

## ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 131–140  
*Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 131–140  
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-131-140>

Научная статья  
УДК 538.955

### Динамическая восприимчивость взаимодействующих суперпарамагнитных частиц в постоянном магнитном поле

А. В. Амбаров

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия,  
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19

Амбаров Александр Васильевич, аспирант, инженер-исследователь лаборатории моделирования физико-химических процессов в многофазных средах, [alexander.ambarov@urfu.ru](mailto:alexander.ambarov@urfu.ru),  
<https://orcid.org/0000-0002-5793-4432>

**Аннотация.** Теоретически исследуется динамический отклик ансамбля взаимодействующих суперпарамагнитных частиц, находящихся в постоянном и линейно поляризованном переменном магнитных полях. Предполагается, что релаксация магнитных моментов феррочастиц происходит по неелевскому механизму, оси легкого намагничивания всех частиц сонаправлены и параллельны постоянному магнитному полю. Рассмотрены два случая взаимной ориентации переменного и постоянного магнитных полей: параллельный и перпендикулярный. Вращательное движение магнитного момента случайной феррочастицы определяется из решения уравнения Фоккера – Планка – Брауна, в которое вводится дополнительное слагаемое, позволяющее учесть межчастичные диполь-дипольные взаимодействия на уровне модифицированной теории среднего поля первого порядка. Полученные аналитические решения для плотности вероятности ориентации магнитного момента случайной частицы используются для определения динамической восприимчивости. Исследуется спектр динамической восприимчивости в зависимости от напряженности постоянного поля, параметра магнито-кристаллографической анизотропии, восприимчивости Ланжевена ансамбля феррочастиц, взаимной ориентации переменного и постоянного магнитных полей.

**Ключевые слова:** динамическая восприимчивость, плотность вероятностей, уравнение Фоккера – Планка – Брауна

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-32-90209).

**Для цитирования:** Амбаров А. В. Динамическая восприимчивость взаимодействующих суперпарамагнитных частиц в постоянном магнитном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 131–140. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-131-140>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

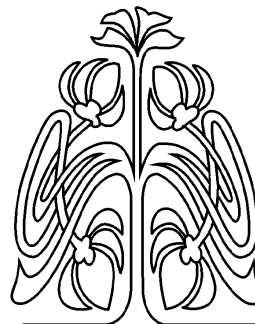
**Dynamical susceptibility of interacting superparamagnetic particles in a static magnetic field**

A. V. Ambarov

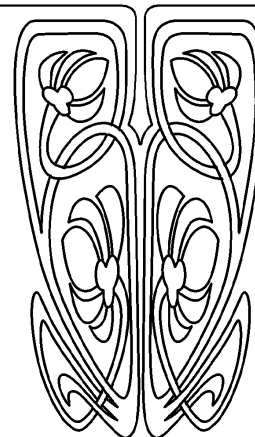
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, 19 Mira St.,  
Yekaterinburg 620002, Russia

Alexander V. Ambarov, [alexander.ambarov@urfu.ru](mailto:alexander.ambarov@urfu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-5793-4432>

© Амбаров А. В., 2022



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





**Abstract. Background and Objectives:** Embedding a large number of magnetic nanoparticles into liquid or polymer matrix makes it possible to control the properties of a composite material using an external magnetic field. Such materials, so-called magnetic soft matter, include ferrofluids, magnetic elastomers, ferrogels, and various biocompatible magnetic filling. These complex systems attract a considerable amount of interest from researchers, medics and engineers because they are actively used in progressive high industrial and biomedical technologies. The dynamical response of an ensemble of interacting superparamagnetic particles in static and linearly polarized alternating magnetic fields is theoretically investigated. **Materials and Methods:** The rotational motion of the magnetic moment of a random ferroparticle is determined from the solution of the Fokker – Planck – Brown equation, which introduces an additional term that allows us to take into account the interparticle dipole-dipole interactions at the level of the modified first-order mean field theory. **Results:** The obtained analytical solutions for the probability density of the orientation of the magnetic moment of a random particle are used to determine the dynamical susceptibility. The spectrum of dynamical susceptibility is studied as a function of the static field strength, the magneto-crystallographic anisotropy parameter, the Langevin susceptibility of the ferroparticle ensemble, and the mutual orientation of the alternating and static magnetic fields. **Conclusion:** The obtained results represent essential information in the design and synthesis of new functional materials.

**Keywords:** dynamic susceptibility, probability density, Fokker – Planck – Brown equations

**Acknowledgements:** The reported study was funded by RFBR according to the reserach project No. 20-32-90209.

**For citation:** Ambarov A. V. Dynamical susceptibility of interacting superparamagnetic particles in a static magnetic field. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 131–140 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-2-131-140>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC0-BY 4.0)

## Введение

Встраивание большого количества магнитных наночастиц в жидкую или полимерную матрицу позволяет управлять свойствами композитного материала с помощью внешнего магнитного поля [1–3]. Такие материалы, так называемые магнитомягкие вещества, включают феррожидкости, магнитные эластомеры, феррогели и различные биосовместимые магнитные наполнители. Эти сложные системы вызывают значительный интерес у исследователей, медиков и инженеров, поскольку они активно используются в прогрессивных высокотехнологичных промышленных и биомедицинских технологиях. Примеры включают доставку лекарств, герметики, теплопроводящие среды, разделительные среды, псевдооживленные слои газа, контрастные вещества для магнитного резонанса и магнитную гипертермию [4–7].

Ансамбль феррочастиц, обездвиженных в немагнитной мягкой матрице, является хорошо известной моделью полимеризованной феррожидкости, изучению свойств которой посвящены работы [8–10]. Способность управлять физическими свойствами полимеризованной феррожидкости путем приложения однородных и неоднородных магнитных полей является одной из определяющих характеристик ансамбля суперпарамагнитных частиц. В полимеризованной феррожидкости частицы неподвижны, поэтому реакция на магнитное поле возникает за счет суперпарамагнитного вращения магнитных моментов внутри частиц. Теория динамического отклика полимеризованной феррожидкости имеет дело, в первую очередь, с разбавленными

системами, в которых межчастичными взаимодействиями пренебрегают [11, 12]. Однако на отклик магнитных частиц также влияет дипольное взаимодействие [13–15]. Недавние статьи показали, что дипольное взаимодействие оказывает значительное влияние на выработку тепла при лечении магнитной гипертермией [16, 17]. Кроме того, недавно были предложены теории, описывающие динамический магнитный отклик взаимодействующих дипольных частиц в жидком носителе [18, 19]. В работе [20] были теоретически изучены ансамбли магнитных частиц с неелевским механизмом релаксации магнитного момента в слабом переменном магнитном поле, чтобы выяснить влияние дипольных взаимодействий на спектр восприимчивости. Во всех случаях предсказывается, что диполь-дипольные взаимодействия увеличивают времена релаксации магнитных моментов феррочастиц.

В данной работе основное внимание уделяется расчету динамического магнитного отклика ансамбля взаимодействующих суперпарамагнитных частиц с выровненными легкими осями намагничивания в переменном и постоянном магнитных полях. Целью данной работы является определение влияния учета взаимодействия между частицами приложенного постоянного поля, взаимного направления магнитных полей и величины магнитной анизотропии на динамическую восприимчивость и время релаксации магнитных моментов.

## 1. Модель

В данной работе исследуется магнитный отклик монодисперсного ансамбля суперпарамагнитных частиц (магнетитовые  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  частицы



размером  $\sim 10$  нм), обездвиженных в немагнитной матрице. Образец содержится в длинной цилиндрической трубке, ориентированной вдоль оси  $Oz$ . Магнитный момент отдельной частицы равен произведению намагниченности насыщения  $M_s$  магнитного материала и объема ее магнитного ядра  $V_m$ :  $m = M_s V_m$ . Ориентация каждого магнитного момента  $\mathbf{m}_i$   $i$ -й частицы описывается единичным вектором  $\hat{\mathbf{m}}_i = (\sin \theta_i \cos \varphi_i, \sin \theta_i \sin \varphi_i, \cos \theta_i)$ . Так как в данной работе рассматриваются сферические магнетитовые частицы небольшого размера, то принято считать, что магнитная анизотропия одноосная, а направление легкой оси намагничивания определяется единичным вектором  $\hat{\mathbf{n}}_i = (0, 0, 1)$ . Постоянное магнитное поле направлено вдоль оси  $Oz$ . В данной работе рассматриваются две взаимные ориентации постоянного и переменного магнитных полей.

В параллельной ориентации (рис. 1, а) магнитных полей вектор результирующего поля описывается  $\mathbf{H} = (0, 0, h_a e^{i\omega\tau} + h_c)$ , а в перпендикулярной ориентации (рис. 1, б)  $\mathbf{H} = (0, h_a e^{i\omega\tau}, h_c)$ , где  $h_a$  – амплитуда переменного поля,  $h_c$  – амплитуда постоянного поля,  $\omega$  – частота,  $\tau$  – время. Напряженность постоянного магнитного поля в данной работе варьируется от 20 до 60 кА/м, а частота переменного магнитного поля оценива-

ется  $0.55 \cdot 10^9$  Гц (оценки сделаны для комнатной температуры)

Частицы равномерно распределены и зафиксированы в некоторой нежидкой матрице, поэтому как поступательные, так и вращательные степени свободы тел частиц «заморожены». Из-за фиксации частиц броуновской релаксации (описывает вращательное движение магнитной наночастицы в носителе, при этом магнитный момент зафиксирован в кристаллографических осях) в рассматриваемой системе нет, поэтому релаксация магнитного момента  $m$  магнитной частицы проходит только по неелевскому механизму (вращение самой частицы заблокировано, вращается лишь магнитный момент внутри этой частицы). Неелевская релаксация вызвана тепловыми флуктуациями (колебаниями) энергии магнитной кристаллографической анизотропии и магнитными полями, действующими на частицу. Магнитная анизотропия характеризуется параметром магнитной анизотропии  $\sigma$  (энергетический барьер магнитной кристаллографической анизотропии). Чем больше этот параметр, тем сложнее магнитному моменту частицы отклоняться от оси легкого намагничивания. Для малых параметров анизотропии  $\sigma \ll 1$  время релаксации магнитных моментов  $\tau = \sigma \tau_0$ , для  $\sigma \gg 1$

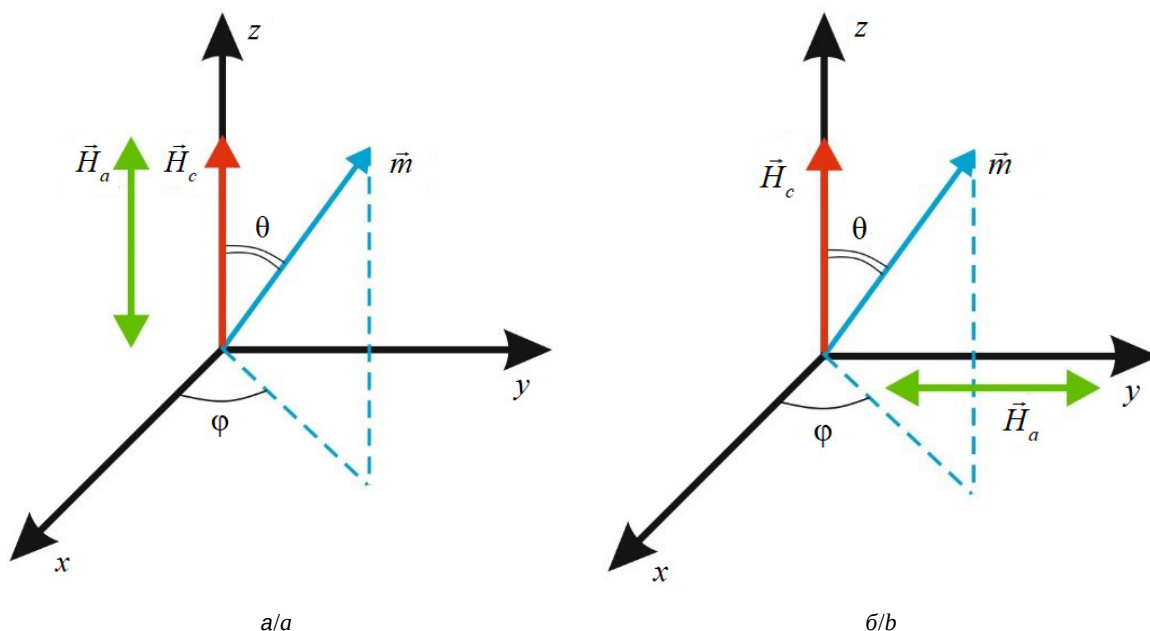


Рис. 1. Взаимная ориентация магнитных полей: а – параллельная, б – перпендикулярная ориентация магнитных полей (цвет online)

Fig. 1. Mutual orientation of magnetic fields: a – parallel orientation of magnetic fields, b – perpendicular orientation of magnetic fields (color online)



время релаксации  $\tau = \tau_0 \exp(\sigma)$  [21], где  $\tau_0 = 10^{-9} \text{ с}$ .

Ориентация магнитного момента случайно выбранной частицы (например, с номером 1) описывается полярным  $\theta_1$  и азимутальным  $\phi_1$  углами и может быть описана плотностью вероятности  $W(1) = W(t, x, \phi_1)$ ,  $x = \cos \theta_1$ , которая может быть найдена из решения уравнения Фоккера – Планка – Брауна:

$$2\tau \frac{\partial W(1)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \left( \frac{\partial W(1)}{\partial x} + W \frac{\partial U(1)}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{1-x^2} \left[ \frac{\partial^2 W(1)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial U(1)}{\partial \phi} W + \frac{\partial W(1)}{\partial \phi} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right], \quad (1)$$

где  $U(1)$  – магнитная энергия частицы с номером 1,  $\tau$  – время релаксации магнитных моментов.

Для того чтобы учесть межчастичные взаимодействия в системе, энергия  $U(1)$  представляется в виде [14]:

$$U(1) = U_H + \rho < W^{id}(2) U_{dd}(1,2) \theta(1,2) >, \quad (2)$$

где  $W^{id}(2)$  – плотность вероятности ориентации магнитного момента частицы с номером 2 в идеальном случае (без взаимодействий между частицами), функция Хевисайда  $\theta(1,2)$  обеспечивает условие непроницаемости частиц,  $< \dots >$  обозначает усреднение по всем возможным ориентациям магнитного момента частицы с номером 2,  $\rho$  – объемная концентрация,  $U_{dd}$  – потенциал диполь-дипольного взаимодействия между случайными выбранными частицами с номерами 1 и 2:

$$U_{dd}(1,2) = \frac{1}{kT} \left( 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2)}{r^3} \right),$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор частицы.

Первое слагаемое правой части (2) имеет смысл энергии взаимодействия частицы и приложенного внешнего поля и представляется как:

$$U_H = -\frac{1}{kT} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) - \sigma (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2.$$

Намагниченность  $M$  ансамбля суперпарамагнитных частиц определяется как проекция магнитного момента  $\mathbf{m}$  случайно выбранной частицы на направление магнитного поля, усредненной по всем возможным ориентациям, в качестве весовой функции используется  $W(1)$ , найденное из уравнения (1):

$$M(t) = \rho m \int (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) W(1) d\mathbf{m}. \quad (3)$$

Динамическая восприимчивость определяется как

$$\chi(\tau\omega) = \frac{\partial M(t)}{\partial h_a e^{i\omega t}}. \quad (4)$$

В данной работе теоретически исследована моносиперсная система взаимодействующих суперпарамагнитных частиц. Прямое применение этой модели к экспериментальным результатам осложняется полидисперсностью реальных феррожидкостей. Тем не менее, распространение этой модели на полидисперсный случай возможно, и это было сделано в [22].

## 2. Динамические свойства ансамбля взаимодействующих частиц

Аналитическое решение уравнения (1) может быть получено только для малого переменного поля, когда параметр Ланжевена  $\alpha_a = \frac{\hbar_a m}{kT} \ll 1$ . В нашей работе рассматривается два случая взаимной ориентации магнитных полей: параллельная (см. рис. 1, а) и перпендикулярная (см. рис. 1, б) ориентация.

### 2.1. Параллельная ориентация магнитных полей

В параллельной ориентации магнитных (см. рис. 1, а) полей магнитная энергия (2) имеет вид:

$$U(1) = -\bar{\alpha}_a e^{i\omega t} x - \sigma x^2 - \bar{\alpha}_c x, \quad (5)$$

где  $\bar{\alpha}_a = \alpha_a \left( 1 + \frac{1}{3} \chi_L Z_1^{id} \right)$ ,  $\bar{\alpha}_c = \alpha_c + C(\alpha_c, \sigma) \chi_L$ ,  $C(\alpha_c, \sigma) = \frac{\int_{-1}^1 e^{\sigma x^2 + \alpha_c x} dx}{\int_{-1}^1 e^{\sigma x^2} dx}$ ,  $\chi_L = \frac{\rho m^2}{3kT}$  – восприимчивость Ланжевена,  $Z_1^{id}$  – коэффициент ряда по полиномам Лежандра, найденный в случае, когда диполь-дипольные взаимодействия между частицами не учитываются.

Рассматриваемая система обладает цилиндрической симметрией, поэтому плотность вероятности  $W$  не зависит от угла  $\phi$ .

Уравнение Фоккера – Планка – Брауна (1) – это уравнение параболического типа в частных производных. Решение такого уравнения находится в виде разложения по собственным функциям (полиномам Лежандра) и может быть записано в следующей форме:

$$W(t, x) = W_0(x) + \alpha_a e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(x), \quad (6)$$

где  $W_0(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{\sigma x^2 + \bar{\alpha}_c x} dx} e^{\sigma x^2 + \bar{\alpha}_c x}$ .

Здесь  $W_0(x)$  – это решение уравнения (1) в статическом случае  $\left( \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \right)$ . Каждая амплитуда



$A_n$  имеет свой физический смысл, например:  $A_1$  определяет намагниченность системы,  $A_2$  определяет параллельное выравнивание магнитных моментов в системах [23].

Подставив выбранный вид решения (6) и магнитную энергию (5) в уравнение (1), используя свойство ортогональности полиномов Лежандра и линеаризуя слагаемые по  $\alpha_a$ , получим формулу, связывающую коэффициенты  $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n-1}, A_{n-2}$ :

$$\begin{aligned} & \left( 2i\omega\tau + n(n+1) - 2\sigma \frac{n(n+1)}{(2n+3)(2n-1)} \right) A_n + \\ & + 2\sigma \frac{n(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+5)} A_{n+2} - \\ & - 2\sigma \frac{n(n-1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} A_{n-2} + \bar{\alpha}_c \frac{n(n+1)}{2n+3} A_{n+1} - \\ & - \bar{\alpha}_c \frac{n(n+1)}{2n-1} A_{n-1} = K_n(\bar{\alpha}_c, \sigma), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \text{где } K_n(\bar{\alpha}_c, \sigma) = \frac{2n+1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \chi_L A_1^{id} \right) \times \\ & \times \int_{-1}^1 (2x - (1-x^2)(\bar{\alpha}_c + 2\sigma x)) W_0(x) P_n(x) dx. \end{aligned}$$

Найти первые  $A_n$  можно, решив систему из  $n$  связывающих уравнений (7). Можно ограничиться любым количеством уравнений, в нашей работе мы взяли систему из 5 уравнений (для выбранного диапазона изменяемых параметров  $\alpha_c, \sigma, \chi_L$  решение сходится).  $A_1$ , необходимый для нахождения намагниченности, можно получить методом Крамера, поделив два определителя:

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Намагниченность (см. уравнение (3)) системы взаимодействующих частиц в данном случае равна:

$$\begin{aligned} M(t) &= \rho m \int (m \cdot H) W(1) dm = \\ &= \rho m \int_0^\pi W(1) \sin \theta \cos \theta d\vartheta = \\ &= \frac{1}{3} \rho m \alpha e^{i\omega t} A_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя полученную намагниченность (8) и формулу (4), получим выражение для динамической восприимчивости:

$$\chi(\tau\omega) = \frac{\partial M(t)}{\partial H} = \frac{\partial M(t)}{\partial \alpha e^{i\omega t}} \frac{m}{kT} = \chi_L A_1.$$

## 2.2. Перпендикулярная ориентация магнитных полей

В перпендикулярной ориентации (см. рис. 1, б) магнитных полей магнитная энергия

(2) имеет вид:

$$U(1) = -\alpha e^{i\omega t} \left( 1 - \frac{1}{6} B_1^{id} \chi_L \right) \sqrt{1-x^2} \sin \varphi - \sigma x^2 - \bar{\alpha}_c x, \quad (9)$$

где  $B_1^{id}$  – коэффициент ряда по присоединенным полиномам Лежандра, найденный в случае, когда диполь-дипольные взаимодействия между частицами не учитываются.

Решение уравнения (1) может быть выражено в следующей форме:

$$W(t, x, \varphi) = W_0(x) + \alpha_a e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \varphi P_n^1(x). \quad (10)$$

Подставив выбранный вид решения (10) и магнитную энергию (9) в уравнение (1), используя свойство ортогональности полиномов Лежандра и линеаризуя слагаемые по  $\alpha_a$ , получим формулу, связывающую коэффициенты  $B_n, B_{n+1}, B_{n+2}, B_{n-1}, B_{n-2}$ :

$$\begin{aligned} & \left( 2i\omega\tau + n(n+1) + 2\sigma \frac{n^2+n-3}{(2n+3)(2n-1)} \right) B_n + \\ & + 2\sigma \frac{n(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} B_{n+2} - \\ & - 2\sigma \frac{(n-2)(n-1)(n+1)}{(2n-3)(2n-1)} B_{n-2} + \bar{\alpha}_c \frac{n(n+2)}{2n+3} B_{n+1} - \\ & - \bar{\alpha}_c \frac{(n-1)(n+1)}{2n-1} B_{n-1} = K_n(\bar{\alpha}_c, \sigma), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \text{где } K_n(\bar{\alpha}_c, \sigma) = -\frac{2n+1}{2} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \left( 1 - \frac{1}{6} B_1^{id} \chi_L \right) \times \\ & \times \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (2+x(\bar{\alpha}_c + 2\sigma x)) W_0^{id}(x) P_n^1(x) dx. \end{aligned}$$

Найти первые  $B_n$  можно, решив систему из  $n$  связывающих уравнений (11) методом Крамера:

$$B_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Намагниченность (см. уравнение (3)) системы взаимодействующих частиц в данном случае равна:

$$M(t) = \rho m \int (\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) W(1) dm = \frac{1}{3} \rho m \alpha e^{i\omega t} B_1. \quad (12)$$

Используя полученную намагниченность (12) и формулу (4), получим выражение для динамической восприимчивости:

$$\chi(\tau\omega) = \frac{\partial M(t)}{\partial H} = \frac{\partial M(t)}{\partial \alpha e^{i\omega t}} \frac{m}{kT} = \chi_L B_1.$$

## 3. Результаты

Спектры динамической восприимчивости (действительная (а) и мнимая (б) часть) в зависи-



мости от частоты переменного магнитного поля для систем с различными параметрами Ланжевена постоянного магнитного поля  $\alpha_c = 0, 1, 2, 3$  и параметром анизотропии  $\sigma = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$  в случае параллельной ориентации магнитных полей приведены на рис. 2.

При увеличении параметра Ланжевена  $\alpha_c$  магнитный отклик системы на переменное поле уменьшается, сдвиг мнимой части в область более высоких частот означает уменьшение времени релаксации (с  $1.11 \cdot 10^{-9}$  с до  $0.5 \cdot 10^{-9}$  с).

На рис. 3 изображены графики динамической восприимчивости для большего параметра

магнитной анизотропии  $\sigma = 3$ . Увеличение этого параметра приводит к увеличению магнитного отклика и времени релаксации системы (с  $100 \times 10^{-9}$  с до  $20 \cdot 10^{-9}$  с) по сравнению с системой с параметром магнитной анизотропии  $\sigma = 1$ .

Влияние межчастичных взаимодействий продемонстрировано на рис. 4, 5. Графики динамической восприимчивости построены при параметре Ланжевена  $\alpha_c = 1$  и восприимчивости Ланжевена  $\chi_L = 0.419$ . Для параметра магнитной анизотропии  $\sigma = 0$  расчёты сравнивались с результатами компьютерного моделирования [19]. На рис. 4 представлен параллельный случай

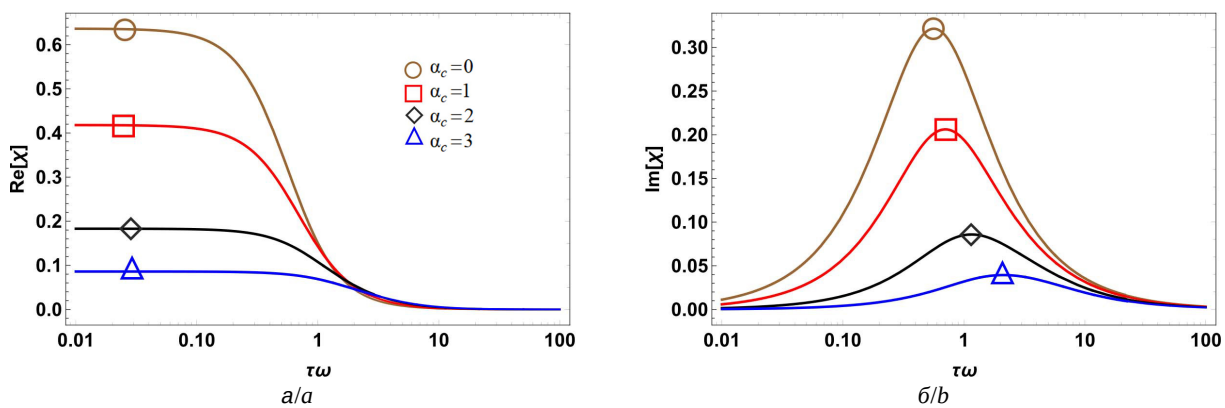


Рис. 2. Спектр динамической восприимчивости ансамбля взаимодействующих феррочастиц для различных значений  $\alpha_c$  в случае, когда оси легкого намагничивания, постоянное и переменное магнитные поля направлены параллельно друг другу. Параметр анизотропии  $\sigma = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$ :  $a$  – действительная часть магнитной восприимчивости,  $b$  – мнимая часть магнитной восприимчивости (цвет online)

Fig. 2. Spectrum of the dynamical susceptibility of an ensemble of interacting ferroparticles for different values of  $\alpha_c$  in the case when the axes of light magnetization, the constant and alternating magnetic fields are directed parallel to each other. The anisotropy parameter  $\sigma = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$ :  $a$  – the real part of the magnetic susceptibility,  $b$  – the imaginary part of the magnetic susceptibility (color online)

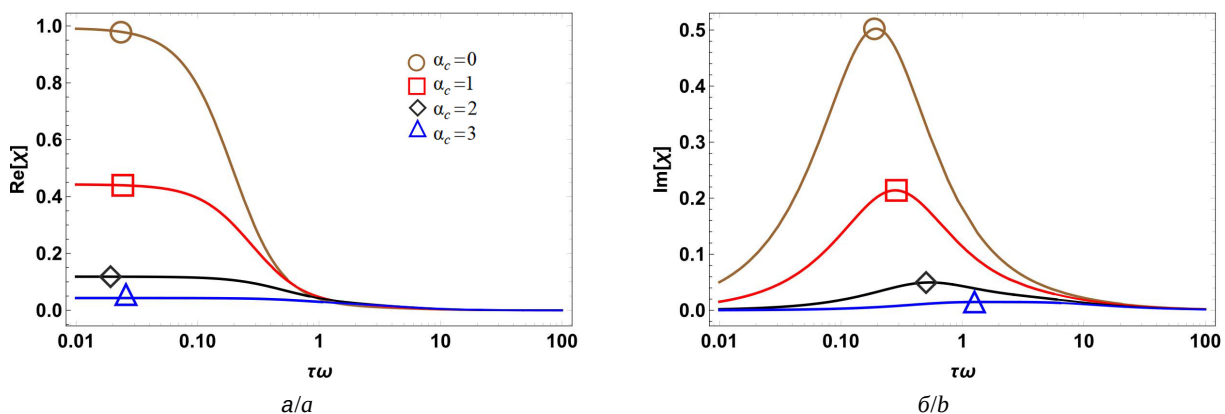


Рис. 3. Спектр динамической восприимчивости ансамбля взаимодействующих феррочастиц для различных значений  $\alpha_c$  в случае, когда оси легкого намагничивания, постоянное и переменное магнитные поля направлены параллельно друг другу. Параметр анизотропии  $\sigma = 3$ ;  $\chi_L = 0.419$ :  $a$  – действительная часть магнитной восприимчивости,  $b$  – мнимая часть магнитной восприимчивости (цвет online)

Fig. 3. Spectrum of the dynamical susceptibility of an ensemble of interacting ferroparticles for different values of  $\alpha_c$  in the case when the axes of light magnetization, the constant and alternating magnetic fields are directed parallel to each other. The anisotropy parameter  $\sigma = 3$ ;  $\chi_L = 0.419$ :  $a$  – the real part of the magnetic susceptibility,  $b$  – the imaginary part of the magnetic susceptibility (color online)



ориентации магнитных полей, на рис. 5 – перпендикулярный.

В параллельном случае (см. рис. 4) увеличение параметра магнитной анизотропии  $\sigma$  приводит к увеличению магнитного отклика и времени релаксации (с  $3.3 \cdot 10^{-9}$  с до  $20 \cdot 10^{-9}$  с). Учет диполь-дипольных взаимодействий при малых параметрах анизотропии ( $\sigma = 0$  и  $\sigma = 1$ ) приводит к увеличению магнитного отклика, а при достаточно больших ( $\sigma = 2$  и  $\sigma = 3$ ) в системе без учета взаимодействий магнитный отклик больше.

Это свидетельствует о том, что, когда энергетический барьер магнитной анизотропии достаточно сильный и действует постоянное магнитное поле, появляются корреляции «голова – хвост». Данный эффект также был получен в работе [18].

В перпендикулярном случае (см. рис. 5) увеличение параметра магнитной анизотропии  $\sigma$  приводит к уменьшению магнитного отклика и времени релаксации (с  $1 \cdot 10^{-9}$  с до  $0.5 \cdot 10^{-9}$  с).

На рис. 6 представлены графики динамической восприимчивости для системы, находящей-

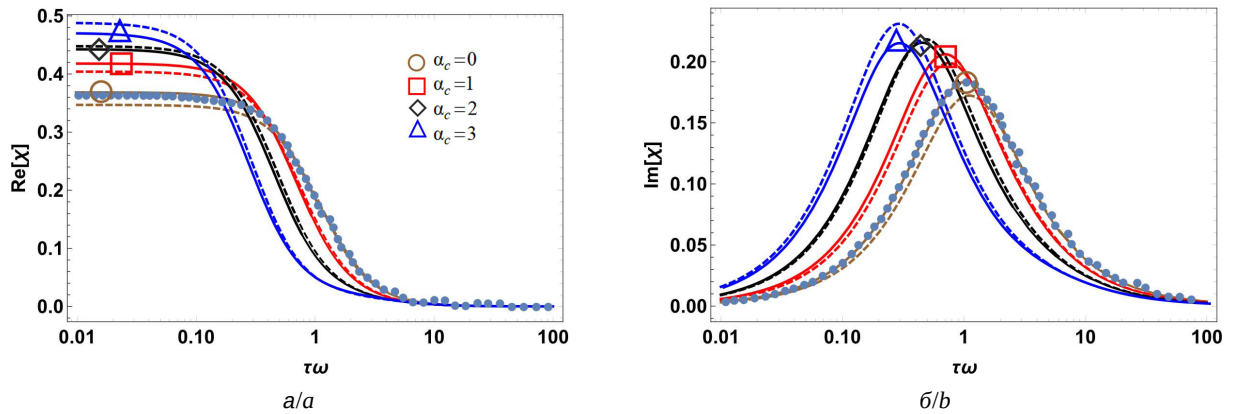


Рис. 4. Спектр динамической восприимчивости ансамбля взаимодействующих феррочастиц для различных значений  $\sigma$  в случае, когда оси легкого намагничивания, постоянное и переменное магнитные поля направлены параллельно друг другу. Параметр Ланжевена постоянного поля  $\alpha_c = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$ . Сплошные линии – с учетом взаимодействия, пунктирная линия – без взаимодействия, точки – компьютерное моделирование [19]: а – действительная часть магнитной восприимчивости, б – мнимая часть магнитной восприимчивости (цвет online)

Fig. 4. Spectrum of the dynamical susceptibility of an ensemble of interacting ferroparticles for different values of  $\sigma$  in the case when the axes of light magnetization, the constant and alternating magnetic fields are directed parallel to each other. The Langevin parameter of the constant field  $\alpha_c = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$ . Solid lines-taking into account the interaction, the dotted line-without interaction, points-computer modeling [19]: а – the real part of the magnetic susceptibility, б – the imaginary part of the magnetic susceptibility (color online)

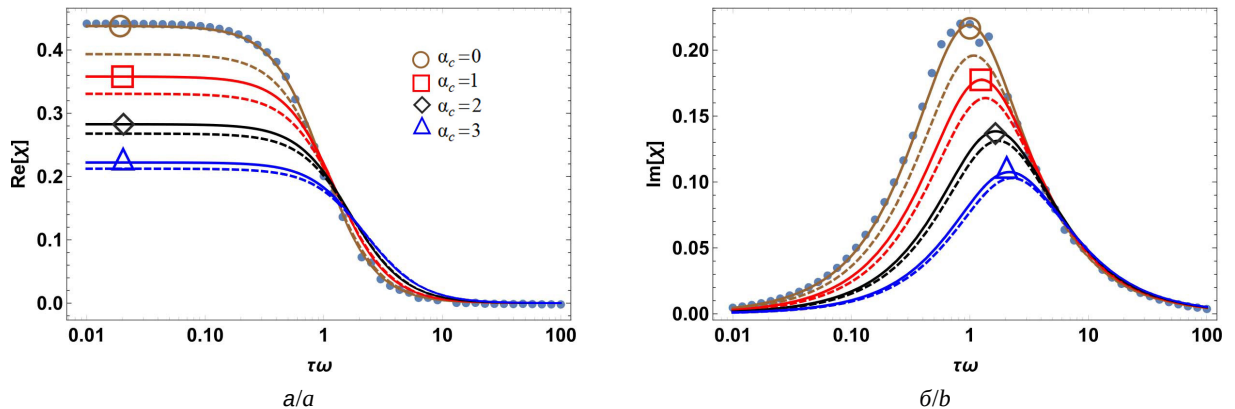


Рис. 5. Спектр динамической восприимчивости ансамбля взаимодействующих феррочастиц для различных значений  $\sigma$  в случае, когда постоянное и переменное магнитные поля перпендикулярны друг другу. Параметр Ланжевена постоянного поля  $\alpha_c = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$ . Сплошные линии – с учетом взаимодействия, пунктирная линия – без взаимодействия, точки – компьютерное моделирование [19]: а – действительная часть магнитной восприимчивости, б – мнимая часть магнитной восприимчивости (цвет online)

Fig. 5. Spectrum of the dynamical susceptibility of an ensemble of interacting ferroparticles for different values of  $\sigma$  in the case when the constant and alternating magnetic fields are perpendicular to each other. The Langevin parameter of the constant field  $\alpha_c = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$ . Solid lines-taking into account the interaction, the dotted line-without interaction, points-computer modeling [19]: а – the real part of the magnetic susceptibility, б – the imaginary part of the magnetic susceptibility (color online)



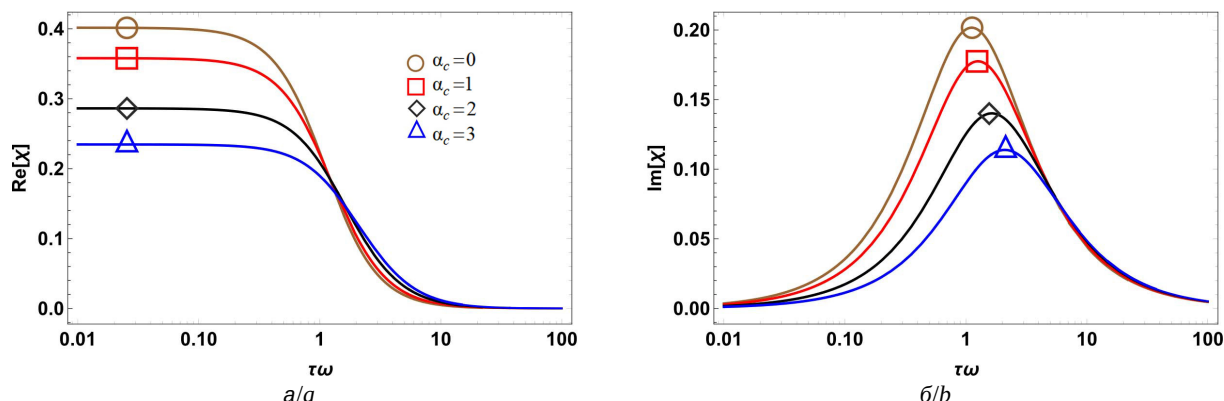


Рис. 6. Спектр динамической восприимчивости ансамбля взаимодействующих феррочастиц для различных значений  $\alpha_c$  в случае, когда постоянное и переменное магнитные поля перпендикулярны друг другу. Параметр анизотропии  $\sigma = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$ :  $a$  – действительная часть магнитной восприимчивости,  $b$  – мнимая часть магнитной восприимчивости (цвет online)

Fig. 6. Spectrum of the dynamical susceptibility of an ensemble of interacting ferroparticles for different values of  $\alpha_c$  in the case when the constant and alternating magnetic fields are perpendicular to each other. The anisotropy parameter  $\sigma = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$ :  $a$  – the real part of the magnetic susceptibility,  $b$  – the imaginary part of the magnetic susceptibility (color online)

ся под влиянием магнитных полей с перпендикулярной взаимной ориентацией, при различных значениях  $\alpha_c$ ,  $\sigma = 1$ ;  $\chi_L = 0.419$ . В сравнении с рис. 2 можно сделать вывод, что в перпендикулярной конфигурации полей магнитный отклик меньше, но при увеличении интенсивности постоянного поля магнитный отклик уменьшается не настолько значительно, как в параллельном случае (см. рис. 2). Время релаксации с увеличением интенсивности постоянного поля уменьшается (с  $1 \cdot 10^{-9}$  с до  $0.25 \cdot 10^{-9}$  с).

### Заключение

Теоретически исследован динамический магнитный отклик ансамбля неподвижных суперпарамагнитных частиц на внешнее переменное магнитное поле с учетом межчастичного диполь-дипольного взаимодействия в рамках модифицированного подхода среднего поля первого порядка [14]. Учет межчастичных корреляций приводит к увеличению магнитного отклика и времени релаксации ансамбля взаимодействующих суперпарамагнитных частиц, находящихся в постоянном и линейно поляризованном переменном магнитных полях. Но в параллельной конфигурации полей и при достаточно большом параметре магнитной анизотропии ( $\sigma = 2$  и  $\sigma = 3$ ) появляются корреляции «голова – хвост». Данный эффект дает обратный результат: учет взаимодействия уменьшает магнитный отклик. Модель, учитывающая межчастичные взаимодействия, позволяет исследовать концентрированные системы магнитных частиц.

С ростом интенсивности постоянного поля магнитный отклик уменьшается при малых частотах переменного поля для любой рассмотренной взаимной ориентации постоянного и переменного магнитных полей.

В перпендикулярной конфигурации полей, эффекты, связанные с изменением описанных выше характеристик спектра восприимчивости, выражены слабее. Это обусловлено в большей мере тем, что ось легкого намагничивания параллельна направлению постоянного магнитного поля.

Полученные результаты представляют собой важную информацию при проектировании и синтезе новых функциональных материалов.

### Список литературы

1. Benassi A. Dynamics of mobile interacting ferromagnetic films : Theory and numerical implementation // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. 2014. Vol. 22, iss. 2. Article number 025004. <https://doi.org/10.1088/0965-0393%2F22%2F2%2F025004>
2. Novikau I., Sanchez P., Kantorovich S. The influence of an applied magnetic field on the self-assembly of magnetic nanogels // Journal of Molecular Liquids. 2020. Vol. 307. Article number 112902. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2020.112902>
3. Becker T., Bohm V. Chavez Vega J., Odenbach S., Raikher Y., Zimmermann K. Magnetic-field-controlled mechanical behavior of magneto-sensitive elastomers in applications for actuator and sensor systems // Archive of Applied Mechanics. 2019. Vol. 89. P. 133–152. <https://doi.org/10.1007/S00419-018-1477-4>





4. Lopez-Lopez M. T., Rodriguez I. A., Rodriguez-Arco L., Carriel V., Bonhome-Espinosa A. B., Campos F., Zubarev A., Duran J. D. G. Synthesis, characterization and in vivo evaluation of biocompatible ferrogels // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2017. Vol. 431. P. 110–114. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.08.053>
5. Sanchez L. M., Alvarez V. A., Gonzalez J. S. Ferrogels : Smart materials for biomedical and remediation applications // *Handbook of Composites from Renewable Materials* / eds. V. K. Trakur, M. K. Trakur, M. R. Kessler. John Wiley & Sons, 2017. Vol. 8. Chapter 21. P. 561–579. <https://doi.org/10.1002/9781119441632.ch168>
6. Borin D., Stepanov G., Mikhailov V., Gorbunov A. The damping device based on magnetoactive elastomer // *Magnetohydrodynamics*. 2007. Vol. 43, iss. 4. P. 437–443. <https://doi.org/10.22364/mhd>
7. Becker T. I., Raikher Y. L., Stolbov O. V., Bohm V., Zimmermann K. Dynamic properties of magneto-sensitive elastomer cantilevers as adaptive sensor elements // *Smart Materials and Structures*. 2017. Vol. 26, iss. 9. Article number 095035. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aa75ec>
8. Martinet A. Biréfringence et dichroïsme linéaire des ferrofluides sous champ magnétique // *Rheologica Acta*. 1974. Vol. 13. P. 260–264. <https://doi.org/10.1007/BF01520886>
9. Bentivegna F., Ferré J., Nývlt M., Jamet J. P., Imhoff D., Canva M., Brun A., Veillet P., Višňovský Š., Chaput F., Boilot J. Magnetically textured nanoparticles in a silica gel matrix : Structural and magnetic properties // *Journal of Applied Physics*. 1998. Vol. 83. P. 7776–7788. <https://doi.org/10.1063/1.367952>
10. Becker T., Bohm V., Chavez J. Vega, Odenbach S., Raikher Y., Zimmermann K. Magnetic-field-controlled mechanical behavior of magneto-sensitive elastomers in applications for actuator and sensor systems // *Archive of Applied Mechanics*. 2019. Vol. 89. P. 133–152. <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1477-4>
11. Raikher Y. L., Shliomis M. I. The effective field method in the orientational kinetics of magnetic fluids // *Adv. Chem. Phys.* 1994. Vol. 87. P. 595–751. <https://doi.org/10.1002/9780470141465.ch8>
12. Raikher Y. L., Stepanov V. I. Theory of magneto-inductive hyperthermia under a rotating field // *AIP Conf. Proc.* 2010. Vol. 1311. P. 298–304. <https://doi.org/10.1063/1.3530030>
13. Lebedev A. V., Stepanov V. I., Kuznetsov A. A., Ivanov A. O., Pshenichnikov A. F. Dynamic susceptibility of a concentrated ferrofluid : The role of interparticle interactions // *Physical Review E*. 2019. Vol. 100, iss. 3. Article number 032605. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032605>
14. Ivanov A. O., Zverev V. S., Kantorovich S. S. Revealing the signature of dipolar interactions in dynamic spectra of polydisperse magnetic nanoparticles // *Soft Matter*. 2016. Vol. 12, iss. 15. P. 3507–3513. <https://doi.org/10.1039/C5SM02679B>
15. Sindt J. O., Camp P. J., Kantorovich S. S., Elfimova E. A., Ivanov A. O. Influence of dipolar interactions on the magnetic susceptibility spectra of ferrofluids // *Physical Review E*. 2016. Vol. 93, iss. 6. Article number 063117. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.063117>
16. Zubarev A. Y., Iskakova L. Y., Abu-Bakr A. F. Magnetic hyperthermia in solid magnetic colloids // *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*. 2017. Vol. 467. P. 59–66. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.10.045>
17. Zubarev A. Magnetic hyperthermia in a system of ferro-magnetic particles, frozen in a carrier medium : Effect of interparticle interactions // *Physical Review E*. 2018. Vol. 98, iss. 3. Article number 032610. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.032610>
18. Batrudinov T. M., Nekhoroshkova Y. E., Paramonov E. I., Zverev A. O., Elfimova E. A., Ivanov A. O., Camp P. J. Dynamic magnetic response of a ferrofluid in a static uniform magnetic field // *Physical Review E*. 2018. Vol. 98, iss. 5. Article number 052602. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.052602>
19. Ivanov A. O., Camp P. J. Theory of the dynamic magnetic susceptibility of ferrofluids // *Physical Review E*. 2018. Vol. 98, iss. 5. Article number 050602. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.050602>
20. Ambarov A. V., Zverev V. S., Elfimova E. A. Dynamic response of interacting superparamagnetic particles with aligned easy magnetization axes // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2020. Vol. 497. Article number 166010. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2019.166010>
21. Brown W. F. Thermal fluctuations of a single-domain particle // *Physical Review*. 1963. Vol. 130, iss. 5. P. 1677–1686. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.1677>
22. Ivanov A. O., Kantorovich S. S., Zverev V. S., Elfimova E. A., Lebedev A. V., Pshenichnikov A. F. Temperature-dependent dynamic correlations in suspensions of magnetic nanoparticles in a broad range of concentrations : A combined experimental and theoretical study // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2016. Vol. 18, iss. 27. P. 18342–18352. <https://doi.org/10.1039/C6CP02793H>
23. Solovyova A. Yu., Elfimova E. A., Ivanov A. O. Magnetic properties of textured ferrocomposite consisting of immobilized superparamagnetic nanoparticles // *Physical Review E*. 2021. Vol. 104, iss. 6. Article number 064616. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.064616>

## References

1. Benassi A. Dynamics of mobile interacting ferromagnetic films : Theory and numerical implementation. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2014, vol. 22, iss. 2, article no. 025004. <https://doi.org/10.1088/0965-0393%2F22%2F2%2F025004>
2. Novikau I., Sanchez P., Kantorovich S. The influence of an applied magnetic field on the self-assembly of magnetic nanogels. *Journal of Molecular Liquids*, 2020, vol. 307, article no. 112902. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2020.112902>
3. Becker T., Bohm V. Chavez Vega J., Odenbach S., Raikher Y., Zimmermann K. Magnetic-field-controlled



- mechanical behavior of magneto-sensitive elastomers in applications for actuator and sensor systems. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, vol. 89, pp. 133–152. <https://doi.org/10.1007/S00419-018-1477-4>
4. Lopez-Lopez M. T., Rodriguez I. A., Rodriguez-Arco L., Carriel V., Bonhome-Espinosa A. B., Campos F., Zubarev A., Duran J. D. G. Synthesis, characterization and in vivo evaluation of biocompatible ferrogels. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2017, vol. 431, pp. 110–114. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.08.053>
  5. Sanchez L. M., Alvarez V. A., Gonzalez J. S. Ferrogels : Smart materials for biomedical and remediation applications. In: V. K. Trakur, M. K. Trakur, M. R. Kessler, eds. *Handbook of Composites from Renewable Materials*. John Wiley & Sons, 2017, vol. 8, chapter 21, pp. 561–579. <https://doi.org/10.1002/9781119441632.ch168>
  6. Borin D., Stepanov G., Mikhailov V., Gorbunov A. The damping device based on magnetoactive elastomer. *Magnetohydrodynamics*, 2007, vol. 43, iss. 4, pp. 437–443. <https://doi.org/10.22364/mhd>
  7. Becker T. I., Raikher Y. L., Stolbov O. V., Bohm V., Zimmermann K. Dynamic properties of magneto-sensitive elastomer cantilevers as adaptive sensor elements. *Smart Materials and Structures*, 2017, vol. 26, iss. 9, article no. 095035. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aa75ec>
  8. Martinet A. Biréfringence et dichroïsme linéaire des ferrofluides sous champ magnétique. *Rheologica Acta*, 1974, vol. 13, pp. 260–264. <https://doi.org/10.1007/BF01520886>
  9. Bentivegna F., Ferré J., Nývlt M., Jamet J. P., Imhoff D., Canva M., Brun A., Veillet P., Višňovský Š., Chaput F., Boilot J. Magnetically textured nanoparticles in a silica gel matrix : Structural and magnetic properties. *Journal of Applied Physics*, 1998, vol. 83, pp. 7776–7788. <https://doi.org/10.1063/1.367952>
  10. Becker T., Bohm V., Chavez J. Vega, Odenbach S., Raikher Y., Zimmermann K. Magnetic-field-controlled mechanical behavior of magneto-sensitive elastomers in applications for actuator and sensor systems. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, vol. 89, p. 133–152. <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1477-4>
  11. Raikher Y. L., Shliomis M. I. The effective field method in the orientational kinetics of magnetic fluids. *Adv. Chem. Phys.*, 1994, vol. 87, pp. 595–751. <https://doi.org/10.1002/9780470141465.ch8>
  12. Raikher Y. L., Stepanov V. I. Theory of magneto-inductive hyperthermia under a rotating field. *AIP Conf. Proc.*, 2010, vol. 1311, pp. 298–304. <https://doi.org/10.1063/1.3530030>
  13. Lebedev A. V., Stepanov V. I., Kuznetsov A. A., Ivanov A. O., Pshenichnikov A. F. Dynamic susceptibility of a concentrated ferrofluid : The role of interparticle interactions. *Physical Review E*, 2019, vol. 100, iss. 3, article no. 032605. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032605>
  14. Ivanov A. O., Zverev V. S., Kantorovich S. S. Revealing the signature of dipolar interactions in dynamic spectra of polydisperse magnetic nanoparticles. *Soft Matter*, 2016, vol. 12, iss. 15, pp. 3507–3513. <https://doi.org/10.1039/C5SM02679B>
  15. Sindt J. O., Camp P. J., Kantorovich S. S., Elfimova E. A., Ivanov A. O. Influence of dipolar interactions on the magnetic susceptibility spectra of ferrofluids. *Physical Review E*, 2016, vol. 93, iss. 6, article no. 063117. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.063117>
  16. Zubarev A. Y., Iskakova L. Y., Abu-Bakr A. F. Magnetic hyperthermia in solid magnetic colloids. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 2017, vol. 467, pp. 59–66. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.10.045>
  17. Zubarev A. Magnetic hyperthermia in a system of ferromagnetic particles, frozen in a carrier medium : Effect of interparticle interactions. *Physical Review E*, 2018, vol. 98, iss. 3, article no. 032610. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.032610>
  18. Batrudinov T. M., Nekhoroshkova Y. E., Paramonov E. I., Zverev A. O., Elfimova E. A., Ivanov A. O., Camp P. J. Dynamic magnetic response of a ferrofluid in a static uniform magnetic field. *Physical Review E*, 2018, vol. 98, iss. 5, article no. 052602. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.052602>
  19. Ivanov A. O., Camp P. J. Theory of the dynamic magnetic susceptibility of ferrofluids. *Physical Review E*, 2018, vol. 98, iss. 5, article no. 050602. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.050602>
  20. Ambarov A. V., Zverev V. S., Elfimova E. A. Dynamic response of interacting superparamagnetic particles with aligned easy magnetization axes. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2020, vol. 497, article no. 166010. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2019.166010>
  21. Brown W. F. Thermal fluctuations of a single-domain particle. *Physical Review*, 1963, vol. 130, iss. 5, pp. 1677–1686. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.1677>
  22. Ivanov A. O., Kantorovich S. S., Zverev V. S., Elfimova E. A., Lebedev A. V., Pshenichnikov A. F. Temperature-dependent dynamic correlations in suspensions of magnetic nanoparticles in a broad range of concentrations : a combined experimental and theoretical study. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2016, vol. 18, iss. 27, pp. 18342–18352. <https://doi.org/10.1039/C6CP02793H>
  23. Solovyova A. Yu., Elfimova E. A., Ivanov A. O. Magnetic properties of textured ferrocomposite consisting of immobilized superparamagnetic nanoparticles. *Physical Review E*, 2021, vol. 104, iss. 6, article no. 064616. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.064616>

Поступила в редакцию 12.09.2021; одобрена после рецензирования 22.01.2022; принята к публикации 10.03.2022  
The article was submitted 12.09.2021; approved after reviewing 22.01.2022; accepted for publication 10.03.2022