



ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 354–364
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 354–364
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-4-354-364>, EDN: MMFANT

Научная статья
УДК 537.311.332

Математическое моделирование электрического поля в анизотропных полупроводниках при холловских измерениях

В. В. Филиппов¹✉, А. А. Заворотный²

¹Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Россия, 398020, г. Липецк, ул. Ленина, д. 42

²Липецкий государственный технический университет, Россия, 398055, г. Липецк, ул. Московская, д. 30

Филиппов Владимир Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики, заведующий лабораторией физики полупроводников и твердотельной электроники, vvfilippov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4323-351X>

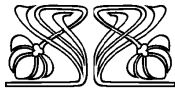
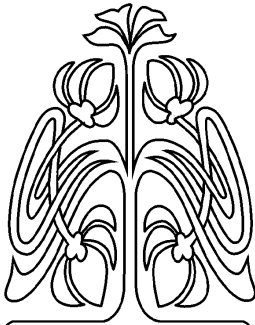
Заворотный Анатолий Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и биомедицинской техники, aazavorotniy@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0008-6316-667X>

Аннотация. Современные дискретные функциональные полупроводниковые приборы и структурные элементы микро- и нанoeлектроники используют материалы с анизотропией электрофизических свойств. В частности, такими материалами являются кристаллические термоэлектрики, слоистые графитовые структуры, напряженный кремний. При практическом применении данных полупроводников возникает необходимость измерений их кинетических коэффициентов. Однако электродинамика таких сред отличается от изотропных. Это требует корректировки существующих методов измерений удельной проводимости и концентрации основных носителей заряда. В работе приведена методика решения задачи Неймана с неоднородными граничными условиями для потенциала электрического поля в прямоугольной области в относительно слабом магнитном поле в линейном приближении. Рассмотренная в работе краевая задача встречается при анализе измерений эффекта Холла зондовыми методами. С использованием теории возмущений и метода Фурье получено выражение для потенциала холловского поля, представленное в прямоугольных координатах в виде ряда гармонических функций, удобное при дальнейшем практическом использовании. Для анизотропных образцов с плоскими границами получены практически важные выражения для анализа холловских измерений зондовыми методами. Выполнен анализ полученного решения и компьютерное моделирование электрического потенциала в анизотропных полупроводниковых пластинах с плоскими границами. Представлена экспериментальная проверка полученных распределений потенциалов и практические рекомендации по применению полученных теоретических выражений.

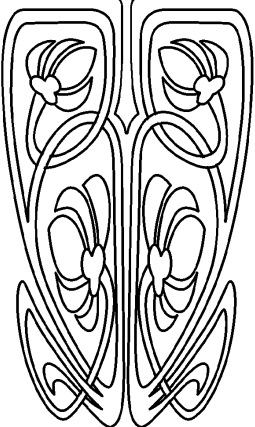
Ключевые слова: анизотропный полупроводник, термоэлектрики, электропроводность, потенциал, задача Неймана, метод Фурье, эффект Холла, холловское поле

Для цитирования: Филиппов В. В., Заворотный А. А. Математическое моделирование электрического поля в анизотропных полупроводниках при холловских измерениях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 354–364. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-4-354-364>, EDN: MMFANT

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Article

Mathematical modeling of the electric field in anisotropic semiconductors during Hall measurementsV. V. Filippov¹✉, A. A. Zavorotniy²¹Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, 42 Lenina St., Lipetsk 398020, Russia²Lipetsk State Technical University, 30 Moscovskays St., Lipetsk 398055, RussiaVladimir V. Filippov, wwfilippow@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4323-351X>Anatoliy A. Zavorotniy, aazavorotniy@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0008-6316-667X>

Abstract. Background and Objectives: Modern discrete functional semiconductor devices and structural elements of micro- and nanoelectronics use materials with anisotropy of electrical properties. In particular, such materials are crystalline thermoelectrics, layered graphite structures, strained silicon. In the practical application of these semiconductors, it becomes necessary to measure their kinetic coefficients, however, the electrodynamics of these media differs from isotropic ones, which requires the correction of existing methods for measuring the specific conductivity and concentration of the main charge carriers. The paper presents a technique for solving the Neumann problem with inhomogeneous boundary conditions for the electric field potential in a rectangular region in a relatively weak magnetic field in a linear approximation. **Materials and Methods:** The boundary value problem considered in the paper occurs in the analysis of measurements of the Hall effect by probe methods. Using the perturbation theory and the Fourier method, an expression for the Hall field potential is obtained, presented in rectangular coordinates as a series of harmonic functions, convenient for further practical use. **Results:** Practically important expressions for the analysis of Hall measurements by probe methods have been obtained for anisotropic samples with flat boundaries. An analysis of the obtained solution and computer simulation of the electric potential in anisotropic semiconductor wafers with flat boundaries have been performed. **Conclusion:** An experimental verification of the obtained distributions of potentials and practical recommendations on the application of the obtained theoretical expressions are presented.

Keywords: anisotropic semiconductor, thermoelectrics, electrical conductivity, potential, Neumann problem, Fourier method, Hall effect, Hall field

For citation: Filippov V. V., Zavorotniy A. A. Mathematical modeling of the electric field in anisotropic semiconductors during Hall measurements. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 354–364 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-4-354-364>, EDN: MMFANT

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Компонентная база современной полупроводниковой электроники широко использует материалы, проявляющие анизотропию электрофизических свойств. В частности, при практическом изготовлении термоэлектрических устройств и датчиков широко применяют полупроводниковые кристаллы и слоистые структуры, проявляющие существенную анизотропию электрической проводимости [1–3]. Анизотропия материалов может быть как естественной, обусловленной строением кристалла или слоистой структурой [4–6], так и искусственной, стимулированной влиянием механических напряжений [7, 8].

При теоретическом обосновании и разработке широко применяемых на практике зондовых методов [9, 10] исследования электрофизических свойств полупроводниковых материалов электроники возникает необходимость решения соответствующих краевых электродинамических задач [11, 12]. В частности, для математического моделирования электрических полей при контактных измерениях кинетических коэффициентов кристаллов в однородном магнитном поле [10, 13]

целесообразно решать краевую задачу Неймана [14, 15].

Целью данной работы является реализация метода решения краевой задачи о распределении электрического холловского потенциала в применении к зондовым методам измерений параметров анизотропных полупроводников. Предлагаемая электродинамическая задача решается с использованием элементов теории возмущений и метода Фурье.

1. Построение краевой задачи

Определим распределение потенциала при гальваномагнитных явлениях в анизотропных полупроводниках прямоугольной формы в случае зондовых измерений коэффициента Холла (рис. 1). В рассматриваемом случае образец прямоугольной формы вырезан так, что его грани параллельны кристаллографическим плоскостям. Образец помещен в поперечное магнитное поле \mathbf{B} , постоянный электрический ток I_{12} (здесь и далее нижние индексы в скобках указывают номера контактов) пропускается через зонды 1 и 2 (рис. 1). В этом случае тензор электропроводности уже



не является диагональным [13, 16]:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_x \sigma_y R_z B & 0 \\ -\sigma_x \sigma_y R_z B & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – компоненты диагонального тензора электропроводимости в отсутствие магнитного поля, R_z – компонента тензора коэффициента Холла.

Следует отметить, что в данной записи компоненты тензора электропроводимости зависят от индукции магнитного поля B линейно. Это означает, что рассматривается эффект Холла в области относительно слабых магнитных полей ($\mu_x \mu_y B^2 \ll 1$, где μ_x и μ_y – подвижности основных носителей заряда по осям x и y соответственно), когда можно пренебречь эффектом магнетосопротивления, определяемого членами, содержащими B^2 .

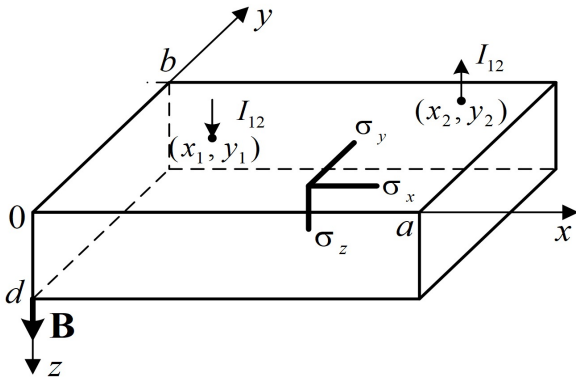


Рис. 1. Схема положения токовых зондов на анизотропном полупроводнике, помещенном в поперечное магнитное поле: I_{12} – ток зондов; $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – координаты центров зондов; a, b, d – размеры пленки

Fig. 1. Scheme of the position of current probes on an anisotropic semiconductor placed in a transverse magnetic field: I_{12} – probe current; $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – coordinates of probe centers; a, b, d – film dimensions

В отсутствие источников и стоков зарядов в области полупроводникового кристалла полагаем [13, 17]:

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (3)$$

Следовательно, согласно формулам (1)–(3), потенциал электрического поля в области образца удовлетворяет уравнению

$$\sigma_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \sigma_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Нормальная составляющая вектора плотности тока на поверхности исследуемого образца отлична от нуля лишь под токовыми зондами. В соответствии с законом Ома (3) и видом тензора удельной проводимости (1) получаем граничные условия:

$$j_x|_{x=0,a} = - \left(\sigma_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma_x \sigma_y R_z B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{x=0,a} = 0, \quad (5)$$

$$j_y|_{y=0,b} = - \left(\sigma_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \sigma_x \sigma_y R_z B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{y=0,b} = 0, \quad (6)$$

$$j_z|_{z=d} = -\sigma_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0, \quad (7)$$

$$j_z|_{z=0} = -\sigma_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -I_{12} \cdot [\delta(x-x_{(1)}) \cdot \delta(y-y_{(1)}) - \delta(x-x_{(2)}) \cdot \delta(y-y_{(2)})], \quad (8)$$

где \mathbf{j} – вектор плотности электрического тока; a, b, d – длина, ширина и толщина полупроводника; $\delta(y), \delta(x)$ – дельта-функция Дирака [18], использование которой оправдано для токовых зондов с малой площадью входных сечений [9, 10].

2. Методика решения

Следует отметить, что рассматриваемая краевая задача (4)–(8) не принадлежит к числу типичных краевых задач Неймана или Дирихле [19] и её аналитическое решение представляет определенные математические трудности [20, 21]. Однако в связи с тем, что уже при постановке краевой задачи использовалось предположение о линейности электрического потенциала φ по B , её решение можно представить в линейном приближении по магнитному полю. Таким образом, искомый потенциал можно записать в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_H, \quad (9)$$

где φ_0 – потенциал электрического поля при отсутствии внешнего магнитного поля, φ_H – потенциал поля Холла, возникающего в образце после включения внешнего магнитного поля. При этом каждое из составляющих поля (9) должно удовлетворять уравнению (4).

Подставив предлагаемое решение (9) в краевую задачу (4)–(8), получим соответствующую краевую задачу для потенциала φ_0 :

$$\sigma_x \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \sigma_z \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = 0, \quad (10)$$



$$\sigma_x \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = 0, \quad \sigma_y \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \Big|_{z=d} &= 0, \\ \sigma_z \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \\ &= -I_{12} \cdot [\delta(x-x_{(1)}) \cdot \delta(y-y_{(1)}) - \\ &\quad - \delta(x-x_{(2)}) \cdot \delta(y-y_{(2)})]; \end{aligned} \quad (12)$$

и для потенциала φ_H :

$$\sigma_x \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial y^2} + \sigma_z \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma_x \frac{\partial \varphi_H}{\partial x} + \sigma_x \sigma_y R_z B \frac{\partial(\varphi_0 + \varphi_H)}{\partial y} \right) \Big|_{x=0,a} &= 0, \\ \left(\sigma_y \frac{\partial \varphi_H}{\partial y} - \sigma_x \sigma_y R_z B \frac{\partial(\varphi_0 + \varphi_H)}{\partial x} \right) \Big|_{y=0,a} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma_z \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \Big|_{z=0,d} = 0. \quad (15)$$

Решение краевой задачи (10)–(12) неоднократно описано в известной литературе [12, 22]. Поэтому в данной работе ограничимся лишь основными этапами решения. Представим общее решение уравнения (10) в виде тригонометрического ряда Фурье

$$\varphi_0(x, y, z) = \sum_{n,k=0,1,\dots} Z_{nk}(z) \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_k y), \quad (16)$$

где

$$\alpha_k = \pi k/a, \quad \beta_n = \pi n/b. \quad (17)$$

После подстановки ряда (16) в (10) получаем уравнение для функции $Z_{nk}(z)$:

$$\frac{\partial^2 Z_{nk}}{\partial z^2} - \eta_{nk}^2 Z_{nk} = 0; \quad \eta_{nk}^2 = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \alpha_k^2 + \frac{\sigma_y}{\sigma_z} \beta_n^2. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) может быть представлено через гиперболические функции [18]:

$$Z_{nk}(z) = C_{nk} \cdot \text{sh}(\eta_{nk} z) + D_{nk} \cdot \text{ch}(\eta_{nk} z). \quad (19)$$

Коэффициенты C_{nk} и D_{nk} получаем путем подстановки граничных условий (12) в функцию (16). Опуская довольно громоздкую процедуру определения коэффициентов разложения в ряд Фурье, приведем окончательное выражение для φ_0 :

$$\varphi_0 = -\frac{4I_{12}}{\sigma_z a b} \sum_{n,k=0}^{\infty} A_{nk} \cdot \frac{\text{ch} \eta_{kn} (d-z)}{\eta_{kn} \text{sh} \eta_{kn} d} \cdot \cos \alpha_k x \cdot \cos \beta_n y, \quad (20)$$

где

$$A_{nk} = \begin{cases} \Theta_n \Theta_k (\cos(\alpha_k x_1) \cdot \cos(\beta_n y_1) - \\ - \cos(\alpha_k x_2) \cdot \cos(\beta_n y_2)), & \text{при } n, k \neq 0, \\ 0, & \text{при } n = k = 0; \end{cases}$$

$$\Theta_{i\{i=k,n\}} = \begin{cases} 1, & i \neq 0, \\ 1/2, & i = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Решение краевой задачи (13)–(15) вызывает определенные сложности [21–23] и в известной литературе на данный момент отсутствует. Однако авторами статьи разработана методика, позволяющая решить данную задачу в области относительно слабых магнитных полей. В граничных условиях (14) ввиду используемого условия пренебрегаем слагаемыми $\sigma_x \sigma_y R_z B \frac{\partial \varphi_H}{\partial y}$ и $\sigma_x \sigma_y R_z B \frac{\partial \varphi_H}{\partial x}$, пропорциональными величине B^2 (так как φ_H зависит от величины магнитного поля B линейно) [13, 16].

Таким образом, граничные условия (14) для потенциала поля Холла φ_H примут вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_H}{\partial x} + \sigma_y R_z B \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right) \Big|_{x=0,a} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi_H}{\partial y} - \sigma_x R_z B \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) \Big|_{y=0,a} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \Big|_{z=0,d} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение уравнения (13) удобно представить в виде

$$\varphi_H = U_H + V_H, \quad (23)$$

где краевые задачи для U_H и V_H принимают соответственно вид:

$$\sigma_x \frac{\partial^2 U_H}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 U_H}{\partial y^2} + \sigma_z \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} = 0, \quad (24)$$

$$\sigma_x \frac{\partial U_H}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = 0, \quad \sigma_z \frac{\partial U_H}{\partial z} \Big|_{z=0,d} = 0, \quad (25)$$

$$\sigma_y \frac{\partial U_H}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = \sigma_x \sigma_y R_z B \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Big|_{y=0,b}; \quad (26)$$

$$\sigma_x \frac{\partial^2 V_H}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 V_H}{\partial y^2} + \sigma_z \frac{\partial^2 V_H}{\partial z^2} = 0, \quad (27)$$

$$\sigma_y \frac{\partial V_H}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0, \quad \sigma_z \frac{\partial V_H}{\partial z} \Big|_{z=0,d} = 0, \quad (28)$$

$$\sigma_x \frac{\partial V_H}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = -\sigma_x \sigma_y R_z B \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \Big|_{x=0,a}. \quad (29)$$



Решение краевых задач (24)–(26) и (27)–(29) осуществим методом Фурье, аналогично решению задачи (10)–(12). После нахождения выражений для функций U_H и V_H получаем выражение для Φ_H :

$$\begin{aligned} \Phi_H = & \frac{16I_{12}\sigma_x R_z B}{\sigma_z a^2 b d} \sum_{r,s,k,n=0}^{\infty} \Theta_r \Theta_s A_{nk} \frac{(1 - (-1)^{n+r}) \beta_n^2}{(\beta_n^2 - \beta_r^2) \xi_{rs} (\eta_{kn}^2 + \delta_s^2)} \times \\ & \times \frac{(-1)^k \operatorname{ch}(\xi_{rs} x) - \operatorname{ch} \xi_{rs} (x - a)}{\operatorname{sh}(\xi_{rs} a)} \cos(\beta_r y) \cos(\delta_s z) - \\ & - \frac{16I_{12}\sigma_y R_z B}{\sigma_z a b^2 d} \sum_{p,q,k,n=0}^{\infty} \Theta_p \Theta_q A_{nk} \frac{(1 - (-1)^{k+p}) \alpha_k^2}{(\alpha_k^2 - \alpha_p^2) \omega_{pq} (\eta_{kn}^2 + \delta_q^2)} \times \\ & \times \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\omega_{pq} y) - \operatorname{ch}(\omega_{pq} (y - b))}{\operatorname{sh}(\omega_{pq} b)} \cos(\alpha_p x) \cos(\delta_q z), \end{aligned} \quad (30)$$

где A_{nk} определено выражением (21) и

$$\alpha_p = \pi p / a, \beta_r = \pi r / b, \delta_q = \pi q / d, \delta_s = \pi s / d, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \omega_{pq}^2 &= (\sigma_x \alpha_p^2 + \sigma_z \delta_q^2) / \sigma_y, \\ \xi_{rs}^2 &= (\sigma_y \beta_r^2 + \sigma_z \delta_s^2) / \sigma_x; \\ \Theta_{i\{i=p,q,r,s\}} &= \begin{cases} 1, i \neq 0; \\ 1/2, i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что пары индексов (n, r) и (k, p) не должны принимать одновременно одинаковые значения.

3. Анализ полученного решения и практические рекомендации

Полученные решения (20) и (30) позволяют проанализировать распределение электрических полей в анизотропных образцах, помещенных

во внешнее магнитное поле, а также предлагать теоретически обоснованные методики измерения компонент тензора удельной электропроводности и коэффициента Холла. Очевидно, что в вышеуказанном виде формулы (20), (30) на практике трудно применимы, поэтому, как правило, используется приближение тонких образцов, когда расстояние между токовыми контактами 1 и 2 много больше толщины d . Заметим также, что в практике зондовых методов измерений [9, 10] используются двух- и четырехзондовый пробники, которые имеют строго определенное расстояние между токовыми и измерительными зондами, причем все измерения производятся на поверхности полупроводника, т. е. при $z = 0$ (рис. 2).

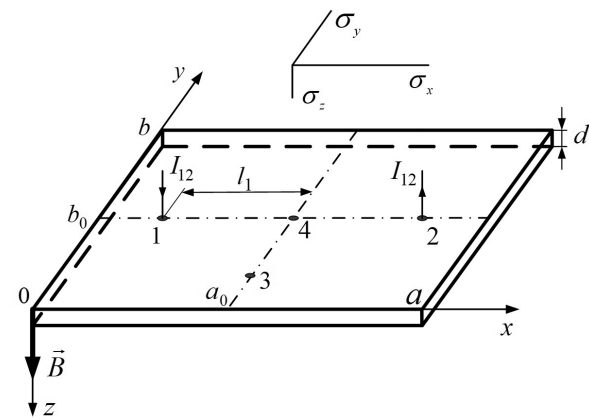


Рис. 2. Расположение зондов на поверхности исследуемого образца

Fig. 2. Location of probes on the surface of the test sample

Тогда, согласно (21), выражение (30) для холловского потенциала Φ_H при $z=0$ примет более практичный вид:

$$\begin{aligned} \Phi_H = & \frac{16\sigma_x I R B}{\sigma_z \gamma a^2 b d} \sum_{\substack{n,p=1,2,\dots \\ k=0,1,\dots}} \left[\Theta_k \frac{[1 - (-1)^{n+p}] \alpha_k^2 \sin(\alpha_k a_0) \cos(\beta_n b_0) \sin(\alpha_k l_1)}{\alpha_p \eta_{nk}^2 (\alpha_k^2 - \alpha_p^2)} \times \right. \\ & \times \left. \frac{\operatorname{ch}[\alpha_p \gamma (y - b)] - (-1)^k \operatorname{ch}(\alpha_p \gamma y)}{\operatorname{sh}(\alpha_p \gamma b)} \cdot \cos(\alpha_p x) \right] + \\ & + \frac{16\sigma_y \gamma I R B}{\sigma_z a b^2 d} \sum_{n,k,r=1,2,\dots} \left[\frac{[1 - (-1)^{k+r}] \beta_n^2 \sin(\alpha_k a_0) \cos(\beta_n b_0) \sin(\alpha_k l_1)}{\beta_r \eta_{nk}^2 (\beta_n^2 - \beta_r^2)} \times \right. \\ & \times \left. \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\beta_r x / \gamma) - \operatorname{ch}[\beta_r (a - x) / \gamma]}{\operatorname{sh}(\beta_r a / \gamma)} \cdot \cos(\beta_r y) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где $\gamma = \sqrt{\sigma_x / \sigma_y}$ – параметр анизотропии проводимости полупроводникового образца.



Рассмотрим, как влияет число членов ряда в выражениях (20) и (30) на рассчитываемую точность электрического потенциала. В качестве практического примера рассмотрим полупроводник CdSb ($\sigma_x = \sigma_z = 63.0 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$, $\sigma_y = 14.5 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$), для которого далее представлена экспериментальная проверка распределения потенциала. Токовые зонды на опытном образце располагались согласно рис. 2, геометрические параметры кристалла и размещения контактов, мм: $a = 15.0$, $b = 10.0$, $d = 1.0$, $a_0 = 7.0$, $b_0 = 5.5$, $l_1 = 4.5$. Поскольку в выражении для φ_0 выполняется суммирование по двум членам ряда, а для φ_N суммирование производится по трем индексам, «скорость сходимости» данных рядов существенно отличается. Согласно полученным выражениям, сходимость мало меняется от компонент тензора проводимости, а преимущественно определяется положением выбранной точки расчета потенциала.

На рис. 3 представлены рассчитанные значения ε_0 -погрешностей при вычислении $\varphi_0(a_0 - l_1 + \Delta, b_0 + \Delta, 0)$ в зависимости от N – предельного значения индексов суммирования по n , k ($N = n_{\max} = k_{\max}$) при различных расстояниях $\Delta\sqrt{2}$ от токового зонда 1 ($\Delta_1 = 0.64 \text{ мм}$, $\Delta_2 = 1 \text{ мм}$, $\Delta_3 = 2 \text{ мм}$, $\Delta_4 = 3 \text{ мм}$). Точной (истинной) величиной потенциала при оценке погрешности ε_0 принимали значение, вычисленное согласно выражению (20) при верхних значениях индексов суммирования $n = k = 1000$: $\varepsilon_0(N) = |(\varphi_0(N) - \varphi_0(1000)) / \varphi_0(1000)| \cdot 100\%$. Видно, что вблизи контакта ряд сходится существенно медленнее, чем вдали от него. Поэтому при расчете потенциала вблизи контакта, на расстоянии от него менее $0.1 \cdot 2l_1$ (много меньше расстояния между токовыми зондами) следует брать порядка $n = k = 200\text{--}400$, при $\Delta > 0.1 \cdot 2l_1$ достаточно ограничиться верхними пределами для суммирования $n = k = 100$ для достижения погрешности менее 2%.

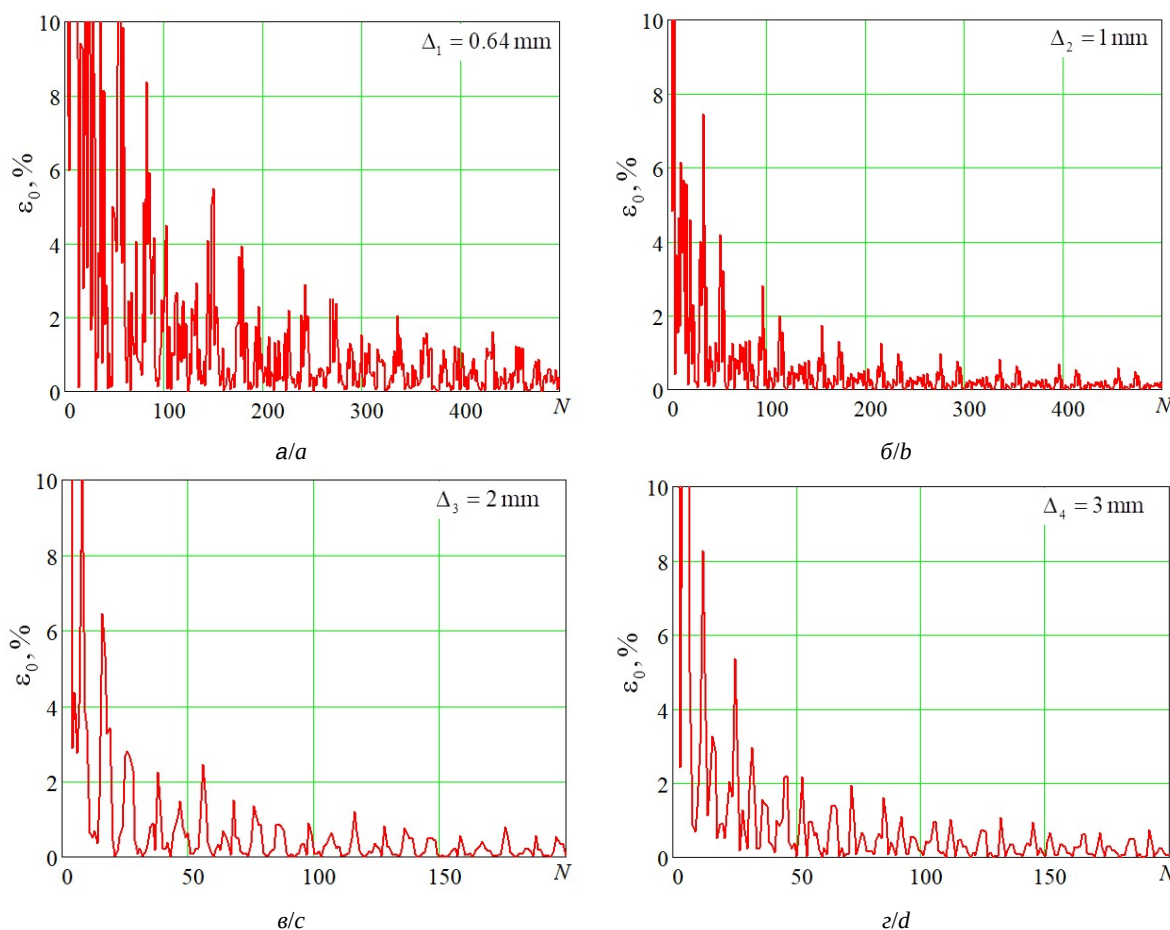


Рис. 3. Погрешность вычисления φ_0 от верхних значений суммирования $n, k(N)$ при различных расстояниях от токового контакта (цвет онлайн)

Fig. 3. Calculation error from the upper summation values $n, k(N)$ at different distances from the current contact (color online)



На рис. 4 представлены рассчитанные, согласно (33), значения $\Phi_H(a_0 - l_1 + \Delta, b_0 + \Delta, 0)$ в зависимости от числа суммирующих членов ряда ($N = n_{\max} = k_{\max} = p_{\max} = r_{\max}$) при различных расстояниях от токового зонда 1 ($\Delta_1 = 0.64$ мм, $\Delta_2 = 1$ мм). Точной величиной потенциала Φ_H при оценке погрешности ϵ_H полагали значение при верхних значениях индексов суммирования $n = k = p = r = 100$, т. е. $\epsilon_H(N) = |(\Phi_H(N) - \Phi_H(100))/\Phi_H(100)| \cdot 100\%$. Согласно

проведенным вычислениям, положение точки, в которой определяется холловский потенциал, практически не влияет на «скорость сходимости». Для слагаемого потенциала Φ_H в плоскости $z = 0$, примыкающей к токовым контактам, достаточно ограничиться верхним значением $N = 10 = n_{\max} = k_{\max} = p_{\max} = r_{\max}$ для достижения погрешности менее 2%.

На рис. 5 представлены результаты расчетов потенциалов по формуле (20) в отсутствие

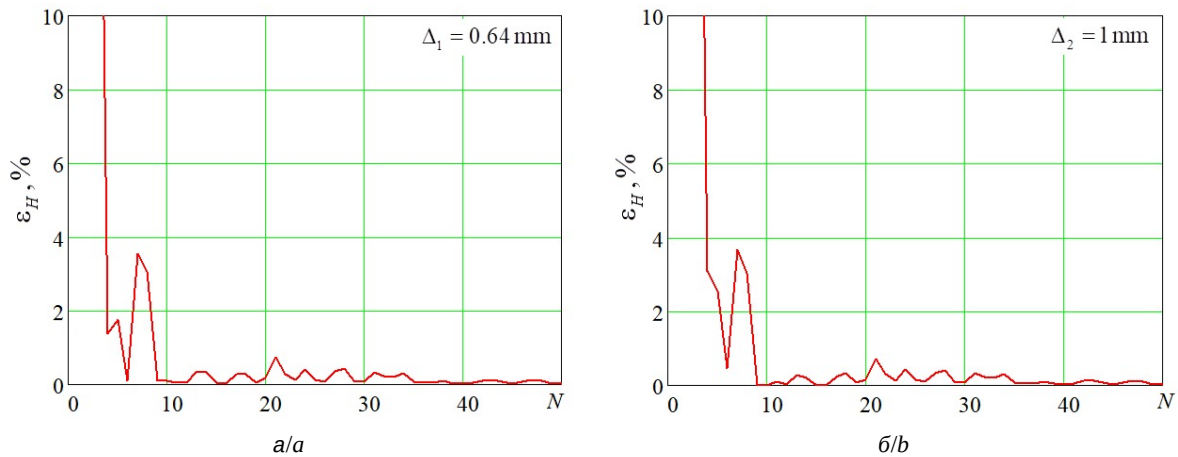


Рис. 4. Погрешность вычисления Φ_H от верхних значений суммирования $n, k, p, r(N)$ при различных расстояниях от токового контакта

Fig. 4. Calculation error from the upper summation values $n, k, p, r(N)$ at different distances from the current contact

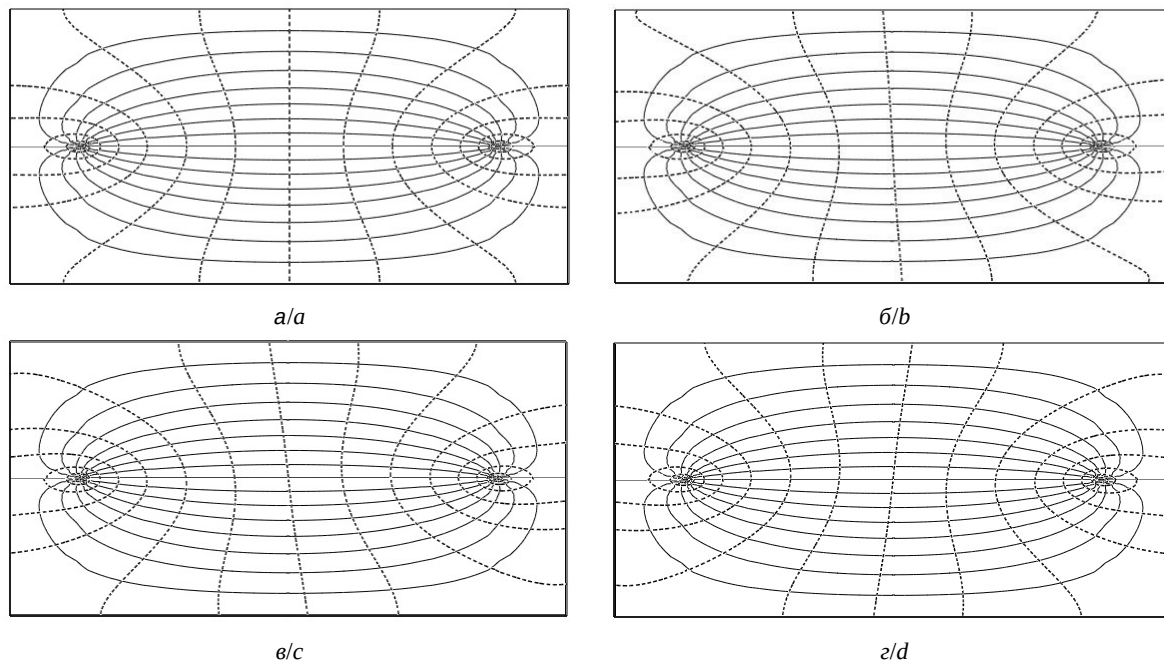


Рис. 5. Модели электрических потенциалов и токовых линий в анизотропных тонких полупроводниках: $a - B = 0$; $б - B = 0.1/\sqrt{\sigma_x \sigma_y R_z}$; $в - B = 0.2/\sqrt{\sigma_x \sigma_y R_z}$; $г - B = -0.2/\sqrt{\sigma_x \sigma_y R_z}$

Fig. 5. Models of electrical potentials in anisotropic thin semiconductors: $a - B = 0$; $б - B = 0.1/\sqrt{\sigma_x \sigma_y R_z}$; $в - B = 0.2/\sqrt{\sigma_x \sigma_y R_z}$; $г - B = -0.2/\sqrt{\sigma_x \sigma_y R_z}$



магнитного поля (рис. 5, а) и по формулам (9), (20), (33) при наличии магнитного поля различной величины и направления (рис. 5, б–г). Для правомерного применения расчетных формул холловского потенциала необходимо выполнения условия слабого магнитного поля: $\mu_x \mu_y B^2 \ll \ll 1$, согласно [13, 16], получаем требование $(\sigma_x R_z)(\sigma_y R_z) B^2 \ll 1$. Для приводимых ниже компьютерных моделей $(\sigma_x R_z)(\sigma_y R_z) B^2 \leq 0.04$. При построении моделей выбраны следующие (относительные) параметры анизотропного полупроводника: $a/b = 2$, $d/a = 0.01$, $a_0 = a/2$, $b_0 = b/2$, $2l_1 = 0.75a$, $\sigma_y = \sigma_z = 0.25\sigma_x$. В представленных моделях на рис. 5 число эквипотенциалов и токовых линий равно 15. Приведенные модели построены с использованием математического пакета Mathcad, позволяющем выполнять построение линий уровня потенциала с помощью встроенных программных инструментов [24, 25].

Для анализа влияния магнитного поля на распределение электрического потенциала и электрического тока первоначально на рис. 5, а выполнено моделирование для случая $B = 0$. Видно, что токовые линии не ортогональны к эквипотенциалам, это характерно для анизотропных полупроводников [14, 15]. Приведенные результаты моделирования показывают, что воздействие магнитного поля создает разность потенциалов между симметричными точками на противоположных сторонах образца (напряжение эффекта Холла). Увеличение внешнего поперечного магнитного поля (рис. 5, б и 5, в) приводит к повышению разности потенциалов между симметричными точками относительно линии соединения токовых контактов, в частности к повышению угла наклона центральной эквипотенциали. Смена магнитного поля на противоположное (рис. 5, в и 5, г) приводит к зеркальному отображению картины распределения потенциала внутри полупроводника. Необходимо отметить неизменность плотности токовых линий, что соответствует приближению Ван дер Пау [10, 13]. В целом результаты моделирования не противоречат известной макроскопической теории поперечного эффекта Холла в полупроводниках для слабых магнитных полей [9, 13].

4. Экспериментальная проверка

Распределение потенциала при зондовых измерениях в анизотропных полупроводниковых кристаллах при отсутствии магнитного поля (20) неоднократно рассмотрено в литературе, экспериментальная проверка представлена, например, в работах [11, 12, 23]. Для экспериментальной проверки выражения (33) для распределения потенциала холловского поля в области анизотропного полупроводникового образца при включении дополнительного к электрическому магнитного поля использовался монокристалл CdSb [26], геометрические размеры и необходимые дополнительные параметры которого приведены в таблице. Значения компонент тензора удельной проводимости полупроводника определены согласно модифицированной методике Ван дер Пау, описанной в работе [27], и согласуются с удельными сопротивлениями для p-CdSb в известной литературе [26].

Экспериментальные измерения проводились следующим образом: через прижимные токовые зонды 1 и 2, расположенные на плоской поверхности образца (значения координат токовых зондов приведены в таблице) пропускался постоянный ток $I_{12} = 50$ мА от стабилизированного источника питания Б5-44, между зондами 3 и 4 (см. рис. 2) измерялась разность потенциалов U_{34}^0 первоначально без включения магнитного поля. После этого через исследуемый кристалл пропускалось постоянное магнитное поле индукцией $B = 1.4$ Тл и вновь снималось показание напряжения между зондами 3 и 4 U_{34}^B , но уже в магнитном поле. При этом необходимо заметить, что положение измерительного зонда 3 менялось вдоль линии $x = 7$ мм, а зонд 4 оставался все время неподвижным, находящимся на одной линии с токовыми электродами. Значение холловского потенциала измерялось с помощью высокоомного вольтметра В2-34 с шагом 1 мм. Погрешность измерений потенциала ϕ составляла 0.02 мВ, инструментальная неточность определения координаты $y - 0.025$ мм. Максимальная относительная приборная погрешность составляла 6.3%.

Параметры опытного полупроводника [26]

Table. Parameters of the experimental semiconductor [26]

Кристалл/ Crystal	a , mm	b , mm	d , mm	$\sigma_x = \sigma_z$, $\text{Om}^{-1}\text{m}^{-1}$	σ_y , $\text{Om}^{-1}\text{m}^{-1}$	a_0 , mm	b_0 , mm	l_1 , mm	R_H , m^3/C	I_{12} , mA	B , Т
CdSb	15.0	10.0	1.0	63.0	14.5	7.0	5.5	4.5	$2.3 \cdot 10^{-4}$	50	1.4



На рис. 6 представлено сравнение теоретически рассчитанной по выражению (33) кривой распределения потенциала (сплошная линия) с экспериментально полученными значениями холловского потенциала. Значения потенциала для построения теоретической кривой были вычислены согласно выражению (33) при фиксированном $x = 7$ мм, с шагом по координате y равном 0.025 мм. Видно, что в пределах 5% погрешности достигнута согласованность представленной теории с экспериментальным результатом.

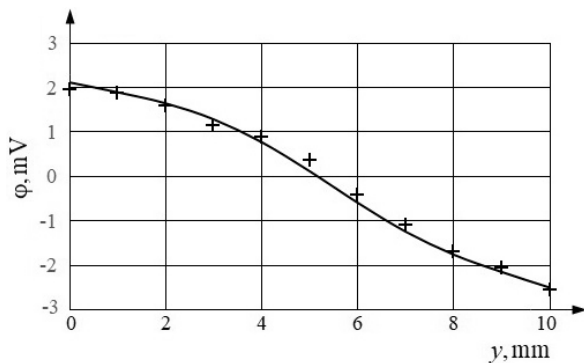


Рис. 6. Сравнение экспериментальных значений (+) холловского потенциала с теоретической кривой

Fig. 6. Comparison of the experimental values (+) of the Hall potential with the theoretical curve

Заключение

Полученное выражение (33) позволяет предлагать методики по экспериментальному определению ЭДС Холла при зондовых измерениях, практическая реализация которых не требует изготавливать протяженные паяные контакты по краям образца, при этом увеличивается скорость проведения измерений кинетических коэффициентов полупроводника (удельная проводимость, коэффициент Холла). Необходимо отметить, что полученное выражение в практическом применении требует использования современных компьютеров для расчёта рядов в выражениях (20) и (33). Заметим, что для количественных расчетов потенциала ϕ_0 необходимо брать порядка $N = 100$ членов ряда по каждому из суммируемых индексов (n, k) для достижения вычислительной погрешности не более 2–3%, для расчета холловского потенциала ϕ_H достаточно ограничиться верхним значением суммирования $N=10$.

Описанная методика решения уравнения для потенциала электрического поля не учитывает влияния диффузионных токов и поверхностных эффектов, поэтому для корректного применения

полученных формул необходимо, чтобы межзондовое расстояние и размеры полупроводника значительно превышали диффузионную длину свободного пробега [9, 10]. Для большинства известных кристаллических полупроводников длина свободного пробега ~ 1 мкм [9, 10, 16]. Таким образом, описанная выше теория адекватна для получаемых на практике кристаллов [1–6] с размерами более 100 мкм по каждому из направлений. Существенным ограничением для полученных теоретических выражений для потенциалов могут являться технологические трудности получения точечных прижимных контактов ввиду механической хрупкости отдельных кристаллов, поэтому необходимо тщательно контролировать силу нажима на зонд или использовать точечные сварные или паяные контакты. При практических измерениях также необходимо использовать малые токи (1–10 мА) для минимизации разогрева исследуемого полупроводника и проявлений термоэлектрических эффектов [9, 10]. Общие способы учета сопутствующих эффекту Холла явлений указаны в известной литературе [10, 13]. Контактным сопротивлением измерительных зондов можно пренебречь, применяя стандартный компенсационный метод измерений.

Таким образом, на основе решения краевой задачи электродинамики получено выражение для потенциала холловского поля в линейном приближении. Выражение (33) для потенциала поля получено исходя из общих электродинамических принципов и применимо для ориентированных полупроводников с естественной анизотропией, вызванной строением кристаллов [1, 3, 4] или влиянием слоистой структуры [2, 6]. Необходимые расчетные формулы представлены в виде, удобном для дальнейшего использования при вычислении постоянной Холла по экспериментальным значениям ЭДС Холла между измерительными зондами.

Список литературы

1. Маренкин С. Ф., Трухан В. М. Фосфиды, арсениды цинка и кадмия. Минск : Вараскин, 2010. 224 с.
2. Гриднев С. А., Калинин Ю. Е., Макагонов В. А., Шуваев А. С. Перспективные термоэлектрические материалы // Международный научный журнал Альтернативная энергетика и экология. 2013. № 1-2 (118). С. 117–125.
3. Yang J., Li J., Zhang C., Feng Z., Shi B., Zhai W., Yan Y., Wang Y. Excellent thermoelectric performance of BaMgSi driven by low lattice thermal conductivity: A promising thermoelectric material // Journal of Alloys



- and Compounds. 2020. Vol. 827. P. 154342. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2020.154342>
4. Wang C., Zheng C., Gao G. Bulk and Monolayer ZrS_3 as Promising Anisotropic Thermoelectric Materials: A Comparative Study // *The Journal of Physical Chemistry C*. 2020. Vol. 124, № 12. P. 6536–6543 <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.0c00298>
 5. Немов С. А., Улашкевич Ю. В., Погумирский М. В., Степанова О. С. Отражение от боковой грани кристалла $PbSb_2Te_4$ // *Физика и техника полупроводников*. 2020. Т. 54, вып. 3. С. 228–231. <https://doi.org/10.21883/FTP.2020.03.49023.9308>
 6. Япрынцева М. Н., Иванов О. Н., Васильев А. Е., Жежу М. В., Попков Д. А. Синтез, структура и анизотропия термоэлектрических свойств соединения $Bi_2Te_{2.7}Se_{0.3}$, легированного самарием // *Физика и техника полупроводников*. 2021. Т. 55, вып. 12. С. 1156–1161. <https://doi.org/10.21883/FTP.2021.12.51699.16>
 7. Pokhrel T. R., Majumder A. Impact of Work Function Engineering on Strained Silicon Based Double Gated Junction-less Transistor // *Silicon*. 2022. Vol. 14. P. 10061–10069. <https://doi.org/10.1007/s12633-022-01661-3>
 8. Beccari A., Visani D. A., Fedorov S. A., Bereyhi M. J., Boureau V., Engelsen N. J., Kippenberg T. J. Strained crystalline nanomechanical resonators with quality factors above 10 billion // *Nature Physics*. 2022. Vol. 18. P. 436–441. <https://doi.org/10.1038/s41567-021-01498-4>
 9. Orton J. W., Blood P. The Electrical Characterization of Semiconductors: Measurement of Minority Carrier Properties. London ; San Diego : Academic Press, 1990. 735 p.
 10. Батавин В. В., Концевой Ю. А., Федорович Ю. В. Измерение параметров полупроводниковых материалов и структур. М. : Радио и связь, 1985. 264 с.
 11. Луганский Л. Б., Цebro В. И. Четырехзондовые методы измерения удельного сопротивления образцов, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда // *Приборы и техника эксперимента*. 2015. Т. 58, № 1. С. 122–133. <https://doi.org/10.7868/S0032816215010206>
 12. Филиппов В. В. Четырехзондовый метод совместных измерений компонент тензора удельной электропроводности и коэффициента Холла анизотропных полупроводниковых пленок // *Приборы и техника эксперимента*. 2012. Т. 55, № 1. С. 112–117.
 13. Аскеров Б. М. Электронные явления переноса в полупроводниках. М. : Наука, 1985. 320 с.
 14. Филиппов В. В., Бормонтов Е. Н. Особенности распределения электрических полей в пластинах анизотропных полупроводников в поперечном магнитном поле // *Физика и техника полупроводников*. 2013. Т. 47, вып. 7. С. 878–881.
 15. Filippov V. V., Mitsuk S. V. Modelling magnetoresistance effect in limited anisotropic semiconductors // *Chinese Physics Letters*. 2017. Vol. 34, №. 7. P. 077201. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/34/7/077201>
 16. Баранский П. И., Буда И. С., Даховский И. В., Коломоец В. В. Электрические и гальваномагнитные явления в анизотропных полупроводниках. Киев : Наукова думка, 1977. 270 с.
 17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 621 с.
 18. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). СПб. : Лань, 2003. 832 с.
 19. Webster A. Partial Differential Equations of Mathematical Physics : Second edition. New York : Dover Publications Inc., 2016. 464 p. (Dover Books on Mathematics).
 20. Гуревич Ю. Г., Кучеренко В. В., Рамирес де Арейано Э. О задаче с косой производной в теории гальваномагнитных явлений // *Математические заметки*. 1999. Т. 65, № 4. С. 520–532. <https://doi.org/10.4213/mzm1078>
 21. Gonzalez G., Gurevich Yu. G., Prosentsov V. V. New mechanism of magnetoresistance in bulk semiconductors: Boundary condition effects // *Solid State Communications*. 1996. Vol. 97, № 12. P. 1069–1072. [https://doi.org/10.1016/0038-1098\(96\)00032-4](https://doi.org/10.1016/0038-1098(96)00032-4)
 22. Кибирев В. В. Основные краевые задачи теории потенциала // *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, Информатика*. 2015. № 2. С. 22–29.
 23. Филиппов В. В., Власов А. Н. Зондовые измерения распределения потенциала в анизотропных полупроводниковых кристаллах и пленках // *Известия высших учебных заведений. Электроника*. 2012. № 1. С. 48–53.
 24. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15. СПб. : Питер, 2011. 402 с.
 25. Maxfield B. Essential Mathcad for Engineering, Science, and Math. 2nd edition. Elsevier Science ; Academic Press, 2009. 501 p.
 26. Лазарев В. Б., Шевченко В. Я., Гринберг Я. Х., Соболев В. В. Полупроводниковые соединения группы $A^{II}B^V$. М. : Наука, 1977. 148 с.
 27. Филиппов В. В., Заворотный А. А., Тигров В. П. Измерение компонент тензора удельной электропроводности анизотропных полупроводниковых пластин модифицированным методом Ван дер Пау // *Известия вузов. Физика*. 2019. Т. 62, № 1. С. 92–99.

References

1. Marenkin S. F., Trukhan V. M. *Fosfidy, arsenidy tsinka i kadmiya* [Phosphides, zinc and cadmium arsenides]. Minsk, Varaskin, 2010. 224 p. (in Russian).
2. Gridnev S. A., Kalinin Yu. E., Makagonov V. A., Shuvaev A. S. Promising thermoelectric Materials. *International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology*, 2013, no. 1-2 (118), pp. 117–125.
3. Yang J., Li J., Zhang C., Feng Z., Shi B., Zhai W., Yan Y., Wang Y. Excellent thermoelectric performance of $BaMgSi$ driven by low lattice thermal conductivity: A promising thermoelectric material. *Journal of Alloys and Compounds*, 2020, vol. 827, pp. 154342. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2020.154342>



4. Wang C., Zheng C., Gao G. Bulk and Monolayer ZrS_3 as Promising Anisotropic Thermoelectric Materials: A Comparative Study. *The Journal of Physical Chemistry C*, 2020, vol. 124, no. 12, pp. 6536–6543. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.0c00298>
5. Nemov S. A., Ulashkevich Yu. V., Pogumirsky M. V., Stepanova O. S. Reflection from the Side Face of a $PbSb_2Te_4$ Crystal. *Semiconductors*, 2020, vol. 54, iss. 3, pp. 282–284. <https://doi.org/10.1134/S1063782620030161>
6. Yapyntsev M. N., Ivanov O. N., Vasil'ev A. E., Zhezhu M. V., Popkov D. A. Synthesis, structure and anisotropy of thermoelectric properties of $Bi_2Te_{2.7}Se_{0.3}$ compound doped with samarium. *Semiconductors*, 2022, vol. 55, iss. 14, pp. 2121. <https://doi.org/10.21883/SC.2022.14.53856.16>
7. Pokhrel T. R., Majumder A. Impact of Work Function Engineering on Strained Silicon Based Double Gated Junction-less Transistor. *Silicon*, 2022, vol. 14, pp. 10061–10069. <https://doi.org/10.1007/s12633-022-01661-3>
8. Beccari A., Visani D. A., Fedorov S. A., Bereyhi M. J., Boureau V., Engelsen N. J., Kippenberg T. J. Strained crystalline nanomechanical resonators with quality factors above 10 billion. *Nature Physics*, 2022, vol. 18, pp. 436–441. <https://doi.org/10.1038/s41567-021-01498-4>
9. Orton J. W., Blood P. *The Electrical Characterization of Semiconductors: Measurement of Minority Carrier Properties*. Academic Press, London, San Diego, 1990. 735 p.
10. Batavin V. V., Kontsevoy Yu. A., Fedorovich Yu. V. *Izmerenie parametrov poluprovodnikovykh materialov i struktur* [Measurement of parameters of semiconductor materials and structures]. Moscow, Radio i svyaz', 1985. 264 p. (in Russian)
11. Lugansky L. B., Tsebro V. I. Four-probe methods for measuring the resistivity of samples in the form of rectangular parallelepipeds. *Instruments and Experimental Techniques*, 2015, vol. 58, no. 1, pp. 118–129. <https://doi.org/10.1134/S0020441215010200>
12. Filippov V. V. A four-probe method for joint measurements of components of the tensors of the conductivity and the Hall coefficient of anisotropic semiconductor films. *Instruments and Experimental Techniques*, 2012, vol. 55, no. 1, pp. 104–109. <https://doi.org/10.1134/S0020441212010046>
13. Askerov B. M. *Electron Transport Phenomena in Semiconductors*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, 1994. 412 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1985. 320 p.). <https://doi.org/10.1142/1926>
14. Filippov V. V., Bormontov E. N. Features of the electric-field distribution in anisotropic semiconductor wafers in a transverse magnetic field. *Semiconductors*, 2013, vol. 47, iss. 7, pp. 884–891. <https://doi.org/10.1134/S1063782613070063>
15. Filippov V. V., Mitsuk S. V. Modelling magnetoresistance effect in limited anisotropic semiconductors. *Chinese Physics Letters*, 2017, vol. 34, no. 7, pp. 077201. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/34/7/077201>
16. Baranskij P I., Buda I. S., Dakhovsky I. V., Kolomoets V. V. *Elektricheskie i gal'vanomagnitnye javleniya v anizotropnykh poluprovodnikakh* [Electrical and galvanomagnetic phenomena in anisotropic semiconductors]. Kiev, Naukova dumka, 1977. 270 p. (in Russian).
17. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford, Pergamon Press, 1984. 474 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1982. 621 p.).
18. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Dover Publications, Inc., New York, 2000. 1152 p. (Russ. ed.: Saint Petersburg, Lan', 2003. 832 p.).
19. Webster A. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics: Second edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 2016. 464 p.
20. Gurevich Yu. G., Kucherenko V. V., Ramires de Areiano E. A problem with directional derivative in the theory of galvanomagnetic effects. *Mathematical Notes*, 1999, vol. 65, pp. 436–446. <https://doi.org/10.1007/BF02675357>
21. Gonzalez G., Gurevich Yu. G., Prosentsov V. V. New mechanism of magnetoresistance in bulk semiconductors: Boundary condition effects. *Solid State Communications*, 1996, vol. 97, no. 12, pp. 1069–1072. [https://doi.org/10.1016/0038-1098\(96\)00032-4](https://doi.org/10.1016/0038-1098(96)00032-4)
22. Kibirev V. V. Basic boundary value problems of potential theory. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, Informatika* [Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Computer Science], 2015, no. 2, pp. 22–29 (in Russian).
23. Filippov V. V., Vlasov A. N. Probe Measurements of the Potential Distribution in Anisotropic Semiconductor Crystals and Films. *Russian Microelectronics*, 2013, vol. 42, no. 7, pp. 428–432. <https://doi.org/10.1134/S1063739712070190>
24. Makarov E. G. *Inzhenernye raschety v Mathcad 15* [Engineering calculations in Mathcad 15]. Saint Petersburg, Piter, 2011. 402 p. (in Russian).
25. Maxfield B. *Essential Mathcad for Engineering, Science, and Math*. 2nd edition. Elsevier Science, Academic Press, 2009. 501 p.
26. Lazarev V. B., Shevchenko V. Ya., Grinberg Ya. Kh., Sobolev V. V. *Poluprovodnikovye soedineniya gruppy $A^{II}B^V$* [Semiconductor compounds of the $A^{II}B^V$ group]. Moscow, Nauka, 1977. 148 p. (in Russian).
27. Filippov V. V., Zavorotny A. A., Tigrov V. P. Modified Van der Pauw method of measuring the electrical conductivity tensor of anisotropic semiconductor films. *Russian Physics Journal*, 2019, vol. 62, no. 1, pp. 105–113. <https://doi.org/10.1007/s11182-019-01689-w>

Поступила в редакцию 07.04.2023; одобрена после рецензирования 05.05.2023; принята к публикации 20.05.2023
The article was submitted 07.04.2023; approved after reviewing 05.05.2023; accepted for publication 20.05.2023