить отсутствие касаний между подпространствами, что служит одним из определяющих условий псевдогиперболическости.

В работе представлена схема электронного генератора, описываемого предложенными урав-

нениями, и выполнено моделирование динамики в программной среде Multisim, в частности, приведены осциллограммы и спектры хаотических колебаний, генерируемых системой. Хотя рассмотренная электронная схема функционирует на низких частотах (звуковой диапазон), представляется возможной ее модификация для использования на высоких и сверхвысоких частотах.

Таким образом, вопрос реализации псевдогиперболической динамики заслуживает внимания в прикладном плане, а именно для разработки генераторов грубого хаоса, не разрушающегося при вариации параметров устройств и характеристик используемых в них компонентов, и поэтому пригодных для возможных приложений хаотических сигналов.

Благодарности

Разработка математической модели и численные расчеты (разделы 1, 2) проведены при финансовой поддержке РФФ (проект № 15-12-20035). Анализ и расчеты на основе критерия углов, разработка электронной схемы и моделирование ее функционирования (разделы 3, 4) проведены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-02-00135).

Список литературы

1. Дмитриев А. С., Ефремова Е. В., Максимов Н. А., Панас А. И. Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 424 с.



2. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Гринес В. З., Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Сафонов А. В., Солодов В. В., Старков А. Н., Степин А. М., Шлячков С. В. Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». М. : ВИНТИ, 1991. Т. 66. 248 с.
3. Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны / ред. А. В. Гапонов-Грехов. М. : Наука, 1979. С. 192–212.
4. Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1953–2001. DOI: 10.1142/S0218127497001527
5. Аносов Д. В. Динамические системы в 60-е годы : гиперболическая революция // Математические события XX века. М. : Фазис, 2003. С. 1–18.
6. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 2. С. 137–160.
7. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 1. С. 23–27.
8. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps // Physica D : Nonlinear Phenomena. 2016. Vol. 337. P. 43–57. DOI: 10.1016/j.physd.2016.07.006
9. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Козлов А. Д. Математическая теория динамического хаоса и её приложения : Обзор. Ч. 1. Псевдогиперболические аттракторы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36
10. Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Kazakov A. O., Kozlov A. D. Elements of contemporary mathematical theory of dynamical chaos. Part I. Pseudohyperbolic attractors. 2012, arXiv preprint 1712.04032. P. 1–38.
11. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы : сб. ст. / под ред. Я. Г. Синай, Л. П. Шильникова. М. : Мир, 1981. С. 88–116.
12. Sparrow C. The Lorenz equations : bifurcations, chaos, and strange attractors. Springer Science & Business Media, 2012. 270 p.
13. Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. М. : Физматлит, 2006. 356 с.
14. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // Meccanica. 1980. Vol. 15, № 1. P. 9–20.
15. Shimada I., Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // Progress of Theoretical Physics. 1979. Vol. 61, № 6. P. 1605–1616.
16. Pikovsky A., Politi A. Lyapunov exponents : a tool to explore complex dynamics. Cambridge University Press, 2016. 295 p.
17. Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors : angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction. 2018, arXiv preprint 1805.06644. P. 1–17.
18. Lai Y. C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // Nonlinearity. 1993. Vol. 6, № 5. P. 779–797.
19. Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems // Phys. Lett. A. 2000. Vol. 270. P. 301–307.
20. Кузнецов С. П., Круглов В. П. О некоторых простых примерах механических систем с гиперболическим хаосом // Труды МИАН. 2017. Т. 297. С. 232–259. DOI: 10.1134/S0371968517020133
21. Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85, № 1. 015203. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.015203
22. Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Numerical test for hyperbolicity of chaotic dynamics in time-delay systems // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94, № 1. P. 010201. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.010201
23. Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 56. P. 227–239. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.08.016
24. Кузнецов С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы : от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201102a.0121
25. Kuznetsov S. P. Hyperbolic Chaos : A Physicist's View. Berlin ; Heidelberg : Higher Education Press ; Beijing and Springer-Verlag, 2012. 336 p.
26. Cuomo K. M., Oppenheim A. V., Strogatz S. H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications // IEEE Transactions on circuits and systems II : Analog and digital signal processing. 1993. Vol. 40, № 10. P. 626–633. DOI: 10.1109/82.246163
27. Blakely J. N., Eskridge M. B., Corron N. J. A simple Lorenz circuit and its radio frequency implementation // Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2007. Vol. 17, № 2. P. 023112. DOI: 10.1063/1.2723641
28. Кузнецов С. П. Простые электронные генераторы хаоса и их схемотехническое моделирование // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 3. С. 35–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61
29. Ораевский А. Н. Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130–142.
30. Глуховский А. Б. Нелинейные системы, являющиеся суперпозициями гиростатов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 4. С. 816–820.
31. Doroshin A. V. Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors // Communications in Nonlinear



- Science and Numerical Simulation. 2011. Vol. 16, № 8. P. 3188–3202. DOI: 10.1016/j.cnsns.2010.10.020
32. Kolář M., Gumbs G. Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 45, № 2. P. 626–637. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.626
33. Кузнецов С. П. Аттрактор типа Лоренца в электронном параметрическом генераторе и его трансформация при нарушении точных условий параметрического резонанса // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2016. Т. 24, № 3. С. 68–87. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-3-68-87
34. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
35. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
36. Farmer J. D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982. Vol. 4, № 3. P. 366–393. DOI: 10.1016/0167-2789(82)90042-2
37. Yu P., Xu F. A common phenomenon in chaotic systems linked by time delay // *Intern. Journal of Bifurcation and Chaos*. 2006. Vol. 16, № 12. P. 3727–3736. DOI: 10.1142/S0218127406017129
38. Балякин А. А., Рыскин Н. М. Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 6. С. 3–21.
39. Yanchuk S., Giacomelli G. Spatio-temporal phenomena in complex systems with time delays // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2017. Vol. 50, № 10. 103001. DOI: 10.1088/1751-8121/50/10/103001
40. Хернтер М. Е. Multisim: Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств. М.: Издательский дом «ДМК-пресс», 2006. 501 с.

Образец для цитирования:

Кузнецов С. П., Купцов П. В. Аттрактор Лоренца в системе с запаздыванием: пример псевдогиперболического хаоса // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*. 2018. Т. 18, вып. 3. С. 162–176. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-3-162-176

Lorenz Attractor in a System with Delay: an Example of Pseudohyperbolic Chaos

S. P. Kuznetsov, P. V. Kuptsov

Sergey P. Kuznetsov, ORCID 0000-0003-4506-9864, Udmurt State University, 1, Universitetskaya Str., Izhevsk, 426034, Russia, spkuz@yandex.ru

Pavel V. Kuptsov, ORCID 0000-0003-2685-9828, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politechnicheskaya Str., Saratov, 410054, Russia, p.kuptsov@sstu.ru

Background and Objectives: The work contributes to a research direction aimed at search for and construction of physically realizable systems, which could fill the mathematical theory of pseudo-hyperbolic dynamics with physical content. Chaotic attractors belonging to this class generate genuine chaos that does not degrade under small variations of parameters and functions in dynamical equations. **Materials and Methods:** The methodological apparatus of the study uses numerical methods for integrating differential equations with time-delay, methods for calculating Lyapunov exponents, and special methods for testing the absence of tangencies of subspaces of vectors of small perturbations of orbits on the attractors, that is an essential condition of pseudo-hyperbolicity according to the definition. **Results:** An example of a system is introduced which is described by differential equations with retarded argument, in the infinite-dimensional phase space of which there occurs a chaotic attractor similar in properties to the classic Lorenz attractor. Presented and tested is a mathematical toolkit needed to identify and test the pseudo-hyperbolic nature of chaos. The scheme of the electronic generator governed by the

proposed equations is presented, and its dynamics is simulated using the Multisim software environment, in particular, the oscilloscope traces and spectra of chaotic oscillations generated by the system are shown. **Conclusion:** The concept of pseudo-hyperbolic dynamics, which clearly is of interdisciplinary significance, deserves attention, particularly, in the frame of application to the design of electronic generators of robust chaos that survives variations in parameters and details of the construction, and therefore is of interest for possible applications of chaos.

Key words: dynamical system, attractor, chaos, mapping, Lyapunov exponent, time-delay, Lorenz model.

Acknowledgements: Development of the mathematical model and numerical calculations (Sections 1, 2) were carried out under support of the Russian Science Foundation (project no. 15-12-20035). Analysis and calculations based on the criterion of angles, design of the electronic circuit and simulations of its operation with Multisim (Sections 3, 4) were carried out under support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-02-00135).

References

1. Dmitriev A. S., Efremova E. V., Maksimov N. A., Panas A. I. *Generatsiia khaosa* [Generation of chaos]. Moscow, Technosfera Publ., 2012. 424 p. (in Russian).
2. Anosov D. V., Gould G. G., Aranson S. K., Grines V. Z., Plykin R. V., Safonov A. V., Sataev E. A., Shlyachkov S. V., Solodov V. V., Starkov A. N., Stepin A. M.



- Dynamical Systems IX: Dynamical Systems with Hyperbolic Behaviour (Encyclopaedia of Mathematical Sciences)*. Springer, 1995, vol. 9. 236 p.
3. Sinaĭ Ya. G. The Stochasticity of Dynamical Systems. *Selected Translations, Selecta Math. Soviet.*, 1981, vol. 1, no. 1, pp. 100–119.
 4. Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1953–2001. DOI: 10.1142/S0218127497001527
 5. Anosov D. V. Dynamical Systems in the 1960s: The Hyperbolic Revolution. In: *Mathematical Events of the Twentieth Century*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag and Moscow, PHASIS Publ., 2006. P. 1–18.
 6. Turaev D. V., Shilnikov L. P. An example of a wild strange attractor. *Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no. 2, pp. 291–314.
 7. Turaev D. V., Shilnikov L. P. Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors. *Doklady Mathematics*, 2008, vol. 77, no. 1, pp. 17–21. DOI: 10.1134/S0013788X08010055
 8. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2016, vol. 337, pp. 43–57. DOI: 10.1016/j.physd.2016.07.006
 9. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Kozlov A. D. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 4–36 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36
 10. Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Kazakov A. O., Kozlov A. D. *Elements of contemporary mathematical theory of dynamical chaos*. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. 2012, arXiv preprint 1712.04032, pp. 1–38.
 11. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–141.
 12. Sparrow C. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Springer Science & Business Media, 2012. 270 p.
 13. Kuznetsov S. P. *Dinamicheskii Khaos* [Dynamical chaos]. 2nd ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 356 p. (in Russian).
 14. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20.
 15. Shimada I., Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of Theoretical Physics*, 1979, vol. 61, no. 6, pp. 1605–1616.
 16. Pikovsky A., Politi A. *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics*. Cambridge University Press, 2016. 295 p.
 17. Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction. 2018, arXiv preprint 1805.06644, pp. 1–17.
 18. Lai Y. C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic? *Nonlinearity*, 1993, vol. 6, no. 5, pp. 779–797.
 19. Anishchenko V. S., Kopeikin A. S., Kurths J., Vadivasova T. E., Strelkova G. I. Studying hyperbolicity in chaotic systems. *Phys. Lett. A*, 2000, vol. 270, pp. 301–307.
 20. Kuznetsov S. P., Kruglov V. P. On Some Simple Examples of Mechanical Systems with Hyperbolic Chaos. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 297, pp. 208–234. DOI: 10.1134/S0081543817040137
 21. Kuptsov P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 1, 015203. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.015203
 22. Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Numerical test for hyperbolicity of chaotic dynamics in time-delay systems. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, no. 1, pp. 010201. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.010201
 23. Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 56, pp. 227–239. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.08.016
 24. Kuznetsov S. P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics. *Physics-Uspokhi*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144. DOI: 10.3367/UFNe.0181.201102a.0121
 25. Kuznetsov S. P. *Hyperbolic Chaos: A Physicist's View*. Berlin; Heidelberg, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag, 2012. 336 p.
 26. Cuomo K. M., Oppenheim A. V., Strogatz S. H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Transactions on circuits and systems II: Analog and digital signal processing*, 1993, vol. 40, no. 10, pp. 626–633. DOI: 10.1109/82.246163
 27. Blakely J. N., Eskridge M. B., Corron N. J. A simple Lorenz circuit and its radio frequency implementation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2007, vol. 17, no. 2, pp. 023112. DOI: 10.1063/1.2723641
 28. Kuznetsov S. P. Simple electronic chaos generators and their circuit simulation. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 3, pp. 35–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61
 29. Oraevskii A. N. Masers, lasers, and strange attractors. *Quantum electronics*, 1981, vol. 11, no. 1, pp. 71–78.
 30. Gluhovsky A. B. Nonlinear systems that are superpositions of gyrostats. *Sov. Phys. Dokl.*, 1982, vol. 27, pp. 823–825.
 31. Doroshin A. V. Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors. *Communications in Nonlinear*



- Science and Numerical Simulation*, 2011, vol. 16, no. 8, pp. 3188–3202. DOI: 10.1016/j.cnsns.2010.10.020
32. Kolář M., Gumbs G. Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel. *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 45, no. 2, pp. 626–637. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.626
33. Kuznetsov S. P. Lorenz type attractor in electronic parametric generator and its transformation outside the accurate parametric resonance. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24, no 3, pp. 68–87 (in Russian). DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-68-87
34. Bellman R. E., Cooke K. L. *Differential-difference equations*. New York, London, Academic Press, 2012. 482 p.
35. El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*. New York, Academic Press, 1973. 356 p.
36. Farmer J. D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1982, vol. 4, no. 3, pp. 366–393. DOI: 10.1016/0167-2789(82)90042-2
37. Yu P., Xu F. A common phenomenon in chaotic systems linked by time delay. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, vol. 16, no. 12, pp. 3727–3736. DOI: 10.1142/S0218127406017129
38. Balyakin A. A., Ryskin N. M. Peculiarities of calculation of the Lyapunov exponents set in distributed self-oscillated systems with delayed feedback. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 15, no. 6, pp. 3–21 (in Russian).
39. Yanchuk S., Giacomelli G. Spatio-temporal phenomena in complex systems with time delays. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017, vol. 50, no. 10, 103001. DOI: 10.1088/1751-8121/50/10/103001
40. Herniter M. E. *Schematic Capture with Multisim*. Prentice Hall, 2004. 512 p.

Cite this article as:

Kuznetsov S. P., Kuptsov P. V. Lorenz Attractor in a System with Delay: an Example of Pseudogyperbolic Chaos. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 162–176 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-3-162-176