



в области измерительной камеры для $V(y)$, заданной по формуле (10) для различных значений максимальной проекции $V(y)$, м/с: $\beta = 0.2$, $\beta = 0.5$ и $\beta = 0.8$.

Из графиков видно, что, как и в предыдущем случае, при отличной от нуля скорости среды во всех случаях наблюдается снос акустического пучка. Так как проекция скорости по сечению изменяется нелинейно (в соответствии с (10) при прохождении потока значение проекции скорости по y плавно возрастает, принимает максимальное значение в центре сечения, затем плавно спадает), то и характер изменения границ акустического пучка не имеет ярко выраженных, острых изгибов при его распространении. Как видно из рис. 5, б, в, область максимального значения амплитуды поля пронесется по всему пространству движущейся среды, как и в предыдущем численном эксперименте (см. рис. 4, б, в). После прохождения области потока при возрастании координаты y наблюдается расходимость пучка.

Заключение

Представленная математическая модель расчёта амплитуды поля волнового пучка при наличии движущейся среды позволяет по заданным характеристикам рассматриваемой системы оценивать характер распределения в ней волнового поля. Она также может быть адаптирована и использована для более сложного характера взаимодействия акустической волны с движущейся средой. Полученные зависимости позволяют оценить характер распределения поля в системах, подобных ультразвуковому газовому расходомеру.

УДК 621.3.011.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ В СТАТИЧЕСКОМ И ДИНАМИЧЕСКОМ РЕЖИМАХ

М. В. Давидович¹, А. И. Тимофеев¹, И. А. Корнев¹, В. Я. Явчуновский²

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

E-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru

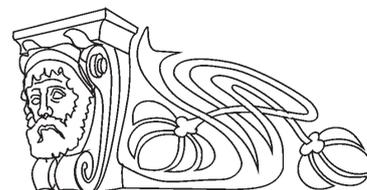
²ООО НПФ «Этна», Саратов

E-mail: vuy@etna.su

Получены интегральные соотношения и интегродифференциальные уравнения, учитывающие влияние магнитных экранов (магнетиков) на индуктивность. Рассмотрены нелинейные магнитные материалы с гистерезисом и без, а также аппроксимации нелинейных материалов и индуктивностей. Показано, что при гистерезисе лучше использовать нелинейное уравнение для намагниченности.

Список литературы

1. Kositsyn N. V., Lapin S. A., Petrov V. V. High Resolution Ultrasonic System for 3D Image Capturing and Reconstruction // 2013 Collaborative Conference on 3D & Materials Research (CC3DMR). Jeju, South Korea, 2013. P. 633–634.
2. Petrov V. V., Kositsyn N. V., Lapin S. A. High Resolution Ultrasonic Tomography System // Acoustics 2013 New Delhi «Technologies for a Quieter India». New Delhi, India, 2013. P. 633–634.
3. Косицын Н. В., Петров В. В. Разработка программного комплекса для сбора и визуализации научных данных // Вестн. ТГТУ. 2014. Т. 20, № 2. С. 277–283.
4. Кремлевский П. П. Расходомеры и счетчики количества веществ. Кн. 1. СПб. : Политехника, 2002. 409 с.
5. Кремлевский П. П. Расходомеры и счетчики количества веществ. Кн. 2. СПб. : Политехника, 2004. 412 с.
6. Кивилис С. С., Решетников В. А. Влияние профиля установившегося потока на погрешность ультразвуковых расходомеров // Измерительная техника. 1965. № 3. С. 52–54.
7. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М. : Наука, 1981. 208 с.
8. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику / пер. с англ. ; под ред. Г. И. Косоурова. М. : Мир, 1970. 364 с.
9. Стюарт И. Г. Введение в Фурье-оптику / пер. с англ. ; под ред. Г. Д. Копелянского. М. : Мир, 1985. 182 с.
10. Григорьев М. А., Навроцкая В. В., Прохоров В. В., Петров В. В., Толстиков А. В. Влияние поперечной расходимости «звукового» пучка на эффективность акустооптического взаимодействия // Оптика и спектроскопия. 1998. Т. 84, № 2. С. 307.



Рассмотрено установление колебаний в цепи с простейшей аппроксимацией нелинейной индуктивности. Оценено влияние нелинейных магнитных экранов на индуктивности радиореакторов электротранспорта как в зависимости от тока, так и от частоты.

Ключевые слова: нелинейная индуктивность, интегральные уравнения, магнитостатика, радиореактор.

**About the Definition of a Nonlinear Inductance in Static and Dynamic Regimes****M. V. Davidovich, A. I. Timofeev,
I. A. Korneev, V. Ya. Yavchunovsky**

The integral relations and integral-differential equations that take into account the influence of the magnetic shields (magnetic) inductance have been obtained. The non-linear magnetic materials with hysteresis and without it, and approximation of nonlinear materials and inductors have been considered. It is shown that for hysteresis we should use the nonlinear equation for the magnetization. The establishment of oscillations in a chain with the simplest approximation of a nonlinear inductance are reviewed. The effect of nonlinear magnetic shielding on inductance of radio-reactor electric vehicle as depending on current and frequency are estimated.

Key words: nonlinear inductance, integral equations, magnetostatics, radio-reactor.

DOI: 10.18500/1817-3020-2016-16-1-33-43

Введение

Весьма часто необходимо моделировать электрические цепи с нелинейными индуктивностями, зависящими от тока, поэтому определение нелинейной индуктивности является актуальной задачей. Линейная модель сосредоточенной индуктивности, как и другие линейные элементы цепей, справедлива в статике при слабых полях. В квазистатике для немагнитного проводника с размерами, существенно меньшими длины волны, линейная индуктивность определена интегралом [1–3]

$$L_0 = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \iint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r'. \quad (1)$$

Здесь V – объем, занятый токами, d^3r' – элемент объема, I – протекающий через любое поперечное сечение s проводника полный ток, который в силу соленоидальности считаем не зависящим от расположения сечения. Соответственно при уменьшении s плотность тока растет. Эта формула справедлива для любого замкнутого (соленоидального) витка постоянного тока, т.е. тока с плотностью, удовлетворяющей уравнению $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Такой ток можно представить как ротор некоего вектора, а именно $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$. Для замкнутого металлического проводника плотность тока постоянна по поперечному сечению и равна $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \nu I / s$, где ν – нормаль к сечению. Когда сечение провода вдоль контура не меняется, плотность тока постоянна в объеме V . Если L_0 – индуктивность одного замкнутого контура, то, проводя мысленно контур из n одинаковых

витков по одному и тому же объему, т.е. увеличивая плотность тока в n раз, получим индуктивность $L = n^2 L_0$. Это, в частности, относится к индуктивности плоской катушки с близко расположенными витками, когда расстояния между ними малы, а изменением радиусов от витка к витку можно пренебречь. Линейная связь магнитных индукции и поля

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (2)$$

есть тоже модель, реализуемая в случае малых полей. Сильные поля изменяют свойства вещества, в силу чего в первом приближении магнитная проницаемость $\mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}))$ становится функцией амплитуды поля H . Это в той или иной степени имеет место для всех, в том числе и почти немагнитных в слабых полях веществ, например, немагнитных металлов. Далее для простоты считаем вещество однородным и изотропным, т.е. берем зависимость $\mu(H(\mathbf{r}))$, и тогда в однородном поле магнитная проницаемость однородна. Для определения индуктивности необходимо иметь кривую намагниченности $B(H) = f(H)$. Эта функция, вообще говоря, нелинейная и неоднозначная, причем имеющая гистерезис, т.е. зависящая от предыстории процесса намагничивания [2, 3], что наиболее характерно для ферромагнетиков. Теоретически получить указанную зависимость в общем случае весьма сложно. Обычно используют экспериментальные данные и получают зависимость при однородном поле. В предельном случае отсутствия гистерезиса функция нелинейная, но однозначная. Такие материалы называют идеально магнитомягкими. Удобно рассматривать абсолютно не перемагничивающиеся в рассматриваемых полях вещества, т.е. имеющие постоянный магнитный момент. Их называют идеально магнитожесткими или постоянными магнитами, а поле магнита можно описать формулой Био–Савара–Лапласа

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= \int_{V_0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3r' = \\ &= \nabla \times \int_{V_0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3r', \end{aligned} \quad (3)$$

где $G(\mathbf{r}) = (4\pi r)^{-1}$. В объеме магнита V_0 можно задать соленоидальное распределение тока с плотностью $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$. Магнитное поле магнита полностью определено его внутренними соленоидальными токами. При однородном намагничивании уравнение (3) можно свести к поверхностному интегралу. Для гармонических



процессов величины $\mu(\mathbf{r}, \omega, H(\mathbf{r}, \omega))$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ зависят от частоты. Поскольку магнетизм в основном обусловлен ориентационным механизмом поляризации дипольных магнитных моментов (спинов, орбитальных моментов в молекулах или доменов в веществе), зависимость магнитной проницаемости от частоты характеризуется формулой Дебая:

$$\mu(\mathbf{r}, \omega, H(\mathbf{r}, \omega)) = 1 + \frac{\chi(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}, 0))}{1 + (\omega\tau)^2} - j \frac{\omega\chi(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}, 0))}{1 + (\omega\tau)^2}.$$

Характеризующая диссипацию и время релаксации $\tau = 1/\omega_c$ частота ω_c сильно зависит от того, какова природа и размер магнитных диполей (либо это молекула, либо ячейка Вейса (домен)), а также от плотности их расположения и температуры. Частотная дисперсия определяется перемагничиванием за период. Нелинейную намагниченность $\chi(H)$ однородной изотропной среды будем характеризовать безразмерной магнитной восприимчивостью:

$$\chi(H) = f_0(H) = B(H)/(\mu_0 H) - 1.$$

Получение весьма больших значений индуктивностей в достаточно широкой полосе частот и для большого диапазона рабочих токов представляет актуальную и достаточно сложную задачу. Такие индуктивности, в частности, являются основным элементом радиореакторов электротранспорта – фильтров нижних частот, предотвращающих выброс в сеть высокочастотных импульсов при изменении режимов работы электродвигателей [4]. Для электровозов при этом необходимы индуктивности порядка десятков миллигенри при токах до 800 А. Для троллейбусов эти параметры в несколько раз ниже. Необходимый рабочий частотный диапазон – до сотен кГц и выше. Поскольку μ ферромагнетиков может достигать значений 10000 и более, для снижения габаритов индуктивностей заманчиво использовать магнитные экраны из ферромагнетика, позволяющие увеличить линейную индуктивность в несколько сотен и более раз. Однако реально из-за насыщения при больших токах и из-за дисперсии на высоких частотах эти значения снижаются. Поэтому важно иметь оценку такого снижения в режиме больших токов и при увеличении частоты, что является одной из целей работы. Другая цель – получение выражения зависимости нелинейной индуктивности от поля, тока и частоты, удобного при моделировании нелинейных цепей, и анализ простейшей цепи в виде контура.

1. Интегродифференциальные уравнения магнитостатики

Расчет сложных магнитных полей обычно основан на численном решении дифференциальных уравнений (ДУ) магнитостатики. Интегральные и интегродифференциальные уравнения (ИДУ) для этого практически не используются. В данной работе приведены интегродифференциальные уравнения ИДУ для магнитостатики, на основе которых и произведен анализ. Магнетик (магнитный экран) описываем магнитной проницаемостью $\mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}))$. В переменном квазистатическом монохроматическом поле получаем еще зависимость от частоты $\mu(\mathbf{r}, \omega, H(\mathbf{r}, \omega))$. Иногда интересно рассматривать протекание через индуктивность малой переменной гармонической составляющей тока вместе с большой постоянной составляющей. В этом случае приближенно имеем $\mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}, \omega)) = \mu(\mathbf{r}, H_0(\mathbf{r})) + \mu_1(\mathbf{r}, H_0(\mathbf{r}))\delta H(\mathbf{r}, \omega)$, где $H = H_0 + \delta H$, H_0 – амплитуда поля постоянного тока, $\mu_1(\mathbf{r}, H_0(\mathbf{r})) = (\partial/\partial H)\mu(\mathbf{r}, H_0(\mathbf{r}, \omega))$. В малосигнальном приближении первый член существенно больше, и частотной дисперсией можно пренебречь. Но возникает нелинейность, связанная с постоянным полем, следовательно, – с постоянным током. Важно знать кривую намагниченности однородного вещества $B = B(H_0)$ – зависимость модуля индукции при очень медленном изменении магнитного поля постоянного тока. Тогда получаем зависимость $\mu(H_0) = \mu_0^{-1}(\partial/H_0)B(H_0)$. Обычно в качестве магнитных экранов используют ферромагнетики (электротехническую сталь), имеющие большие значения магнитных проницаемостей и являющиеся достаточно магнитомягкими. В этом случае предполагаем магнетик идеально магнитомягким, т.е. без петли гистерезиса.

Для получения поля и анализа индуктивности в присутствии изотропного магнитного тела объема V_M следует решать интегральные (интегродифференциальные) уравнения магнитостатики [4–6]. Эти уравнения можно получить или для магнитного поля \mathbf{H} , или для вектор-потенциала \mathbf{A} разными путями: вводя намагниченность $\mathbf{P}^m = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}$ (магнитную поляризацию), или магнитную проницаемость. Следует разделять объем на занятый магнитным током поляризации и током, создающим магнитное поле (объемом постоянного магнита) V_0 . Последний считаем идеально магнитомягким, т.е. ток заданным [4].



Даже в этом случае задача существенно нелинейная. Примеры кривых намагниченности магнитомягкой электротехнической стали и ряда других ферромагнитных материалов приведены в работе [4]. В работах [4–6] сначала рассмотрена линейная задача, а потом учтена нелинейность. Здесь мы с самого начала считаем задачу нелинейной, и вместо постоянного магнита рассматриваем катушку электромагнита, т.е. полагаем, что $\mu = 1$ в объеме V_0 , который занят соленоидальным током. Решаем краевую задачу магнитостатики для соленоидального тока с плотностью $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ при $\nabla \cdot (\mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}))\mathbf{H}(\mathbf{r})) = 0$. Это уравнение можно сформулировать в виде дифференциального уравнения второго порядка для \mathbf{H} , если взять его ротор и выразить дивергенцию поля:

$$-\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \nabla F(\mathbf{r}, H(\mathbf{r})), \quad (4)$$

$$F(\mathbf{r}, H(\mathbf{r})) = \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\left\{ \mu^{-1}(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}))([\nabla \mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r})) + \mu_1(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}))\nabla H(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})) \right\}.$$

Здесь градиент берется по первому аргументу \mathbf{r} , $\mu_1(\mathbf{r}, H(\mathbf{r})) = (\partial / \partial H)\mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}))$ при постоянном \mathbf{r} . Считаем, что объемы V_0 и V_M не пересекаются и проницаемость равна единице вне этих объемов. Очевидно, имеем связь

$$F(\mathbf{r}, H(\mathbf{r})) = \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\left\{ \mu^{-1}(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}))([\nabla \mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r})) + \mu_1(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}))\nabla H(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})) \right\}$$

Учитывая, что $(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^{-1}$ есть функция Грина $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ оператора Лапласа, имеем интегродифференциальное уравнение (ИДУ) для магнитного поля:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_{V_0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' - \int_{V_M} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' F(\mathbf{r}', H(\mathbf{r}')) d^3 r'. \quad (5)$$

Здесь область, где $\nabla \times \mathbf{J} \neq 0$, совпадает с объемом V_0 , занятым током, а функция F может быть отлична от нуля только в области магнетика. В работах [4–6] приведен вид аналогичных уравнений в линейном случае, вид ИДУ, сформулированных относительно вектор-потенциала \mathbf{A} , а также предложены методы их итерационного решения.

Получим другой вид уравнения для магнитного поля. Поскольку $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$, имеем в отсутствие магнетика

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{V_0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r',$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int_{V_0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

В присутствии магнетика эти соотношения нарушаются, поскольку возникают дополнительные (вторичные) источники, связанные с его поляризацией. Магнитное поле уже не является соленоидальным и в силу теоремы Гельмгольца представляется своей соленоидальной и потенциальной частями:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}} - \nabla \Psi. \quad (6)$$

Беря ротор от (6), убеждаемся, что можно взять $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. Беря дивергенцию от (6), получаем уравнение для скалярного магнитного потенциала:

$$-\nabla^2 \Psi = \nabla \cdot \mathbf{H} = F(\mathbf{r}, H(\mathbf{r})). \quad (7)$$

Таким образом, имеем нелинейное ИДУ:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int_{V_0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' - \nabla \int_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F(\mathbf{r}', H(\mathbf{r}')) d^3 r'. \quad (8)$$

Первый интеграл в (8) определяется током, определяет поле $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ в отсутствие магнетика и задан. ИДУ (8) можно преобразовать к виду (5), воспользовавшись соотношением $\nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и тем, что соленоидальный ток не имеет нормальной компоненты к поверхности, окружающей объем V_0 . Пользуясь теоремой о роторе, переносим действие оператора «ротор» на \mathbf{J} . Магнетик представляет собой систему замкнутых орбитальных и спиновых атомарных токов, также не имеющих результирующей нормальной компоненты на его границе [3], на которой $\nabla \cdot \mathbf{H}$ есть плотность фиктивных наведенных поверхностных магнитных зарядов, обусловленных магнитными диполями (моментами). Ее градиент не может иметь нормальной компоненты. Поэтому применение теоремы о градиенте приводит к уравнению (5).

Обычно магнитное тело имеет резкую границу, т.е. его магнитная проницаемость изменяется скачком от значения $\mu^- = \mu(\mathbf{r})$ на внутренней части границы до значения в вакууме $\mu^+ = 1$ на внешней ее части. При этом на границе S_M тела возникают связанные дипольные магнитные заряды, а величина $\nabla[\mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r}))]$ направлена вдоль внешней нормали $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ к поверхности внутрь тела и в ней выделяется поверхностная дельта-функция с множителем $1 - \mu^-$. Квадратные скобки выше указывают, что оператор градиента действует на все переменные. Наиболее простой результат получается, если предположить, что



тело однородное и магнитное поле в нем также однородное. Тогда имеем

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int_{V_0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' - \nabla \oint_{S_M} [1 - \mu^{-1}(H(\mathbf{r}'))] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}') dS. \quad (9)$$

В общем случае в (9) возникают объемные интегралы, которые мы не приводим. Формально можно записать $\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')$ и подставить в (9), но такое ИДУ следует решать во всей бесконечной области, что нецелесообразно.

2. Индуктивность витков соленоидального тока

Формула (1) пригодна и для переменного тока, но в квазистатике она используется как приближенная. В этом случае распределение плотности тока неоднородно по поперечному сечению. Например, с ростом частоты необходимо учитывать изменяющийся распределение тока скин-эффект, приводящий к снижению индуктивности [1]. При сильном скин-эффекте можно считать, что равномерный ток течет не по неполному сечению проводника радиуса r , а по кольцу толщиной $\delta \ll r$ [2]. Если имеем линейный бесконечный проводник, то формула (1) позволяет получить погонную индуктивность. В предельном случае очень больших частот δ/r стремится к нулю. Тогда, вводя поверхностную плотность тока $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_\perp) \delta(x_\nu)$, где x_ν – нормальная координата к поверхности S , получаем:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \iint_{S \ S} \frac{\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_\perp) \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}'_\perp)}{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|} d^2 r d^2 r'. \quad (10)$$

В случае одного проволочного кольца поверхность S есть поверхность тора, а для цилиндрического проводника – цилиндра, при этом $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}_\perp) = I/(2\pi r)$. Для цилиндра $|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp| = \sqrt{(z - z')^2 + 2r^2(1 - \cos(\varphi - \varphi'))}$. Высокочастотная индуктивность проводника длины l есть

$$L_0 = \frac{\mu_0}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi d\varphi' dz dz'}{\sqrt{(z - z')^2 + 2r^2(1 - \cos(\varphi - \varphi'))}}. \quad (11)$$

Интеграл можно преобразовать так:

$$L_0 = \frac{\mu_0 l}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 2r^2(1 - \cos(\varphi))}}. \quad (12)$$

Вычисляя интеграл по углу по формуле (2.5.16.45) из работы [7], получаем:

$$L_0 = \frac{\mu_0 l}{\pi^2} \int_0^l \frac{\mathbf{K}(2r/\sqrt{\xi^2 + 2r^2}) d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 2r^2}}. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{K}(x)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода. Очевидно, индуктивность (13) меньше индуктивности на постоянном токе [1]: $L_0 = [\mu_0 l / (2\pi)] [\ln(2l/r) - 3/4]$. Для оценки (13) служит формула (2-16) из работы [1]: $L_0 = [\mu_0 l / (2\pi)] [\ln(2l/r) - 1]$. Для получения частотной зависимости индуктивности следует использовать формулу $L_0 = [\mu_0 l / (2\pi)] [\ln(2lc^{-1}/r) - 1]$, где параметр $c < 1$ зависит от нормированной толщины скин-слоя $\delta/r = \sqrt{4/(r^2 \omega \sigma \mu_0)}$ и приведен в таблице в [1]. Можно также выразить индуктивность тороидального кольца в виде интегралов и получить их приближенное значение, если ток течет по скин-слою.

3. Индуктивность в присутствии магнетика

Задав \mathbf{J} , решив приведенные выше и в работах [4–6] ИДУ, можно вычислить индуктивность из соотношения $L(I) = \Phi(I)/I$, где Φ – магнитный поток через контур. В общем случае $\Phi(I)$ – нелинейная функция тока, определяемая через решение ИДУ как интеграл потока индукции \mathbf{V} через контур с током. Эта формула в отличие от (1) хорошо работает только для тонкого замкнутого проводника, тогда как (1) позволяет вычислять и погонную индуктивность. В обоих случаях необходимо иметь однозначную зависимость $\mu(\mathbf{r}, I)$. Основная задача при расчете цепей – получить зависимость $L(I)$. Можно использовать другой путь, связанный с определением энергии магнитного поля в статике [3].

Пусть L_0 – индуктивность магнитного поля в отсутствие магнетика, которую легко вычислить, а L – индуктивность в присутствии магнетика и при токе I . Для энергий магнитного поля имеем $E_{M0} = L_0 I^2 / 2$ и $E_M = L I^2 / 2$. С другой стороны, можно записать

$$E_{M0} = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mathbf{H}_0^2(\mathbf{r}) dV,$$

$$E_M = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r})) \mathbf{H}^2(\mathbf{r}) dV.$$

Здесь, вообще говоря, объем V бесконечный и важна однозначность введения магнитной про-



нищаемости. Иначе следует использовать произведение $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$. Для некоторых катушек есть области, где поле отсутствует или очень малó, и эти области можно исключить. В частности, в многослойной цилиндрической катушке поле малó в зазорах между проводами и при значительном удалении от них, но максимально на ее оси. На значительном удалении закон спада поля $\sim 1/r$, и интегралы можно оценить. Таким образом, имеем

$$L = L_0 \int_V \mu(\mathbf{r}, H(\mathbf{r})) \mathbf{H}^2(\mathbf{r}) dV / \int_V \mathbf{H}_0^2(\mathbf{r}) dV. \quad (15)$$

Для расчета по указанной формуле в нулевом приближении берем $\mathbf{H} \approx \mathbf{H}_0$. Из уравнений (5), (8), (9) в первом приближении имеем поправку $\mathbf{H} \approx \mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}$, если в интегралы подставить поле \mathbf{H}_0 , определенное в виде

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \nabla \times \int_{V_0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (16)$$

Для постоянной магнитной проницаемости в нулевом приближении $L = \mu L_0$ (что в нелинейном случае возможно только в постоянном во всем объеме поле), при этом μ должно полностью заполнять объем, где существует поле. Если можно считать поле кусочно-постоянным, а объем заполнен магнетиком частично, то $L = k\mu L_0$, где k – коэффициент заполнения, определенный согласно (15). Обычно $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}I/S$, поэтому формула (16) указывает на то, что поле есть функция тока. Метод последовательных приближений тогда дает функцию $\mathbf{H}(\mathbf{r}, I)$. Наиболее просто оценить формулу (15), если поле однородно и ограничено (примером может служить тороидальная катушка с магнитным сердечником).

Векторное поле определяется из уравнений (5), (8), (9). Использовать соотношение $L = k\mu(H)L_0$ можно, если поле достаточно однородное. Для определения амплитуды H из этих уравнений используем метод последовательных приближений [4], определив нулевое приближение в виде (16), а затем $\mathbf{H}(\mathbf{r}, I)$. Амплитуду H определяем как усредненную по объему величину $\text{sgn}(P^m) \mathbf{H}(\mathbf{r}, I)$, т.е. считаем ее изменяющей знак при изменении знака намагниченности. Функцию намагниченности будем аппроксимировать. Она имеет гистерезис тип и сигмоидной функции. Рассмотрим несколько сигмоидных функций: $f_1(x) = 2/(1 + \exp(-x/(2x_0))) - 1$, $f_2(x) = x/(|x| + x_0)$, $f_3(x) = (2/\pi) \arctan(x/x_0)$.

Все они нечетные, равны нулю при $x = 0$, а при $x = x_0$ две последние равны $1/2$, а первая равна примерно 0.73. Пусть P_m^m – максимальная поляризация в постоянном бесконечно сильном поле, когда все диполи ориентированы вдоль него. Если гистерезиса нет (магнитомягкая среда), то для третьей функции имеем

$$P^m(H) = (2P_m^m / \pi) \arctan(H/\bar{H}). \quad (17)$$

При амплитуде \bar{H} достигается половинная намагниченность от максимальной величины. Рассмотрим сигмоидную функцию с гистерезисом. В этом случае важна предыстория намагничивания, поэтому введем зависимость от времени $H(t)$ и величину $m(t) = \text{sgn}(\dot{H}(t)) = \pm 1$. Считаем процесс медленным с установлением релаксации. В отсутствие намагниченности полагаем $P_{0m}^m = 0$. Если намагничивание идет от нуля до P_m^m , то при обратном уменьшении поля до нуля имеем остаточную намагниченность P_0^m . Дальнейшее перемагничивание (H отрицательная) приводит к значению $-P_m^m$. Увеличение отрицательного значения поля до нуля дает величину $-P_0^m$ (считаем кривую гистерезиса симметричной), а до очень больших значений – опять величину P_m^m . Обозначим точки $\pm H_p$, где $P^m = 0$. Пусть намагничивание идет от неких минимальных до неких максимальных значений и наоборот. Если производная $\dot{H}(t)$ положительная ($m = 1$), вычисляется максимум поляризации P_{0m}^m , но при вычислении используется предыдущее значение минимума P_{0m}^m . При изменении знака $\dot{H}(t)$ вместо минимального значения P_{0m}^m подставляется полученное максимальное значение P_{0m}^m и начинает вычисляться минимум. Такая подстановка происходит при каждой смене знака. Очевидно, в случае гистерезиса имеем аппроксимацию $f_0(H(t)) = f_i(H(t) + (P_{0m}^m(t)/P_m^m)H_p)$. Здесь $i=1,2,3$. В случае гистерезиса имеем $H(t) = H(I(t))$, $P^m(H) = (2P_m^m/\pi) \arctan(H(t)/\bar{H} + (P_{0m}^m(t)/P_m^m)H_p/\bar{H})$. Случаю отсутствия гистерезиса соответствует $H_p = 0$. В однородном магнетике при однородном поле $B(t) = \mu_0 H(t) + P^m(t)$, поэтому можно определить поток $\Phi(t)$ и напряжение на контуре $U = \dot{\Phi}(t) = (L(I(t)) + I(t)\partial L(I(t))/\partial I) \dot{I}(t)$. Очевидно, пользоваться соотношениями $\mu(I(t)) = 1 + \mu_0^{-1} P^m(I(t))/H(I(t))$ и $L = \mu L_0$ можно, только если они однозначные и дифференцируемые, т.е. в отсутствие гистерезиса.



Соответственно при отсутствии поля должна отсутствовать и намагниченность. Иначе более целесообразно использовать связь индукции, поля и намагниченности. Далее будем считать $H(I(t)) = \alpha I(t)$, где α – коэффициент, обратный длине, и рассматривать индуктивность $L = \mu L_0$, где $\mu = 1 + \alpha^{-1} k f_3(\alpha I(t)/\bar{H})/I(t)$. Здесь коэффициент $k = 2P_m^m / (\pi \mu_0 \bar{H})$ определяет превышение проницаемостью единицы в слабом поле.

4. Численные результаты

Рассмотрим последовательный контур из источника напряжения $U(t) = U_0 + U_1 \sin(\omega t)$, сопротивления R и нелинейной индуктивности L . Напряжение считаем действующим с момента $t=0$, до которого ни тока, ни намагниченности нет. Для простоты возьмем индуктивность в виде $L = L_0(1 + \kappa/(1 + |I(t)|/I_0))$. Здесь κ – магнитная восприимчивость, L_0 – индуктивность при полном насыщении (сильном токе), $L_0(1 + \kappa)$ – индуктивность при слабом токе, I_0 – ток, при котором $L = L_0(1 + \kappa/2)$. Обозначив $\Phi = LI$, имеем уравнение $U = \partial\Phi/\partial t + RI$, или

$$y(t_1) = y(t_0) + L_0^{-1} \int_{t_0}^{t_1} [U(t) - RI(t)] dt, \quad (18)$$

где $y = I_0 x(1 + \kappa/(1 + |x|))$, $x(t) = I(t)/I_0$. Нормированный ток x определяется однозначно через правую часть (18): $x(t) = \text{sgn}(y(t)) \sqrt{b^2 + |y(t)|/I_0 - b}$, $b = (1 + \kappa|y|/I_0)/2$. На рис. 1 приведено установление периодических колебаний при $U_0 = 0$ для $\kappa = 0$ (линейный случай) и $\kappa = 10^3$ для $U_1 = 100$ и $U_1 = 1000$. Использованы значения $R = 1$, $L_0 = 0.1$, $I_0 = 1$, $\omega = 10$. Номиналы величин можно относить к системе СИ, или использовать их нормированные значения. На рис. 2 установление колебаний в такой цепи показано для $U_1 = 10$ в случае малого и большого постоянного напряжения. Уравнение (18) решалось методом предиктор-корректор с трехкратной коррекцией. Соответствующий неявный метод имеет 4-й порядок. При малых амплитудах U_1 режим линейный с большой индуктивностью. С увеличением амплитуды возрастают четные гармоники и появляется постоянная составляющая, знак которой определяется знаком напряжения первого полупериода. Дальнейшее повышение амплитуды приводит к увеличению нечетных гармоник и появлению колебательного режима. Рис. 2 показывает, что при $U_0 \sim U_1$ переходный

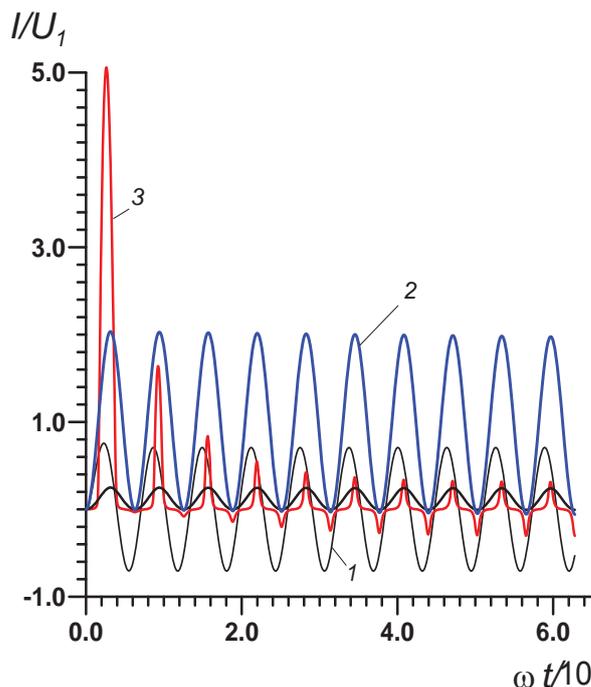


Рис. 1. Установление переходного процесса в контуре с нелинейной индуктивностью $L_0 = 0.1$, $k = 10^3$, $I_0 = 1$ (2, 3) и сопротивлением $R = 1$ при включении гармонического источника ($U_0 = 0$). Кривая 1 – линейный случай ($k = 0$), кривые 2, 3 – величины I/U_1 и $I/U_1 \cdot 10$ соответственно при $U_1 = 10^2$ и $U_1 = 10^3$

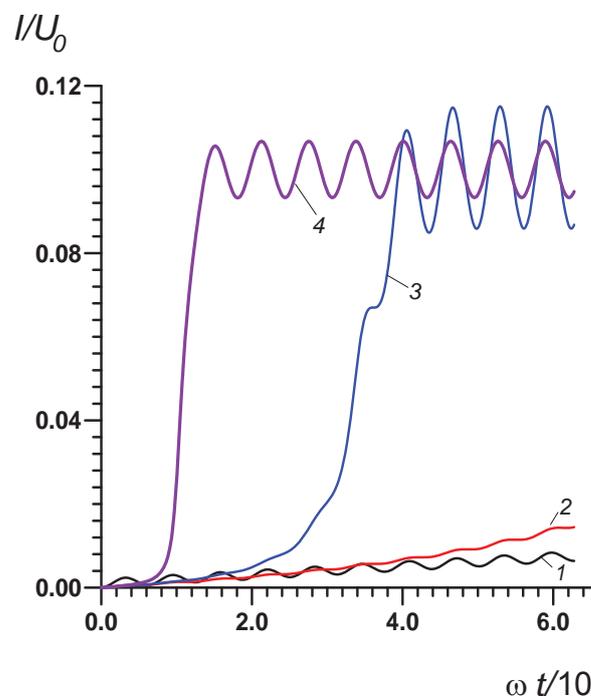


Рис. 2. Установление переходных процессов для нелинейного контура (см. рис. 1) при $U_1 = 10$: $U_0 = 10$ (1), $U_0 = 10^2$ (2), $U_0 = 3 \cdot 10^2$ (3), $U_0 = 10^3$ (4)



режим достаточно долгий и сложный, но при $U_0 > U_1$ поведение индуктивности близко к линейному, причем ее значение падает с ростом U_0 . Уменьшение индуктивности характеризуется большим размахом колебаний. Поскольку реально индуктивность есть функция времени, при быстропеременных процессах удобно ввести эффективную индуктивность, усредненную за период. Наличие в контуре емкости приведет к нелинейному резонансу: приближение частоты к резонансной увеличивает ток и уменьшает индуктивность, что, в свою очередь, препятствует его нарастанию. Результат зависит от того, с какой стороны осуществлен подход к резонансу. Достижение нелинейного резонанса удобнее осуществлять путем медленного изменения амплитуд U_0, U_1 , при этом возможен резонанс на гармониках.

На рис. 3 приведен схематический вид катушки радиореактора. Она представляет собой несколько вертикальных и радиальных рядов витков, намотанных толстым медным проводом с оболочкой. Экраны выполнены в виде намотки стальной ленты. В модели они рассмотрены как секториальные скобы с заданной толщиной. Рассмотрена катушка с 30 витками (5 витков вдоль радиуса и 6 – вдоль высоты), имеющая внутренний радиус $R_0 = 10$ см и намотанная из медного провода с радиусом $r = 7.5$ мм (см. рис. 3). Катушка имеет индуктивность $L_0 = 210$ мкГн, длину намотки 26 м, высоту 96 мм и внешний радиус 180 мм. Расчет параметров произведен по стандартным формулам и хорошо совпал с экспериментом при малом токе и низкой частоте. На рис. 3 сверху показаны экраны, занимающие определенный угловой промежуток. Области магнетика соответствует объем, точки которого отстоят на расстоянии не более чем на t от поверхности, ограничивающей объем катушки. При $t = R_0$ вся внутренняя область заполнена магнетиком, что соответствует максимальному заполнению. Индуктивность при наличии экрана обозначим L . Рассмотрим поле в области провода. Между участками провода соседних витков их магнитные поля гасят друг друга. Внутри каждого провода его собственное поле в силу теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля [2, 3] линейно возрастает, а поля от внешних витков гасятся. Квадрат поля внутри провода есть $H^2 = I^2 \rho^2 / (4\pi^2 a^4)$, где a – радиус провода.

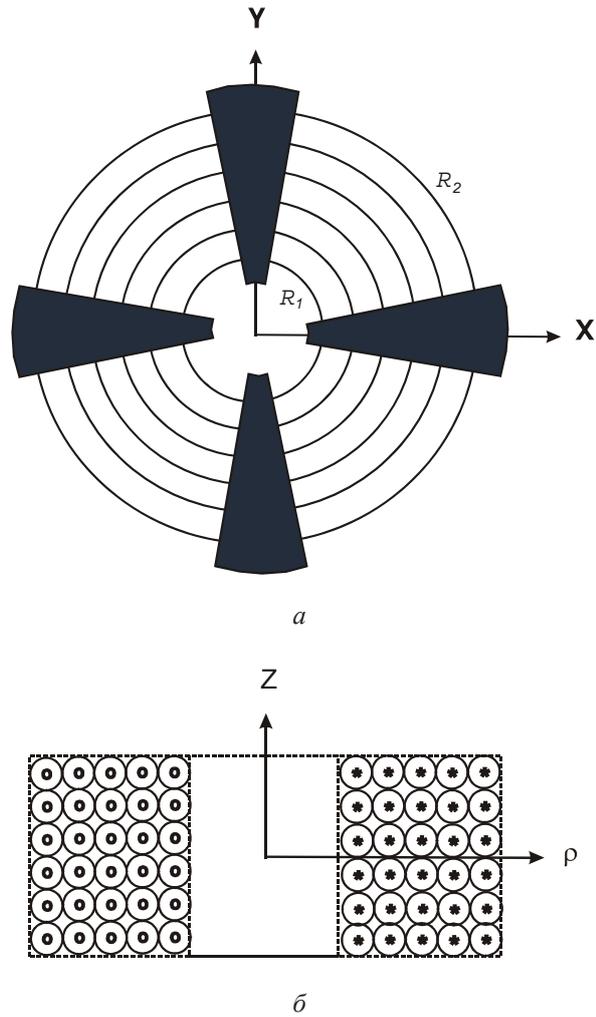


Рис. 3. Вид сверху катушки радиореактора с экранами в виде скоб (а) и сечение катушки без экранов (б)

Здесь ρ – локальная система координат, связанная с проводом. Средний квадрат получается усреднением по сечению провода: $\langle H^2 \rangle = I^2 / (8\pi^2 a^2)$. Указанное поле существенно меньше внешнего поля вблизи катушки, которое определяется вкладом всех витков, и его можно не учитывать при определении энергии. Если δ есть площадь сечений провода к общей прямоугольной площади, ограничивающей витки, то следует использовать величину $\delta \langle H^2 \rangle$. Величина δ может быть мала, если провод имеет толстую оболочку.

Считаем ток линейным и текущим по оси провода, образующего несколько витков (см. рис. 3). Тогда вектор-потенциал такого витка с номером i радиуса ρ_i , расположенного в точке z_i , имеет одну компоненту вида



$$A_\varphi(\rho, z) = I \frac{\mu_0 \rho_i}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\varphi) d\varphi}{\sqrt{\rho_i^2 + \rho^2 - 2\rho_i \rho \cos(\varphi) + (z - z_i)^2}} = I \frac{\mu_0 \rho_i}{2a} x^{1/2} P_{1/2}^1(x), \quad (19)$$

$a^2 = \rho_i^2 + \rho^2 + (z - z_i)^2$, $x = a^2 / \sqrt{a^4 - 4\rho^2 \rho_i^2}$, присоединенная функция Лежандра определена через функцию Лежандра как $P_{1/2}^1(x) = -(1-x^2)(\partial/\partial x)P_{1/2}(x)$, а магнитное поле определяется так: $H_\rho = -(\partial/\partial z)A_\varphi(\rho, z)$, $H_z = (\partial/\partial \rho)A_\varphi(\rho, z) + A_\varphi(\rho, z)/\rho$. На больших расстояниях оно убывает как его квадрат. Поэтому при определении индуктивности (15) объем достаточно выбрать конечным, но достаточно большим с границей, отстоящей от катушки на расстояние в несколько внешних радиусов. Алгоритм вычисления магнитного поля $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ заключается в суммировании полей каждого витка. Поле может быть уточнено подстановкой $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ в правую часть (8). В принципе указанную итерационную процедуру можно продолжить. Интегрирование по углу можно свести в области $(0, \pi/2)$, а интегрирование в сечении (ρ, z) достаточно вести в первом квадранте.

Типичные кривые намагничивания эля электротехнической стали приведены в работе [4]. Они показывают, что в области напряженностей поля до 200 А/м μ изменяется от порядка 10000 до 4000. Около этого значения напряженности μ резко уменьшается почти на порядок, а после значения порядка 2000 А/м падает еще. Реально при токах порядка сотен ампер она падает до величины порядка 100. Типичная зависимость магнитной проницаемости от поля, полученная дифференцированием кривой намагниченности, показана на рис. 4.

Учитывая то, что магнитные экраны занимают объем порядка от нескольких до нескольких десятков процентов от объема, где сосредоточено сильное поле, можно сделать вывод, что индуктивность за счет экранов может быть увеличена от нескольких до десятков раз даже при токах в сотни ампер. Зависимость индуктивности катушки (см. рис. 3) от тока в ней при разных коэффициентах заполнения внешнего объема магнетиком показана на рис. 5. Из-за быстрого затухания поля по радиусу выполнять весьма толстые экраны нецелесообразно, тогда как для увеличения L коэффициент заполнения по углу должен быть весьма высоким. Частотная дис-

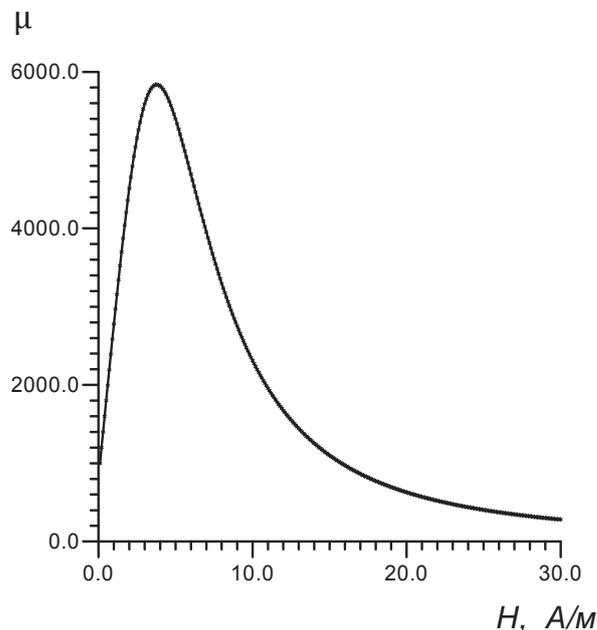


Рис. 4. Зависимость магнитной проницаемости для кривой намагниченности электротехнической стали

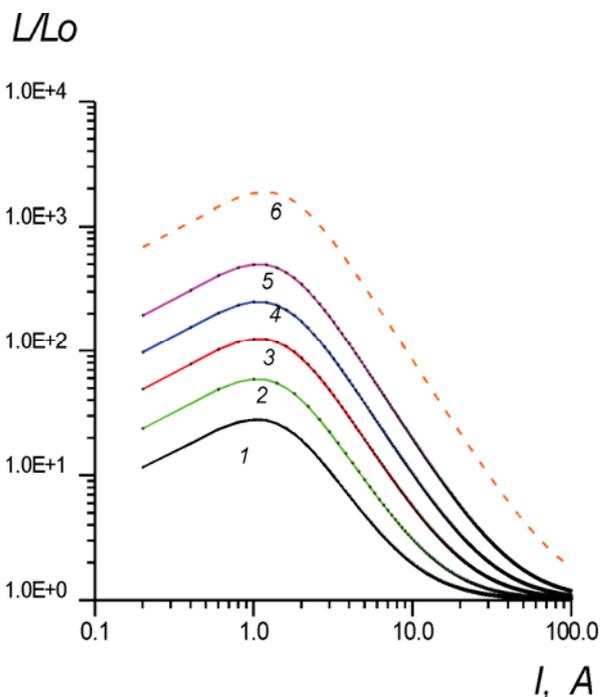


Рис. 5. Зависимость L/L_0 от тока в катушке I (А) при разных заполнениях объема материала экрана: $\varphi = \pi/2$, $t = 8$ (1), 16 (2), 32 (3) мм; $t = 32$, $\varphi = \pi$ (4), $\varphi = 2\pi$ (5); $\varphi = 2\pi$, $t = 100$ мм (6)



персия магнитной проницаемости описывается формулой $\mu = 1 + \kappa_0 / (1 + \omega^2 / \omega_0^2)$. Восприимчивость κ_0 зависит от поля. В малых полях для электротехнической стали она порядка 10000. Поэтому на частоте $\omega_0 = 1/\tau$, связанной с временем релаксации, магнитная проницаемость падает примерно в два раза. Реально коэффи-

циент передачи радиореактора на высоких частотах имеет осцилляции (рис. 6), связанные с межвитковыми емкостями и тем, что он является распределенной структурой. Магнитные экраны слабо влияют выше частоты 500 МГц, и для улучшения характеристик целесообразно включать параллельные емкости (см. рис. 6).

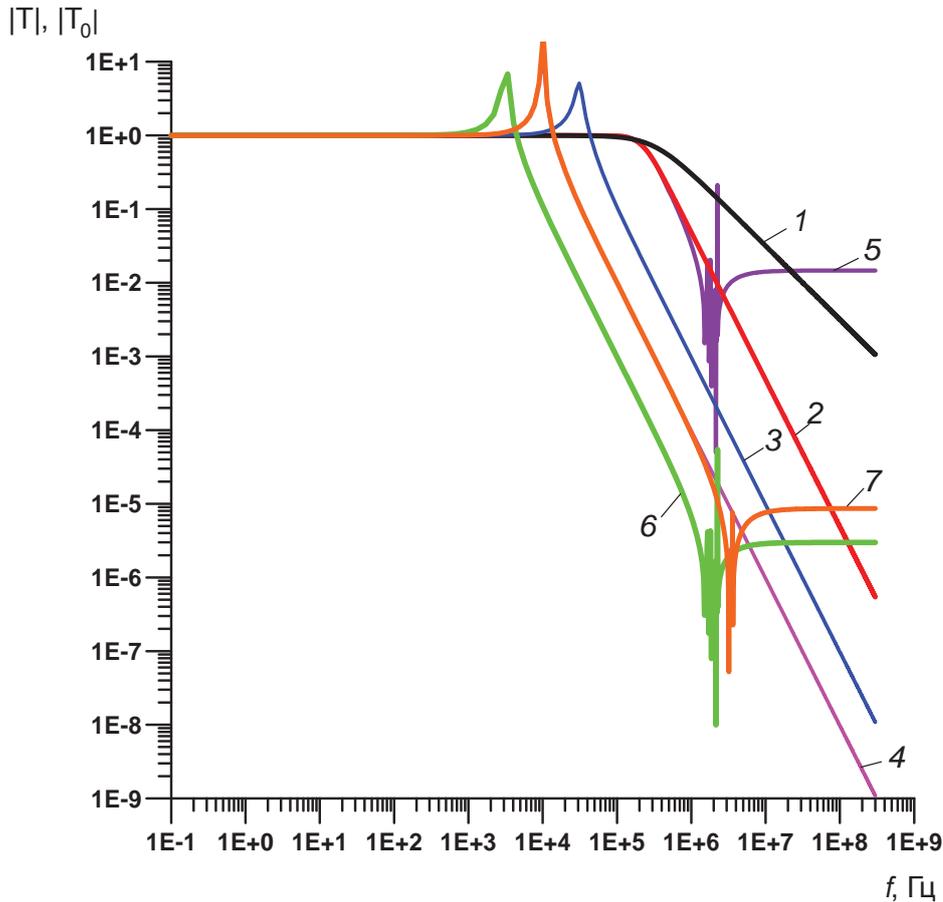


Рис. 6. Коэффициенты передачи T_0 (без экрана, 1) и T (2–6) для $L = 130$ мк Гн (1–6) и $L = 13$ мк Гн (7) при емкостях C соответственно $1.92 \cdot 10^{-9}$ (2, 5), 10^{-7} (3), 10^{-6} (4), $10 \cdot 10^{-5}$ (6) Ф. Кривые 5 и 7 построены с учетом межвитковых емкостей

Заключение

В работе получены ИДУ магнитостатики в случае наличия заданного стороннего поля (созданного постоянным соленоидальным током или постоянным магнитом) в присутствии магнитного тела со скалярной неоднородной магнитной проницаемостью, которая может быть нелинейной функцией поля. В общем случае уравнения содержат как объемные, так и поверхностные интегралы, и являются нелинейными. ИУ возможны лишь для однородных и однородно намагниченных тел, что обычно не выполняется. Объемные источники связаны

с производными поля. Для магнитостатики в общем случае следует решать ИДУ или ДУ. Полученные соотношения обобщаются на анизотропные тела простой подстановкой тензорных $\hat{\mu}$. Для нелинейных задач необходимо определить зависимость $\mu(\mathbf{H})$, причем для решения нелинейных ИДУ удобно использовать метод последовательных приближений. Рассмотрены аппроксимации нелинейной намагниченности с гистерезисом и без и введение магнитной проницаемости и индуктивности. В общем случае при гистерезисе функции B и $\mu = \mu_0^{-1} \partial B / \partial H$ неоднозначны и недифференцируемые.



Показано, что при переходном процессе в контуре с нелинейной индуктивностью, возбуждаемой синусоидальным источником напряжения амплитуды U_1 , имеет место сложное поведение. При малых амплитудах ток пропорционален U_1 . При средних напряжениях возникают преимущественно четные (вторая) гармоники, включая постоянную составляющую, знак которой совпадает со знаком начального полупериода синусоидального источника. Дальнейшее увеличение амплитуды приводит к возрастанию третьей гармоники и других нечетных гармоник и возникновению со временем колебательных режимов. Рассмотрены переходные процессы в контуре с дополнительным постоянным напряжением смещения U_0 , увеличение которого приводит к снижению эффективной индуктивности.

Нелинейная индуктивность радиореактора с магнитными экранами может уменьшаться в сотни раз при увеличении постоянного тока до величин порядка 100 А, но все же в разы выше, чем без экранов. На частотах более 500 КГц она также резко уменьшается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (№ 3.1155.2014/К).

Список литературы

1. Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А. Расчет индуктивности. Л. : Энергоатомиздат, 1986. 488 с.
2. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные волны. М. : Сов. радио, 1971. 662 с.
3. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А. Электромагнетизм и электромагнитные волны. М. : Высш. шк., 1985. 504 с.
4. Давидович М. В., Козлов А. В. Интегриродифференциальные уравнения магнитостатики и индуктивность при наличии электромагнитных экранов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13, № 2. С. 46–51.
5. Бушуев Н. А., Давидович М. В., Альтишулер Е. Ю. Магнитное поле МПФС приборов О-типа : расчет на основе интегральных соотношений // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2013. Т. 16, № 2. С. 36–44.
6. Давидович М. В., Явчуновский В. Я., Корнев И. А., Тимофеев А. И. О влиянии магнитных экранов, частоты и силы тока на индуктивность // Вопросы прикладной физики : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 21. С. 4–10.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М. : Наука, 1983. 752 с.