

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 167–178
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 167–178
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-2-167-178>, EDN: GTHXWI

Научная статья
УДК 537.8

Корреляционные соотношения для графена и его тепловое излучение

М. В. Давидович^{1✉}, О. Е. Глухова^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова, Россия, 119991, г. Москва, ул. Трубецкая, д. 8, стр. 2

Давидович Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиотехники и электродинамики, davidovichmv@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8706-8523>
Глухова Ольга Евгеньевна, доктор физико-математических наук, профессор, ¹заведующий кафедрой радиотехники и электродинамики; ²ведущий научный сотрудник Института бионических технологий и инжиниринга, glukhovaoe@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5670-2058>

Аннотация. Рассмотрено тепловое излучение листа графена, а также поглощаемая указаным листом мощность на единицу поверхности в термодинамическом равновесии с вакуумным излучением. Из сравнения этих величин установлены корреляционные соотношения для флуктуаций поверхностной плотности тока в графене и в аналогичном ему 2D проводящем листе, описываемым поверхностной проводимостью. Указанные соотношения следует использовать в теории дисперсионного взаимодействия структур с графеном, используя метод Рытова–Левина и Лифшица введения флуктуационных источников в уравнения Максвелла. Также рассмотрен радиационный теплообмен листов графена при разных температурах.

Ключевые слова: графен, корреляции, силы Казимира–Лифшица, тепловое излучение

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2023-0008).

Для цитирования: Давидович М. В., Глухова О. Е. Корреляционные соотношения для графена и его тепловое излучение // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 167–178. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-2-167-178>, EDN: GTHXWI

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Correlation relations for graphene and its thermal radiation

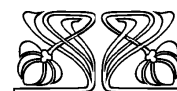
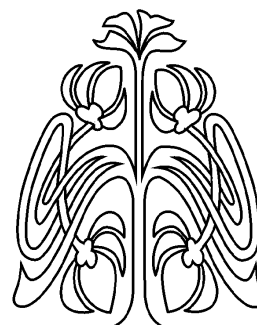
М. В. Davidovich^{1✉}, О. Е. Glukhova^{1,2}

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

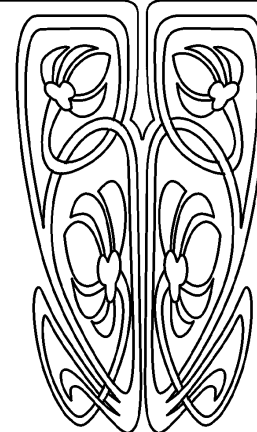
²I. M. Sechenov First Moscow State Medical University, Institute for Bionic Technologies and Engineering, 8-2 Trubetskaya St., Moscow 119991, Russia

Mikhail V. Davidovich, davidovichmv@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8706-8523>
Olga E. Glukhova, glukhovaoe@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5670-2058>

Abstract. Background and Objectives: The thermal radiation of a graphene sheet is considered, as well as the power absorbed by the specified sheet per unit surface in the thermodynamic equilibrium with vacuum radiation. From the comparison of these values, correlation relations are



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





established for fluctuations in the surface current density in graphene and in a 2D conductive sheet similar to it, described by surface conductivity. These relations should be used in the theory of dispersion interaction of structures with graphene, using the Rytov–Levin and Lifshitz method of introducing fluctuation sources into Maxwell’s equations. **Model and Methods:** We consider the equilibrium of a graphene sheet with a Planck thermal field from the principle of detailed equilibrium. From this we get correlation relations. With their use, we obtain the density of thermal radiation. **Results:** The thermal radiation densities of a graphene sheet at different temperatures have been obtained, as well as the specific heat transfer between two graphene sheets at different temperatures. **Conclusion:** The obtained correlations may be used for calculations of dispersion forces.

Keywords: graphene, correlations, Casimir–Lifshitz forces, thermal radiation

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of a state assignment (project No. FSRR-2023-0008).

For citation: Davidovic M. V., Glukhova O. E. Correlation relations for graphene and its thermal radiation. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 167–178 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-2-167-178>, EDN: GTHXWI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC0-BY 4.0)

Введение

Рассмотрим бесконечный лист графена в вакууме при температуре T в термодинамическом равновесии с плотностью равновесного излучения [1]

$$\begin{aligned} u(\omega, T) &= \frac{\omega^2}{\pi c^3} \Theta(\omega, T) = \\ &= \frac{\omega^2}{\pi c^3} \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \right) = \\ &= \frac{\hbar\omega^3}{2\pi c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

В ней учтены вакуумные виртуальные фотоны с «нулевой» энергией $\hbar\omega/2$ и тепловые фотоны. Тепло переносится тепловыми фотонами с планковской плотностью излучения

$$u'(\omega, T) = f_{BE}(\omega, T) \hbar\omega^3 / (\pi c^3),$$

где $f_{BE}(\omega, T) = [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1}$ – функция Бозе–Эйнштейна. Графен является истинно 2D материалом, описываемым двумерной макроскопической проводимостью $\hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k})$ [2–6]. Это означает, что при воздействии электрического поля плоской монохроматической электромагнитной волны $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega - i\mathbf{k}\mathbf{r})$ имеют место связи компонент поверхностного тока \mathbf{j} в графене с полем:

$$\begin{aligned} j_x(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) &= \sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}) E_x(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) + \\ &+ \sigma_{xy}(\omega, \mathbf{k}) E_y(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}), \\ j_y(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) &= \sigma_{yx}(\omega, \mathbf{k}) E_x(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) + \\ &+ \sigma_{yy}(\omega, \mathbf{k}) E_y(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, точка $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\tau$ находится на поверхности графена, а бесконечный лист графена считается расположенным в плоскости $(x, y, 0)$. Лист графена является поглотителем.

В то же время в силу флуктуаций тока в термодинамическом равновесии он излучает ровно столько, сколько поглощает. Считая тензор проводимости приведенным к главным осям, имеем $j_x(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}) E_x(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$, $j_y(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sigma_{yy}(\omega, \mathbf{k}) E_y(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$. В ряде работ в разных приближениях получена тензорная проводимость графена, например [2, 5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\omega, k_x) &= \\ &= \sigma_{\text{intra}}(\omega) \left[1 + \frac{v_F^2}{4(\omega - i\omega_c)^2} \left(3 - \frac{2i}{\omega/\omega_c} \right) k_x^2 \right] + \\ &+ \sigma_{\text{inter}}(\omega), \\ \sigma_{yy}(\omega, k_x) &= \\ &= \sigma_{\text{intra}}(\omega) \left[1 + \frac{v_F^2}{4(\omega - i\omega_c)^2} \left(3 - \frac{2i}{\omega/\omega_c} \right) k_y^2 \right] + \\ &+ \sigma_{\text{inter}}(\omega). \end{aligned}$$

Здесь $v_F = c/300$ м/с – скорость Ферми, ω_c – частота столкновений (обратное время релаксации импульса), а внутризонная и межзонная проводимости определяются формулами [3–5]

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{intra}}(\omega, \mu, \omega_c, T) &= \frac{-ie^2 k_B T}{\pi \hbar^2 (\omega - i\omega_c)} \Psi(\mu_c, T) = \\ &= \frac{\sigma_{0\text{intra}}}{1 + i\omega/\omega_c}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{inter}}(\omega, \mu, \omega_c) &= \\ &= \frac{-ie^2 (\omega - i\omega)}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty \frac{f_{FD}(-\varepsilon) + f_{FD}(\varepsilon)}{(\omega - i\omega)^2 - (2\varepsilon/\hbar)^2} d\varepsilon, \end{aligned} \quad (3)$$

где $f_{FD}(\varepsilon) = [\exp((\varepsilon - \mu_c)/k_B T) + 1]^{-1}$ – функция Ферми–Дирака. Для определения тензора проводимости здесь использована модель Бхатнагара–Гросса–Крука. В приближении времени релаксации для интеграла столкновений его величины имеют тот же порядок, но коэффициенты



несколько отличаются. В случае малых температур $k_B T \ll \mu_c$ и $k_B T \ll \omega \hbar$ межзонная проводимость аппроксимируется формулой

$$\sigma_{\text{inter}}(\omega, \mu, \omega_c) = \frac{-ie^2}{4\pi\hbar} \ln \left(\frac{2|\mu_c| - (\omega - i\omega_c)\hbar}{2|\mu_c| + (\omega - i\omega_c)\hbar} \right). \quad (4)$$

Указанные формулы получены путем приближенного вычисления интегралов по зоне Бриллюэна графена в модели линейного отклика Кубо при воздействии поля плоской волны, при этом берется только окрестность точек Дирака с линейной дисперсией. Именно такие электроны и дырки в основном и участвуют в квантовом транспорте. При больших частотах $\omega \gg \omega_c$ и $\omega \gg \mu_c/\hbar$ согласно формуле (4) $\sigma'_{\text{inter}} = e^2/(4\hbar)$, $\sigma''_{\text{inter}} = e^2\mu(1 - \alpha/\omega)/(\pi\hbar^2\omega) \approx e^2\mu/(\pi\hbar^2\omega)$, $\alpha = (|\mu_c|/\hbar)(1 + \omega^2/4(|\mu_c|/\hbar)^2)$. Однако в этом случае определяющий σ_{inter} интеграл (3) убывает обратно пропорционально частоте. Следовательно, при больших частотах формула не верна. Чтобы не вычислять этот интеграл можно использовать σ_{inter} с обрезывающим фактором $[1 + (\omega\hbar)^2/(k_B T + \mu)^2]^{-1}$. В нем величина $\Omega = (k_B T + \mu)/\hbar$ выступает как некая частота столкновений, соответствующая времени релаксации $\tau_r = 1/\Omega$ для межзонных переходов.

Свойства графена существенно зависят от наличия или отсутствия примесей, наличия или отсутствия внешних полей, при этом существенную роль играет внутризонная частота столкновений. Для чистого графена она может быть аппроксимирована согласно работе [6] соотношением $\omega_c = \omega_{0c}T/T_0$, где $\omega_{0c} = 8 \cdot 10^{11}$ Гц – частота столкновений при $T_0 = 300$ К. Есть и другие оценки ω_{0c} . Если энергия кванта больше энергии связи π -электронов (2.8 эВ), то указанные формулы не работают, а вклад таких электронов можно считать по 2D плазменной модели, когда каждый атом углерода отдает либо четыре, либо все шесть электронов в зону проводимости. Графен может иметь нелинейный отклик. Далее мы рассматриваем только линейную проводимость, пренебрегая пространственной дисперсией. Это можно сделать при малых $k^2 = \mathbf{k}^2$, что выполняется вплоть до оптических частот. Считая $\omega \gg \omega_c$, видим, что добавка из-за пространственной дисперсии в σ_{xx} даже при $k^2 = k_x^2 = k_0^2$ весьма мала. Далее мы не будем рассматривать тензорную проводимость, описывая любой 2D материал (графен, борофен, силицен и т. п.) скалярной проводимостью $\sigma(\omega)$, поскольку пространственная дисперсия

слабо влияет на дисперсионные силы, а результат ее учета весьма сложен. Для графена при низких частотах в пренебрежении межзонами переходами проводимость дается формулой (2) $\sigma(\omega) = \sigma_{\text{intra}}(\omega, \mu, \omega_c, T)$, где

$$\Psi(\mu, T) = \ln \left(2 + 2 \cosh \left(\frac{\mu}{k_B T} \right) \right),$$

т. е. она такая же, как в модели Друде с проводимостью $\sigma(0) = e^2 k_B T \Psi(\mu_c, T) / (\pi \hbar^2 \omega_c)$ на постоянном токе.

1. Корреляционные соотношения для плотности тока

Корреляционные соотношения важны в теории дисперсионных сил или сил Казимира–Лифшица, поскольку они позволяют определить корреляции полей через входящие флуктуационные источники в уравнения Максвелла [1,7]. Для наноструктур с графеновыми листами корреляционные силы важны как на малых расстояниях порядка долей нм (например, взаимодействие ван-дер-Ваальса в n -слойном графене или в графите), так и на расстояниях от нескольких до сотен нм, например наноструктурах с графеновыми в чешуйками. Корреляционные соотношения для анизотропной диэлектрической среды имеют вид [1]

$$\begin{aligned} & \left\langle J_{\alpha}^0(\omega, \mathbf{r}), J_{\beta}^0(\omega, \mathbf{r}') \right\rangle = \\ & = -i\omega\epsilon_0 \left[\epsilon_{\alpha\beta}^*(\omega) - \epsilon_{\beta\alpha}(\omega) \right] \Theta(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / \pi, \end{aligned}$$

а для изотропного диэлектрика соответственно

$$\begin{aligned} & \left\langle J_{\alpha}^0(\omega, \mathbf{r}), J_{\beta}^0(\omega, \mathbf{r}') \right\rangle = \\ & = \epsilon_0 \epsilon''(\omega) \omega \Theta(\omega) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') / \pi. \end{aligned}$$

Здесь $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega)$ и введены флуктуационные плотности тока $J_{\alpha}^0(\omega, \mathbf{r})$, $\alpha, \beta = x, y, z$. Скобки $\langle \rangle$ означают статистическое усреднение (усреднение по ансамблю) величин $J_{\alpha}^0(\omega, \mathbf{r}) J_{\beta}^{0*}(\omega, \mathbf{r}')$ [1]. В диэлектрике ток поляризации $\mathbf{J}^p(\omega, \mathbf{r}) = \partial_t \mathbf{P} = i\omega\epsilon_0 (\hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{r}) - \hat{I}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$ описывает все процессы поляризации, включая и проводимость, при этом величину $\hat{v} = i\omega\epsilon_0 (\hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{r}) - \hat{I})$ можно трактовать как тензор удельной проводимости. Поскольку для графена формально $J_x^p(\omega) = j_x(\omega) \delta(z)$, $J_y^p(\omega) = j_y(\omega) \delta(z)$, $J_z^p(\omega) \equiv 0$, то следует ожидать следующего корреляционного соотношения:

$$\begin{aligned} & \left\langle j_{\alpha}^0(\omega, x, y), j_{\beta}^0(\omega, x', y') \right\rangle = F(\omega, T) = \\ & = \sigma'(\omega) \Theta(\omega, T) \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x') \delta(y - y') / \pi, \end{aligned} \quad (5)$$



где $\sigma'(\omega, T)$ – реальная часть скалярной проводимости. Оно записано для компонент флуктуационной поверхностной плотности тока $j_\alpha^{(0,d)}(x, y)$, $\alpha, \beta = x, y$, а зависимость проводимости от температуры часто будем опускать: $\sigma'(\omega) = \text{Re}(\sigma(\omega))$. В работе [1] описан способ доказательства корреляционных соотношений, основанный на принципе детального равновесия: пластина из материала тела помещается в волновую зону тела и определяется количество тепла, полученное пластиной от тела и телом от пластины. При этом пластину следует считать большой, чтобы при расчете ее поглощения и излучения были применимы асимптотические формулы классической теории излучения [1]. Однако графен имеет нулевую (атомную) толщину, поэтому применимость (5) нуждается в обосновании. В (5) не входит мнимая (реактивная) часть проводимости. Однако поглощение листа графена должно от нее зависеть. Задачу для листа графена можно решить строго. Цель данной работы и состоит в получении соотношений типа (5) для листа тока, описываемого двумерной проводимостью. Определим правую часть (5) в виде $F(\omega, T) \Theta(\omega, T) \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x') \delta(y - y')$, где $F(\omega, T)$ – пока неизвестная функция. Будем использовать безразмерную (нормированную) скалярную поверхностную проводимость $\xi(\omega) = \xi'(\omega) + i\xi''(\omega) = \sigma(\omega) \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Вводим квадрат волнового вектора в виде $\mathbf{k}^2 = \mathbf{q}^2 + k_z^2$, где $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{k_0^2 - q^2}$.

Графеновый лист поглощает мощность теплового поля и одновременно излучает мощность с каждой единицы поверхности в пространство. При тепловом равновесии с полем эти мощности равны. Найдем мощность, излучаемую единицей площади графенового листа. Она определяется флуктуационными источниками и дается z -компонентой вектора Пойнтинга:

$$S_z^0(\omega, \mathbf{r}) = \text{Re}(E_x^0(\omega, \mathbf{r})H_y^{0*}(\omega, \mathbf{r}) - E_y^0(\omega, \mathbf{r})H_x^{0*}(\omega, \mathbf{r}))/2. \quad (6)$$

Это мощность, излученная вправо. Ее следует удвоить, учитывая мощность, излученную влево. Оба слагаемых в (6) дают равный вклад. Для компонент полей имеем [8]

$$E_x^{0,d}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(k_0^2 - k_x^2)j_x^{0,d}(\mathbf{q}) - k_x k_y j_y^{0,d}(\mathbf{q})] e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau - |z|\kappa}}{8\pi^2 i\omega \epsilon_0 \kappa} d^2 q, \quad (7)$$

$$E_y^{0,d}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(k_0^2 - k_y^2)j_y^{0,d}(\mathbf{q}) - k_x k_y j_x^{0,d}(\mathbf{q})] e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau - |z|\kappa}}{8\pi^2 i\omega \epsilon_0 \kappa} d^2 q, \quad (8)$$

$$E_z^{0,d}(\mathbf{r}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z [k_x j_x^{(0,d)}(\mathbf{q}) + k_y j_y^{(0,d)}(\mathbf{q})] e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau - |z|\kappa}}{8\pi^2 i\omega \epsilon_0 \kappa} d^2 q, \quad (9)$$

$$H_x^{0,d}(\mathbf{r}) = \text{sgn}(z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j_y^{0,d}(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau - ik_z|z|}}{8\pi^2} d^2 q, \quad (10)$$

$$H_y^{0,d}(\mathbf{r}) = -\text{sgn}(z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j_x^{0,d}(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau - ik_z|z|}}{8\pi^2} d^2 q, \quad (11)$$

$$H_z^{0,d}(\mathbf{r}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[k_x j_y^{0,d}(\mathbf{q}) - k_y j_x^{0,d}(\mathbf{q})] e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau - ik_z|z|}}{8\pi^2 k_z} d^2 q. \quad (12)$$

Эти соотношения записаны как для флуктуационных компонент (индекс 0), так и для дифракционных компонент (индекс d). Двойной пространственно-спектральный интеграл обозначен одним символом, $d^2 q = dk_x dk_y$. Для представления компонент электрического поля мы использовали величину $\kappa = -ik_z = -i\sqrt{k_0^2 - q^2}$. Эта величина действительная и равна $\sqrt{q^2 - k_0^2}$, если $k_0^2 < q^2$. Мы также использовали преобразование Фурье

$$\mathbf{j}^{0,d}(\omega, \mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}^{0,d}(\omega, \mathbf{r}_\tau) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) dx dy, \quad (13)$$

подразумевая, что обратное преобразование имеет вид

$$\mathbf{j}^{0,d}(\omega, \mathbf{r}_\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}^{0,d}(\omega, \mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) dk_x dk_y. \quad (14)$$

Образуя корреляцию для преобразования (13), находим с использованием (5)

$$\langle j_\alpha^0(\omega, \mathbf{q}), j_\beta^0(\omega, \mathbf{q}') \rangle = (2\pi)^2 F(\omega, T) \delta_{\alpha\beta} \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y). \quad (15)$$

Образуя величину $\text{Re}(E_x^0(\omega, \mathbf{r})H_y^{0*}(\omega, \mathbf{r}))$, видим, что она равна нулю при $k_0^2 < q^2$, т. е. эванесцентные моды не излучают. Используя (15), имеем

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle E_x^0(\omega, \mathbf{r}), H_y^{0*}(\omega, \mathbf{r}) \rangle &= \\ &= F(\omega, T) \Theta'(\omega, T) \int_0^{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 \leq k_0}} \frac{k_0^2 - k_x^2}{4\pi^2 \omega \epsilon_0 k_z} dk_x dk_y. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались четностью и преобразовали интеграл к положительным областям. Также мы взяли функцию $\Theta'(\omega, T) = \hbar \omega f_{BE}(\omega, T)$,



описывающую среднюю энергию тепловых осцилляторов поля. Вычисляем интеграл в полярных координатах $k_x = q \cos(\varphi)$, $k_y = q \sin(\varphi)$. Результат имеет вид $\text{Re}(E_x^0(\omega, \mathbf{r}) H_y^{0*}(\omega, \mathbf{r})) = = k_0^3 F(\omega, T) / (12\pi\omega\epsilon_0)$. Учитывая две поляризации и две стороны излучения, для полной спектральной мощности результат следует увеличить в четыре раза:

$$P(\omega) = k_0^2 F(\omega, T) \Theta'(\omega, T) / (6\pi\epsilon_0). \quad (16)$$

Удельная мощность излучения по всему спектру будет

$$P = \frac{\hbar}{3\pi^2 \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{F(\omega, T) \Theta'(\omega, T) \omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}.$$

В соответствии с определением вектора Пойнтинга здесь мы использовали только положительные частоты.

Найдем мощность, поглощаемую единицей поверхности графенового листа. Она определяется дифракционными компонентами поверхностной плотности тока, возбуждаемыми тепловым полем:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{\text{Re}(j_x^p E_x^{p*} + j_y^p E_y^{p*})}{2} = \\ &= \frac{\text{Re}(\sigma E_x^p E_x^{p*} + \sigma E_y^p E_y^{p*})}{2} = \\ &= \sigma' \frac{|E_x^p|^2 + |E_y^p|^2}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для определения (17) рассмотрим падающую на лист графена слева ($z < 0$) под всевозможными углами E -волну

$$\begin{aligned} E_z^e(\omega, \mathbf{q}) &= A_e(\omega, \mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\ &\times (\exp(-ik_z z) - R_e \exp(ik_z z)), \end{aligned}$$

а также такую же H -волну

$$\begin{aligned} H_z^h(\omega, \mathbf{q}) &= A_h(\omega, \mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\ &\times (\exp(-ik_z z) + R_e \exp(ik_z z)). \end{aligned}$$

Прошедшие волны ($z > 0$) имеют вид

$$E_z^e = T_e A_e(\omega, \mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau - ik_z z),$$

$$H_z^h = T_h A_h(\omega, \mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau - ik_z z).$$

Поперечные компоненты выражаются через продольные согласно формулам (10.50) из [9] и имеют вид:

$$\begin{aligned} E_x^{e,h} &= -q^{-2} k_z k_x A_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\ &\times (\exp(-ik_z z) + R_{e,h} \exp(ik_z z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y^{e,h} &= -q^{-2} k_z k_y A_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\ &\times (\exp(-ik_z z) + R_{e,h} \exp(ik_z z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_x^{e,h} &= \omega\epsilon_0 q^{-2} k_y A_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\ &\times (\exp(-ik_z z) - R_{e,h} \exp(ik_z z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_y^{e,h} &= -\omega\epsilon_0 q^{-2} k_x A_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\ &\times (\exp(-ik_z z) - R_{e,h} \exp(ik_z z)). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau = xk_y + k_y y$. Прошедшие волны отличаются тем, что множители $\exp(-ik_z z) \pm \pm R_{e,h} \exp(ik_z z)$ следует заменить на $T_{e,h} \exp(-ik_z z)$. Сшивая электрические поля, находим связь коэффициентов отражения и прохождения $1 + R_{e,h} = T_{e,h}$. Сшивая магнитные поля, имеем $j_x^d = \sigma_{xx} E_x = H_y^- - H_y^+$, $j_y^d = \sigma_{yy} E_y = H_x^+ - H_x^-$. Эти уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} j_x^d \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) &= -\frac{\omega\epsilon_0 k_x}{q^2} A_e(\omega, \mathbf{q}) (1 - R_e - T_e) - \\ &- \frac{k_z k_y}{q^2} A_h(\omega, \mathbf{q}) (1 - R_h - T_h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_y^d \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) &= -\frac{\omega\epsilon_0 k_y}{q^2} A_e(\omega, \mathbf{q}) (1 - R_e - T_e) + \\ &+ \frac{k_z k_x}{q^2} A_h(\omega, \mathbf{q}) (1 - R_h - T_h). \end{aligned}$$

Умножая первое на k_x , второе на k_y и складывая, получаем

$$\begin{aligned} (j_x^d k_x + j_y^d k_y) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) &= \\ = -\omega\epsilon_0 A_e(\omega, \mathbf{q}) (1 - R_e - T_e). \end{aligned}$$

Аналогично умножая первое на k_y , а второе на k_x и вычитая, получаем

$$\begin{aligned} (j_y^d k_x - j_x^d k_y) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) &= \\ = k_z A_h(\omega, \mathbf{q}) (1 - R_h - T_h). \end{aligned}$$

Их этих уравнений находим

$$R_e(\omega, \mathbf{q}) = \frac{j_x^d k_x + j_y^d k_y}{2\omega\epsilon_0 A_e(\omega, \mathbf{q})} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau), \quad (18)$$

$$R_h(\omega, \mathbf{q}) = \frac{j_y^d k_x - j_x^d k_y}{2k_z A_h A_e(\omega, \mathbf{q})} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau). \quad (19)$$

С другой стороны, обозначая $Z_e = k_z / (\omega\epsilon_0)$ и $Z_h = = \omega\mu_0 / k_z$, имеем

$$\begin{aligned} E_x^{e,h} &= E_{0x}^{e,h} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\ &\times (\exp(-ik_z z) + R_{e,h} \exp(ik_z z)), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 H_y^{e,h} &= \frac{E_{0x}^{e,h}}{Z_{e,h}} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\
 &\times (\exp(-ik_z z) - R_{e,h} \exp(ik_z z)), \\
 E_y^{e,h} &= E_{0y}^{e,h} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\
 &\times (\exp(-ik_z z) + R_{e,h} \exp(ik_z z)), \\
 H_x^{e,h} &= -\frac{E_{0y}^{e,h}}{Z_{e,h}} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_\tau) \times \\
 &\times (\exp(-ik_z z) - R_{e,h} \exp(ik_z z)),
 \end{aligned}$$

где $E_{0x}^e = -q^{-2}k_z k_x A_e(\omega, \mathbf{q})$, $E_{0y}^e = -q^{-2}k_z k_y A_e(\omega, \mathbf{q})$, $E_{0x}^h = -\omega\mu_0 q^{-2}k_y A_h(\omega, \mathbf{q})$, $E_{0y}^h = \omega\mu_0 q^{-2}k_x A_h(\omega, \mathbf{q})$. В силу независимости E - и H -полей и двух поляризаций можно рассматривать уравнения независимо, при этом коэффициенты отражения и прохождения выражаются через проводимость в виде

$$R_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) = -\frac{\sigma(\omega)}{2Y_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) + \sigma(\omega)}, \quad (20)$$

$$T_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{2Y_{e,h}(\omega, \mathbf{q})}{2Y_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) + \sigma(\omega)}. \quad (21)$$

Здесь $Y_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) = Z_{e,h}^{-1}(\omega, \mathbf{q})$. Это, в частности, видно из того, что матрица передачи 4×4 листа графена, связывающая компоненты $(E_x, H_y, -E_y, H_x)$ слева и справа от него, имеет блочно-диагональный вид

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \\ 0 & \hat{a} \end{bmatrix}$$

с матрицей

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & 1 \end{bmatrix}$$

на главной диагонали. Это обеспечивает связи $E_x^- = E_x^+$, $H_y^- = \sigma E_x^+ + H_y^+$, $-E_y^- = -E_y^+$, $H_x^- = -\sigma E_y^+ + H_x^+$, которые с учетом $\sigma E_x^+ = \sigma E_x = j_x^d$ и $\sigma E_y^+ = \sigma E_y = j_y^d$ выражают граничные условия, причем независимо для E - и H -волн. Тензорная проводимость (учет пространственной дисперсии) приводит к смешиванию мод и поляризаций. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 E_x^e H_y^{e*} &= \omega \epsilon_0 k_z k_x^2 |A_e(\omega, \mathbf{q})/q|^2, \\
 -E_y^e H_x^{e*} &= \omega \epsilon_0 k_z k_y^2 |A_e(\omega, \mathbf{q})/q|^2, \\
 E_x^h H_y^{h*} &= \omega \mu_0 k_z k_y^2 |A_h(\omega, \mathbf{q})/q|^2, \\
 -E_y^h H_x^{h*} &= \omega \mu_0 k_z k_x^2 |A_h(\omega, \mathbf{q})/q|^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x^e H_y^{h*} &= k_z^2 k_x k_y A_e(\omega, \mathbf{q}) A_h^*(\omega, \mathbf{q})/q^2, \\
 E_x^h H_y^{e*} &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 k_x k_y A_h(\omega, \mathbf{q}) A_e^*(\omega, \mathbf{q})/q^2, \\
 -E_y^e H_x^{h*} &= -k_z^2 k_x k_y A_e(\omega, \mathbf{q}) A_h^*(\omega, \mathbf{q})/q^2, \\
 -E_y^h H_x^{e*} &= -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 k_y k_x A_h(\omega, \mathbf{q}) A_e^*(\omega, \mathbf{q})/q^2.
 \end{aligned}$$

Из них следует

$$2S_z(\omega, \mathbf{q}) = \omega k_z q^{-2} (\epsilon_0 |A_e(\omega, \mathbf{q})|^2 + \mu_0 |A_h(\omega, \mathbf{q})|^2).$$

Считая излучение изотропным, положим $A_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) = (q/k_0) A_{e,h}(\omega)$. Заметим, что выбор спектральных амплитуд в некотором смысле произволен. Такой выбор амплитуд позволяет учесть и случай T -волн, причем результат можно обратить по Фурье. Действительно, для T -волны $q = 0$, $A_{e,h}(\omega, \mathbf{q}) = 0$, $E_z = E_z = 0$. При $k_y = 0$ и при раскрытии неопределенностей типа k_x/q , например, при $k_x \rightarrow 0$, имеем $k_x/q \rightarrow 1$. При раскрытии такой же неопределенности при $k_x = k_y \rightarrow 0$ имеем $k_x/q \rightarrow 1/\sqrt{2}$. Мощность, переносимая такой T -волной, являющейся предельным случаем E -волны, в два раза меньше, но следует учесть еще и вклад от волны другой поляризации, а также такой же вклад от предельного случая для H -волны. Интегрируя $2S_z(\omega, \mathbf{q})$ по k_x и k_y , найдем

$$2S_z(\omega) = \frac{\pi^2 \omega^2}{2} (\epsilon_0 |A_e(\omega)|^2 + \mu_0 |A_h(\omega)|^2).$$

Поток изотропного излучения вдоль оси z есть

$$S_z(\omega, T) = \frac{u'(\omega, T)}{6} = f_{BE}(\omega, T) \frac{\hbar \omega^3}{6\pi^2 c^2}.$$

Отсюда получаем $(\epsilon_0 |A_e(\omega)|^2 + \mu_0 |A_h(\omega)|^2) = f_{BE}(\omega, T) 2\hbar\omega / (3\pi^4 c)$. Для листа графена имеем

$$\begin{aligned}
 |E_x^e + E_x^h|^2 &= \frac{1}{q^2 k_0^2} \left| k_z k_x \frac{2Y_e(\omega, \mathbf{q}) A_e(\omega)}{2Y_e(\omega, \mathbf{q}) + \sigma(\omega)} + \right. \\
 &= \omega \mu_0 k_y \frac{2Y_h(\omega, \mathbf{q}) A_h(\omega)}{2Y_h(\omega, \mathbf{q}) + \sigma(\omega)} \left. \right|^2.
 \end{aligned}$$

Это выражение преобразуется к виду

$$\frac{4k_z^2}{q^2} \left| \frac{k_x A_e(\omega)}{2k_0 + k_z \xi(\omega)} + \frac{k_y Z_0 A_h(\omega)}{2k_z + k_0 \xi(\omega)} \right|^2.$$

Полагая, что вклады в излучение от E -волн и H -волн одинаковые, т. е. $A_e(\omega) = Z_0 A_h(\omega)$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 |E_x^e + E_x^h|^2 &= \frac{4k_z^2 |A_e(\omega)|^2}{q^2} \times \\
 &\times \left| \frac{k_x}{2k_0 + k_z \xi(\omega)} + \frac{k_y}{2k_z + k_0 \xi(\omega)} \right|^2. \quad (22)
 \end{aligned}$$



Точно также

$$|E_y^e + E_y^h|^2 = \frac{4k_z^2 |A_e(\omega)|^2}{q^2} \times \left| \frac{k_y}{2k_0 + k_z \xi(\omega)} + \frac{k_x}{2k_z + k_0 \xi(\omega)} \right|^2. \quad (23)$$

При интегрировании (22) и (23) по k_x и k_y члены с произведениями $k_x k_y$ обнуляются и остаются члены с k_x^2 и k_y^2 . В результате надо вычислять интегралы типа

$$I_e(\omega, \xi) = \int_{q^2 \leq k_0^2} \frac{k_z^2 k_x^2}{q^2 |2k_0 + k_z \xi(\omega)|^2} dk_x dk_y,$$

$$I_h(\omega, \xi) = \int_{q^2 \leq k_0^2} \frac{k_z^2 k_y^2}{q^2 |2k_z + k_0 \xi(\omega)|^2} dk_x dk_y$$

и такие же интегралы $I'_{1,2}$, где произведена замена $k_x \leftrightarrow k_y$. Очевидно, $I'_{1,2} = I_{1,2}$. Вычисляем их в полярной системе координат:

$$I_e(\omega, \xi) = \int_{q^2 \leq k_0^2} \frac{(k_0^2 - q^2) \cos^2 \varphi}{|2k_0 + \sqrt{k_0^2 - q^2} \xi(\omega)|^2} q dq d\varphi = \pi \int_0^{k_0} \frac{u^2 q dq}{4k_0^2 + 4k_0 u \xi'(\omega) + u^2 |\xi(\omega)|^2}.$$

Здесь $u = k_z = \sqrt{k_0^2 - q^2}$. Делая замену переменных $q = \sqrt{u^2 - k_0^2}$, получаем

$$I_e(\omega, \xi) = \pi \int_0^{k_0} \frac{u^3 du}{4k_0^2 + 4k_0 u \xi'(\omega) + u^2 |\xi(\omega)|^2}.$$

Этот интеграл вычисляется с использованием интегралов

$$I_e^n(\omega, \xi) = \int_0^{k_0} \frac{u^n du}{4k_0^2 + 4k_0 u \xi'(\omega) + u^2 |\xi(\omega)|^2},$$

$$I_e^0(\omega, \xi) = \frac{1}{2k_0 |\xi''(\omega)|} \left[\arctan \left(\frac{|\xi(\omega)|^2 + 2\xi'(\omega)}{2|\xi''(\omega)|} \right) - \arctan \left(\frac{\xi'(\omega)}{|\xi''(\omega)|} \right) \right],$$

$$I_e^1(\omega, \xi) = \frac{1}{2|\xi(\omega)|^2} \ln \left(1 + \xi'(\omega) + \frac{|\xi(\omega)|^2}{4} \right) - \frac{2k_0 \xi'(\omega)}{|\xi(\omega)|^2} I_e^0(\omega, \xi),$$

$$I_e^2(\omega, \xi) = \frac{k_0}{|\xi(\omega)|^2} -$$

$$- \frac{2k_0 \xi'(\omega)}{|\xi(\omega)|^4} \ln \left(1 + \xi'(\omega) + \frac{|\xi(\omega)|^2}{4} \right) + \frac{4k_0 (\xi'^2(\omega) - \xi''^2(\omega))}{|\xi(\omega)|^4} I_e^0(\omega, \xi).$$

Результат имеет вид

$$I_e(\omega, \xi) = \frac{\pi k_0^2}{2|\xi(\omega)|^2} - \frac{4\pi k_0^2}{|\xi(\omega)|^2} I_e^1(\omega, \xi) - \frac{4\pi k_0 \xi'(\omega)}{|\xi(\omega)|^2} I_e^2(\omega, \xi). \quad (24)$$

Для второго интеграла

$$I_h(\omega, \xi) = \pi \int_0^{k_0} \frac{u^3 du}{4u^2 + 4uk_0 \xi'(\omega) + k_0^2 |\xi(\omega)|^2},$$

$$I_h^0(\omega, \xi) = \frac{1}{2k_0 |\xi''(\omega)|} \left[\arctan \left(\frac{2 + \xi'(\omega)}{|\xi''(\omega)|} \right) - \arctan \left(\frac{\xi'(\omega)}{|\xi''(\omega)|} \right) \right],$$

$$I_h^1(\omega, \xi) = \frac{1}{8} \ln \left(\frac{4 + 4\xi'(\omega) + |\xi(\omega)|^2}{|\xi(\omega)|^2} \right) - \frac{\xi'(\omega)}{2} k_0 I_h^0(\omega, \xi),$$

$$I_h^2(\omega, \xi) = \frac{k_0}{4} \left[1 - \frac{\xi'(\omega)}{2} \ln \left(\frac{4 + 4\xi'(\omega) + |\xi(\omega)|^2}{|\xi(\omega)|^2} \right) + (\xi'^2(\omega) - \xi''^2(\omega)) k_0 I_h^0(\omega, \xi) \right],$$

и имеем результат

$$I_h(\omega, \xi) = \frac{\pi k_0^2}{4} \left[\frac{1}{2} - |\xi(\omega)|^2 I_h^1(\omega, \xi) - 4\xi'(\omega) \frac{I_h^2(\omega, \xi)}{k_0} \right]. \quad (25)$$

Видим, что спектральная мощность потерь (17) сложным образом выражается через нормированную проводимость графена в виде

$$P(\omega) = 4\hbar \omega \xi'(\omega) f_{BE}(\omega, T) \frac{|I_e(\omega, \xi) + I_h(\omega, \xi)|}{3\pi^4}. \quad (26)$$

Здесь мы учли тождество $Z_0 \varepsilon_0 c = 1$. Теперь полная плотность мощности потерь есть

$$\tilde{P} = \int_0^\infty P(\omega) d\omega.$$



Сравнивая с (16), имеем

$$F(\omega, T) = 8 \varepsilon_0 \xi'(\omega) |I_e(\omega, \xi) + I_h(\omega, \xi)| / (\pi^3 k_0^2). \quad (27)$$

Величина (27) имеет размерность проводимости. Ее можно записать в следующем виде: $F(\omega, T) = 8 \varepsilon_0 \xi'(\omega) \Phi(\xi'(\omega), \xi''(\omega)) / \pi^3$, где безразмерная положительная функция $\Phi(\xi'(\omega), \xi''(\omega))$ получена выделением из интегралов множителя k_0^2 и сокращения на него:

$$\Phi(\xi'(\omega), \xi''(\omega)) = |I_e(\omega, \xi) + I_h(\omega, \xi)| / k_0^2.$$

Она имеет достаточно сложный вид.

Рассмотрим частный предельный случай отсутствия реактивных свойств $\xi'' = 0$:

$$I_e(\omega, \xi) = \frac{1}{\xi'^4} \left(\frac{\xi'^2(\omega) + 4\xi'(\omega)}{2} - 6\xi'(\omega) + 12 \ln(1 + \xi'(\omega)/2) + \frac{8}{\xi'(\omega) + 2} - 4 \right),$$

$$I_h(\omega, \xi) = \frac{1}{16} \left(25\xi'(\omega) + 3\xi'^2(\omega) \ln\left(1 + \frac{2}{\xi'(\omega)}\right) + \frac{\xi'^3(\omega)}{2 + \xi'(\omega)} - \xi'^2(\omega) \right).$$

Эти соотношения упрощаются, если диссипация мала $\xi' \ll 1$. В этом случае $I_h(\omega, \xi) \approx \pi k_0^2 / 8$, $I_e(\omega, \xi) \approx \pi k_0^2 / (2\xi'^2(\omega))$ и функция $\Phi(\xi'(\omega), 0) \approx \pi / (2\xi'^2(\omega))$ большая. Если же диссипация большая ($\xi' \gg 1$), то $I_e(\omega, \xi) \approx \pi k_0^2 / (2\xi'^2(\omega))$, $I_h(\omega, \xi) \approx \pi k_0^2 (2 - \xi'(\omega)) / 16$, и функция $\Phi(\xi'(\omega), 0) \approx \pi \xi' / 16$ также большая.

В другом частном случае отсутствия диссипации $\xi'(\omega) = 0$ получаем

$$I_e(\omega, \xi) = \frac{1}{\pi k_0^2} = \frac{1}{2\xi''^2(\omega)} - \frac{2}{\xi''^4(\omega)} \ln\left(1 + \frac{\xi''^2(\omega)}{4}\right),$$

$$I_h(\omega, \xi) = \frac{1}{\pi k_0^2} = \frac{1}{8} - \frac{\xi''^2(\omega)}{32} \ln\left(1 + \frac{4}{\xi''^2(\omega)}\right).$$

Соотношения упрощаются, если реактивность мала ($\xi''^2(\omega) \ll 1$): $I_e(\omega, \xi) \approx \pi k_0^2 / 16$, $I_h(\omega, \xi) \approx \pi k_0^2 / 8$, т. е. функция становится постоянной $\Phi(0, \xi''(\omega)) \approx 3\pi / 16$. В случае большой реактивности ($\xi''^2(\omega) \gg 1$)

$$I_e(\omega, \xi) = \frac{1}{\pi k_0^2} \approx \frac{1}{2\xi''^2(\omega)} - \frac{4}{\xi''^4(\omega)} \ln\left(\frac{\xi''(\omega)}{2}\right) \approx \frac{1}{2\xi''^2(\omega)},$$

$$I_h(\omega, \xi) \approx \frac{1}{\pi k_0^2} \approx \frac{1}{4\xi''^2(\omega)},$$

и функция $\Phi(0, \xi''(\omega)) \approx 3\pi / (4\xi''^2(\omega))$ мала. В предположении, что проводимость описывается моделью Друде

$$\xi(\omega) = \xi'(\omega) + i\xi''(\omega) = \frac{\xi(0)}{1 + i\omega/\omega_c}, \quad (28)$$

оценим результаты при больших частотах, когда $|\xi(\omega)|^2 \approx \xi''^2(\omega)$, $\xi'(\omega) \approx |\xi(\omega)|^2 / \xi_0$, $\xi''(\omega) \approx -\xi_0 \omega_c / \omega$. Мы обозначили константу $\xi(0) = \xi_0$. В этом случае все величины малы, $|\xi(\omega)|^2$ и $\xi'(\omega)$ одного порядка малости, а $\xi''(\omega)$ отрицательная и существенно превосходит их по модулю: $|\xi(\omega)|^2 = \xi''^2(\omega) = \xi_0 \xi'(\omega)$. Имеем соотношения:

$$I_e^0(\omega, \xi) = \frac{1}{2k_0} \left(\frac{1}{2} - \frac{|\xi(\omega)|^2}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4\xi_0} + \frac{3}{2\xi_0^2} \right) \right),$$

$$I_h^0(\omega, \xi) = \frac{1}{2k_0} \left(\frac{\pi}{2|\xi(\omega)|} - \frac{1}{\xi_0} \right),$$

$$I_e^1(\omega, \xi) = \frac{1}{8} - \frac{|\xi(\omega)|^2}{4} \left(\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{4} \right)^2,$$

$$I_h^1(\omega, \xi) = \frac{|\xi(\omega)|^2}{8} \left(\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2}{|\xi(\omega)|}\right) - \frac{1}{4\xi_0} \left(\frac{\pi|\xi(\omega)|}{2} - \frac{|\xi(\omega)|^2}{\xi_0} \right),$$

$$I_e^2(\omega, \xi) = -\frac{2}{\xi_0} \left(\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{|\xi(\omega)|^2}{2} \left(\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{4} \right) \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4\xi_0} + \frac{3}{2\xi_0^2} \right) + \frac{1}{\xi_0^2} \left(1 - \frac{2|\xi(\omega)|^2}{3} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4\xi_0} + \frac{3}{2\xi_0^2} \right) \right),$$

$$\frac{I_h^2(\omega, \xi)}{k_0} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{|\xi(\omega)|^2}{2\xi_0} \left(\frac{|\xi(\omega)|^2}{\xi_0} + \frac{|\xi(\omega)|^2}{4} - 2 \ln\left(\frac{2}{|\xi(\omega)|}\right) \right) + \frac{|\xi(\omega)|}{2} \left(\frac{|\xi(\omega)|^2}{\xi_0^2} - 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{|\xi(\omega)|}{\xi_0} \right) \right],$$



$$\frac{I_e(\omega, \xi)}{\pi k_0^2} = \frac{1}{2|\xi(\omega)|^2} - \frac{4}{|\xi(\omega)|^2} I_e^1(\omega, \xi) - \frac{4}{\xi_0} \frac{I_e^2(\omega, \xi)}{k_0},$$

$$\frac{I_h(\omega, \xi)}{\pi k_0^2} = \frac{1}{8} - \frac{|\xi(\omega)|^2}{4} I_h^1(\omega, \xi) - \frac{|\xi(\omega)|^2}{\xi_0} \frac{I_h^2(\omega, \xi)}{k_0}.$$

В рассмотренном пределе они упрощаются: $I_e^2(\omega, \xi) \approx k_0/12$, $I_h^2(\omega, \xi) \approx k_0/4$, $I_e(\omega, \xi) \approx \pi k_0^2 (\xi_0^{-2} + \xi_0^{-1}/6 + 1/16)$, $I_h(\omega, \xi) \approx \pi k_0^2/8$, $\Phi(\xi', \xi'') \approx \pi (\xi_0^{-2} + \xi_0^{-1}/6 + 3/16)$. В случае $\xi_0 \ll 1$ (что обычно имеет место для графена) $\Phi(\xi', \xi') \approx \pi/\xi_0^2$, и при больших частотах имеем $F(\omega, T) = 8 \varepsilon_0 \xi_0^{-1} \omega^2 / (\omega \pi)^2$.

Модель Друде предполагает постоянство частоты столкновений. Однако при больших энергиях кванта поглощение падает, а частота столкновений уменьшается. На таких частотах модель макроскопической проводимости теряет смысл. В этом случае происходит фотоионизация отдельных атомов углерода. При таких частотах средняя энергия осцилляторов поля $\Theta(\omega, T) = (\hbar\omega/2) \coth(\hbar\omega/(2k_B T))$, взаимодействующих с веществом, также теряет смысл (см. [1, стр. 17–18]). При частотах с энергией квантов в десятки ЭВ все шесть электронов атома углерода можно считать свободными, однако в таком поле с ростом частоты они колеблются во все меньшей области около атома, т. е. вероятность их рассеяния падает. Это оправдывает введение модели 2D плазменного листа с проводимостью

$$\sigma(\omega) = \frac{Ne^2}{m_e \omega_c (1 + i\omega/\omega_c(\omega))}. \quad (29)$$

Здесь $N = 2.3 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-2}$ – поверхностная плотность всех электронов в графене. Считая вклад на высоких частотах малым, можно рассматривать ограниченный спектр частот. Для исследования вопроса о сходимости интегралов полезно вводить разные модели. Например, можно считать величину ξ_0 зависящей от частоты. Модель (29) можно рассматривать как модель (28), у которой два параметра ξ_0 и ω зависят от частоты. Рассмотрим модель Друде (28) с одним частотно зависимым параметром: частотой столкновений $\omega(\omega) = \omega(0) / (1 + (\omega/\Omega)^\alpha)$, где Ω – некая характерная частота. Для графена ее можно взять в виде $\Omega = \gamma_0/\hbar$, $\gamma_0 = 2.8 \text{ эВ}$ – энергия связи [4, 5, 10]. В этом случае на больших частотах $F(\omega, T) \sim \omega^{-2(1+\alpha)}$, $F(\omega, T) \Theta(\omega, T) \sim \omega^{-(1+2\alpha)}$, что обеспечивает сходимость спектральных интегралов при вычислении корреляций.

2. Корреляции, теплопередача и дисперсионные силы между листами графена

Показано, что корреляционные соотношения для флуктуационных поверхностных токов в листе графена определяются не реальной частью поверхностной проводимости, как можно было предположить исходя из корреляционных соотношений для бесконечной 3D среды [1] и связи диэлектрической проницаемости с поверхностной проводимостью, а функцией $F(\omega, T)$ (27), имеющей размерность проводимости, в которую входят коэффициенты отражения E - и H -мод в виде $1 + R_{e,h}(\omega, \mathbf{q})$ или соответствующие им импедансы. Указанные коэффициенты приведены для пространственно-спектральных амплитуд, поэтому получение корреляционных соотношений в пространственной области требует обращения интегралов. Заметим, что в окончательные формулы работы [7] вошла не введенная в корреляционные соотношения бесконечной среды диссипация $\varepsilon''(\omega)$ (формула (1.2)), а импедансы $Z_e(\omega, q) = \sqrt{k_0^2 \varepsilon - q^2} / (k_0 \varepsilon)$, $Z_{0e}(\omega, q) = \sqrt{k_0^2 - q^2} / k_0$, $Z_h(\omega, q) = k_0 / \sqrt{k_0^2 \varepsilon - q^2}$, $Z_{0h}(\omega, q) = k_0 / \sqrt{k_0^2 - q^2}$ и связанные с ними коэффициенты отражения (для простоты предполагаем полупространства одинаковыми):

$$R_e(\omega, q) = \frac{Z_{0e}(\omega, q) - Z_e(\omega, q)}{Z_{0e}(\omega, q) + Z_e(\omega, q)} =$$

$$= \frac{\varepsilon \sqrt{k_0^2 - q^2} - \sqrt{k_0^2 \varepsilon - q^2}}{\varepsilon \sqrt{k_0^2 - q^2} + \sqrt{k_0^2 \varepsilon - q^2}},$$

$$R_h(\omega, q) = \frac{Z_{0h}(\omega, q) - Z_h(\omega, q)}{Z_{0h}(\omega, q) + Z_h(\omega, q)} =$$

$$= \frac{\sqrt{k_0^2 \varepsilon - q^2} - \sqrt{k_0^2 - q^2}}{\sqrt{k_0^2 \varepsilon - q^2} + \sqrt{k_0^2 - q^2}}.$$

Поскольку имеется бесконечная серия отражений от двух границ, указанные величины входят как суммы

$$\frac{R_{e,h}^2(\omega, q) \exp(-2id\sqrt{k_0^2 - q^2})}{1 - R_{e,h}^2(\omega, q) \exp(-2id\sqrt{k_0^2 - q^2})}.$$



Соответствующие величины следует образовывать при анализе корреляционных взаимодействий в листах графена. Для двух листов также следует определять излученную и поглощенную мощности при условии некоррелированности флуктуаций на разных листах. Для графена удобнее использовать проводимости. Коэффициенты отражения при падении на два листа, разделенные дистанцией d , имеют вид

$$R_{e,h}(\omega, q, d) = \frac{-\sigma(2Y_{e,h} + i\sigma \tan(k_z d))}{2iY_{e,h}^2 \tan(k_z d) + i\sigma(2Y_{e,h} + \sigma) \tan(k_z d) + 2Y_{e,h}(\sigma + Y_{e,h})} \quad (30)$$

Считая, что при $d = 0$ проводимости листов складываются, из (30) имеем $R_{e,h}(\omega, q, d) = -\sigma/(Y_{e,h} + \sigma)$. Определяя аналогично $T_{e,h}(\omega, q, d)$, можно найти диссипацию, вычисляя баланс $1 - |R_{e,h}(\omega, q, d)|^2 - |T_{e,h}(\omega, q, d)|^2$. Другой способ определения диссипации состоит в вычислении дифракционных токов и величин $\mathbf{j}^d \mathbf{E}^*$. Для графена при $T \rightarrow 0$ и условии $\omega_c \rightarrow 0$ имеем

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2}{4\pi\hbar} + \frac{e^2 \mu_c}{\pi\hbar^2(\omega_c + i\omega)} = \frac{e^2}{4\pi\hbar} + \frac{e^2 \mu_c (\omega_c - i\omega)}{\pi\hbar^2(\omega_c^2 + \omega^2)},$$

и в этом случае

$$\sigma'(\omega) \approx \frac{e^2}{4\pi\hbar} + \frac{e^2 \mu_c}{\hbar^2} \delta(\omega), \quad \sigma''(\omega) = -\frac{e^2 \mu_c}{\pi\hbar^2 \omega}.$$

Однако этот случай возможен только для чистого графена, т. е. при $\mu_c \rightarrow 0$.

3. Результаты

В случае если два листа графена находятся при разных температурах T_1 и T_2 на некотором расстоянии друг от друга, теплопередачу между более нагретым и менее нагретым листами можно получить согласно методу работы [11]. При этом следует вычислять вектор Пойнтинга каждого из листов при своей температуре и поглощение каждым из листов, а затем определять разность поглощенных мощностей. В качестве корреляций поверхностной плотности токов в первом приближении берем равновесные корреляции при заданных температурах.

На рис. 1 представлены результаты вычисления спектральной плотности излучения листа графена при разных температурах. На рис. 2 дана удельная взаимная спектральная передача тепла между двумя листами в ближней зоне. Это соответствует тому, что для всех частот излучения

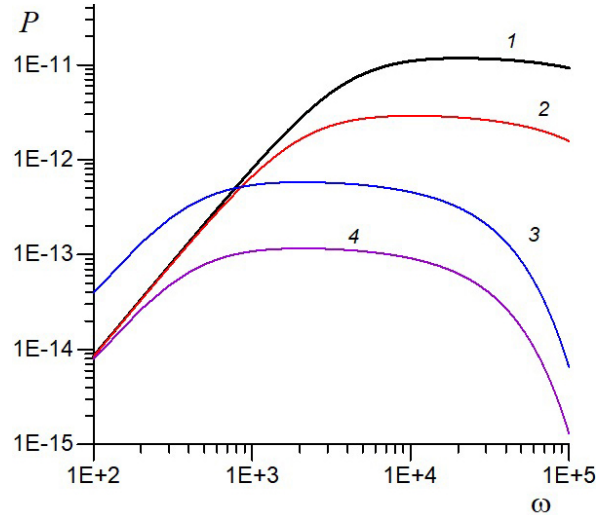


Рис. 1. Спектральная плотность излучения листа графена ($\text{Дж}/\text{м}^2$) при $\mu_c = 0.1$ эВ (кривые 1, 2, 3) и $\mu_c = 0.5$ эВ (4) при температуре $T = 300$ К (кривая 1), 150 К (2) и 30 К (3, 4)

Fig. 1. Radiation spectral density of a graphene sheet (J/m^2) at $\mu_c = 0.1$ eV (curves 1, 2, 3) and $\mu_c = 0.5$ eV (4) at temperature $T = 300$ K (curve 1), 150 K (2) and 30 K (3, 4)

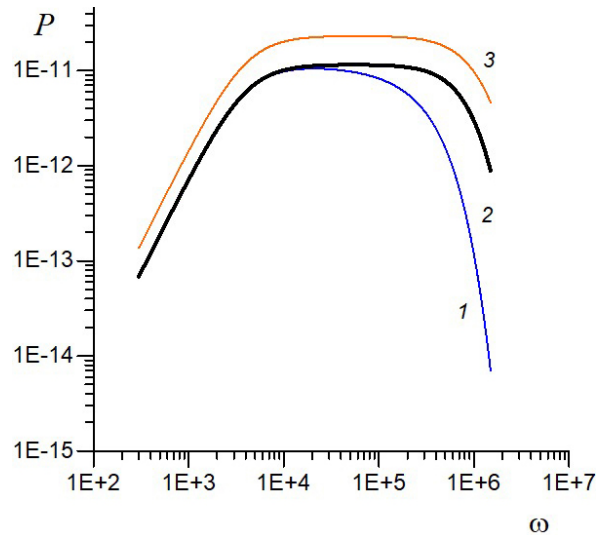


Рис. 2. Спектральная плотность радиационной теплопередачи ($\text{Дж}/\text{м}^2$) от листа графена с температурой $T = 300$ К к листу с температурой 100 К (кривая 1), 600 К (2) и 900 К (3) при $\mu_c = 0.5$ эВ, $d = 100$ нм

Fig. 2. Radiation heat transfer spectral density (J/m^2) from a graphene sheet with temperature $T = 300$ K to a sheet with temperature 100 K (curve 1), 600 K (2) and 900 K (3) at $\mu_c = 0.5$ eV, $d = 100$ nm

должно выполняться $\omega \ll c/d$, т. е. запаздыванием и взаимным переизлучением можно пренебречь. Для получения полных плотностей указанные величины следует интегрировать по частоте. Основной вклад вносят достаточно низкие частоты. На высоких частотах и особенно в оптике графен является весьма прозрачным. Полученные соотношения соответствуют



модельной задаче о бесконечных листах графена в вакууме. Реально в структурах могут присутствовать графеновые листы конечных размеров в виде чешуек, лент и других графеновых элементов. Такие элементы являются частями широко используемого материала – стеклоуглерода [12]. Для них возникают граничные условия для тока, что приводит к несколько более сложным результатам, требующим определения такого тока [13]. Для выращенного на диэлектрических подложках эпитаксиального графена излучение и поглощение 3D подложки на порядки превалирует над такими же параметрами 2D графена, чем и объясняется отдельное рассмотрение их для графена. В случае конечных графеновых элементов с поперечными размерами, превышающими расстояние между ними, полученные результаты для удельных плотностей можно применять с учетом площадей рассматриваемых структур. При расчетах использовалась зависимость частоты столкновений от температуры из [6]. Реально теплообмен неравновесный и нестационарный, что приводит к выравниванию температур. Учет нестационарности возможен, но требует интегрирования балансных уравнений во времени.

Заключение

Из принципа детального равновесия получены корреляционные соотношения для листа графена в тепловом поле. Показано, что основной вклад вносят низкочастотные флуктуации. Соотношения можно использовать для определения дисперсионных сил между листами графена в ближней и дальней волновых зонах. В ближней зоне запаздывания можно не учитывать, что определяет соответствующие характерные частоты. Для металлов и диэлектриков имеет место термическая длина $l_T = \hbar c / (2k_B T)$, на которой проявляется температурный эффект. Для комнатной температуры $l_T \sim 8$ мкм. Для графена указанный эффект проявляется на гораздо меньших дистанциях (порядка 150 нм) [14]. В случае взаимодействия графеновых фрагментов расстояние между ними должно быть существенно меньше их поперечных размеров. В противном случае следует решать электродинамическую задачу определения распределения на них плотности тока с учетом для нее граничных условий на краях фрагментов. В этом случае наряду с флуктуационными плотностями поверхностных токов следует вводить наведенные дифракционные плотности и определять их связи с корреляционными. Дифракционные плотности

связаны с многократными переотражениями взаимодействующих объектов и фактически определяют функцию Грина всей структуры. Полное поле есть сумма воздействий обоих плотностей тока. Рассматривая два таких взаимодействующих объекта в равновесии с тепловым полем, также можно получить корреляционные соотношения. В этом случае их можно непосредственно использовать для определения дисперсионных сил.

Список литературы

1. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967. 308 с.
2. Gusynin V. P., Sharapov S. G., Carbotte J. P. Sum rules for the optical and Hall conductivity in graphene // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 75. Article number 165407. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.165407>
3. Фальковский Л. А. Оптические свойства графена и полупроводников типа A_4B_6 // УФН. 2008. Т. 178, № 9. С. 923–934. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200809b.0923>
4. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // J. Appl. Phys. 2008. Vol. 103. Article number 064302. <https://doi.org/10.1063/1.2891452>
5. Lovat G., Hanson G. W., Araneo R., Burghignoli P. Semiclassical spatially dispersive intraband conductivity tensor and quantum capacitance of graphene // Phys. Rev. B. 2013. Vol. 87. Article number 115429. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.87.115429>
6. Волокитин А. И., Перссон Б. Н. Й. Влияние электрического тока на силы Казимира между графеновыми листами // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 98, № 3. С. 165–171. <https://doi.org/10.7868/S0370274X13150058>
7. Лифшиц Е. М. Теория молекулярных сил притяжения между твердыми телами // ЖЭТФ. 1955. Т. 29, № 1. С. 94–110.
8. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
9. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971. 664 с.
10. Wallace P. R. The Band Theory of Graphite // Phys. Rev. 1947. Vol. 71. P. 622–634. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.622>
11. Polder D., Van Hove M. Theory of Radiative Heat Transfer between Closely Spaced Bodies // Phys. Rev. B. 1971. Vol. 4. P. 3303–3314. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.4.3303>
12. Petrunin A. A., Slepchenkov M. M., Glukhova O. E. Effect of Functionalization with Potassium Atoms on the Electronic Properties of a 3D Glass-like Nanomaterial Reinforced with Carbon Nanotubes: In Silico Study // J. Compos. Sci. 2022. Vol. 6, № 7. Article number 186. <https://doi.org/10.3390/jcs6070186>



13. Давидович М. В. Об обращении интегродифференциального оператора тонкой линейной наноантенны и дисперсионных силах // ЖТФ. 2022. Т. 92, вып. 10. С. 1537–1555. <https://doi.org/10.1134/S106378422207012X>
14. Bimonte G., Klimchitskaya G. L., Mostepanenko V. M. How to observe the giant thermal effect in the Casimir force for graphene systems // *Phys. Rev. A*. 2017. Vol. 96. Article number 012517. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.012517>

References

1. Levin M. L., Rytov S. M. *Teoriya ravnovesnykh teplovykh fluktuatsiy v elektrodinamike* [Theory of equilibrium thermal fluctuations in electrodynamics]. Moscow, Nauka, 1967. 308 p. (in Russian).
2. Gusynin V. P., Sharapov S. G., Carbotte J. P. Sum rules for the optical and Hall conductivity in graphene. *Phys. Rev. B*, 2007, vol. 75, article no. 165407. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.165407>
3. Falkovsky L. A. Optical properties of graphene and IV–VI semiconductors. *Physics-Uspekhi*, 2008, vol. 51, no. 9, pp. 887–897. <https://doi.org/10.1070/PU2008v051n09ABEH006625>
4. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene. *J. Appl. Phys.*, 2008, vol. 103, article no. 064302. <https://doi.org/10.1063/1.2891452>
5. Lovat G., Hanson G. W., Araneo R., Burghignoli P. Semiclassical spatially dispersive intraband conductivity tensor and quantum capacitance of graphene. *Phys. Rev. B*, 2013, vol. 87, article no. 115429. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.87.115429>
6. Volokitin A. I., Persson B. N. J. Effect of the electric current on the Casimir force between graphene sheets. *Jetp Lett.*, 2013, vol. 98, pp. 143–149. <https://doi.org/10.1134/S0021364013160145>
7. Lifshitz E. The theory of molecular attractive forces between solids. *Soviet Phys.*, 1956, vol. 2, no. 1, pp. 73–83. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-036364-6.50031-4>
8. Markov G. T., Chaplin A. F. *Vozbuzhdenie elektromagnitnykh voln* [Excitation of electromagnetic waves]. Moscow, Radio i svyaz', 1983. 296 p. (in Russian).
9. Gol'dshtejn L. D., Zernov N. V. *Elektromagnitnye polya i volny* [Electromagnetic fields and waves]. Moscow, Sov. Radio, 1971. 664 p. (in Russian).
10. Wallace P. R. The Band Theory of Graphite. *Phys. Rev.*, 1947, vol. 71, pp. 622–634. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.622>
11. Polder D., Van Hove M. Theory of Radiative Heat Transfer between Closely Spaced Bodies. *Phys. Rev. B*, 1971, vol. 4, pp. 3303–3314. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.4.3303>
12. Petrunin A. A., Slepchenkov M. M., Glukhova O. E. Effect of Functionalization with Potassium Atoms on the Electronic Properties of a 3D Glass-like Nanomaterial Reinforced with Carbon Nanotubes: In Silico Study. *J. Compos. Sci.*, 2022, vol. 6, no. 7, article no. 186. <https://doi.org/10.3390/jcs6070186>
13. Davidovich M. V. On the Inversion of the Integrodifferential Operator of a Thin Linear Nanoantenna and Dispersion Forces. *Technical Physics*, 2022, vol. 67, pp. 468–486. <https://doi.org/10.1134/S106378422207012X>
14. Bimonte G., Klimchitskaya G. L., Mostepanenko V. M. How to observe the giant thermal effect in the Casimir force for graphene systems. *Phys. Rev. A*, 2017, vol. 96, article no. 012517. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.012517>

Поступила в редакцию 02.01.2023; одобрена после рецензирования 04.03.2023; принята к публикации 10.03.2023
The article was submitted 02.01.2023; approved after reviewing 04.03.2023; accepted for publication 10.03.2023