



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 111–122  
*Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 111–122  
<https://fizika.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-2-111-122>

Научная статья  
УДК 534-13



## Уравнения колебаний газа в канале кольцевого сечения с продольным градиентом температур

Г. В. Воротников, Е. А. Зиновьев, С. О. Некрасова<sup>✉</sup>

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия, 443086, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Воротников Геннадий Викторович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра газодинамических исследований НОЦ ГДИ-209, [vorotnikov.g.v@mail.ru](mailto:vorotnikov.g.v@mail.ru)

Зиновьев Евгений Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Научно-образовательного центра газодинамических исследований НОЦ ГДИ-209, [eazinovyev@gmail.com](mailto:eazinovyev@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-5165-0324>

Некрасова Светлана Олеговна, кандидат технических наук, доцент кафедры теплотехники и тепловых двигателей, [nekrasova.so@ssau.ru](mailto:nekrasova.so@ssau.ru), <https://orcid.org/0000-0002-3658-4795>

**Аннотация.** При выборе конструктивно-компоновочной схемы термоакустического преобразователя к особым требованиям относят размещение теплообменников в зонах подвода и отвода тепла. Наиболее перспективными в этом плане являются коаксиальные схемы с соосным расположением (труба в трубе) каналов акустического тракта. Такие конструктивные особенности ставят свои оптимизационные задачи. Для их решения необходимо выявить особенности изменения динамических параметров осциллирующего газа в условиях акустической волны. В представленной работе получено линейное дифференциальное уравнение второго порядка для осцилляций давления в канале кольцевого сечения при наличии постоянного продольного температурного градиента на основании линеаризованных уравнений механики сжимаемой среды, которое не зависит от других динамических параметров. Решение уравнения позволяет представить выражения динамических параметров колебаний газа, таких как скорость, плотность, температура, как функции динамического давления. Показано, что полученное уравнение является более общим случаем уравнения Ротта, полученного для канала круглого сечения при тех же условиях. Уравнения динамических параметров, полученные в данной работе, применяются к измерениям распределения акустической мощности в термоакустическом преобразователе и позволяют моделировать линейные акустические процессы в коаксиальных каналах термоакустических устройств.

**Ключевые слова:** волновое уравнение, кольцевой канал, градиент температуры, осевая скорость, акустическое перемещение газа

**Благодарности:** Результаты работы получены с использованием оборудования центра коллективного пользования «МЕЖКАФЕДРАЛЬНЫЙ УЧЕБНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР САМ-ТЕХНОЛОГИЙ» при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № FSSS-2020–0019).

**Для цитирования:** Воротников Г. В., Зиновьев Е. А., Некрасова С. О. Уравнения колебаний газа в канале кольцевого сечения с продольным градиентом температур // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 111–122. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-2-111-122>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

### Gas oscillations in an annular channel induced by a longitudinal temperature gradient

G. V. Vorotnikov, E. A. Zinovyev, S. O. Nekrasova<sup>✉</sup>

Samara National Research University named after Academician S. P. Korolev, 34 Moskovskoye Shosse, Samara 443086, Russia

Gennady V. Vorotnikov, [vorotnikov.g.v@mail.ru](mailto:vorotnikov.g.v@mail.ru)

Evgeniy A. Zinovyev, [eazinovyev@gmail.com](mailto:eazinovyev@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-5165-0324>

Svetlana O. Nekrasova, [nekrasova.so@ssau.ru](mailto:nekrasova.so@ssau.ru), <https://orcid.org/0000-0002-3658-4795>

**Abstract. Background and Objectives:** When selecting the design and layout scheme of the thermoacoustic converter, special requirements include the placement of heat exchangers in the areas of heat input and output. The most promising in this regard are coaxial schemes with coaxial location (tube in tube) of the acoustic pathway channels. Such design features pose their own optimization problems. To solve them, it is necessary to reveal the peculiarities of changing the dynamical parameters of oscillating gas under acoustic wave conditions. **Materials and Methods:** In this paper we derive a second-order linear differential equation for pressure oscillations in the annular section channel in the presence of a constant longitudinal temperature gradient based on linearized equations of compressible medium mechanics, which does not depend on other dynamical parameters. The solutions are expressed in terms of two dimensionless parameters  $h/\delta_{L1}$ ;  $h$  and  $\delta_{L1}$  represent,



respectively, half the distance between two concentric channels and a characteristic length using the dynamical viscosity of the gas and the angular frequency of acoustic oscillations. **Results:** The solution of the equation makes it possible to present expressions for the dynamical parameters of gas oscillations, such as velocity, density, temperature, as functions of the dynamical pressure. **Conclusion:** It has been shown that the derived equation is a more general case of the Rott equation obtained for a circular section channel under the same conditions. The dynamical parameter equations derived in this paper are applied to measurements of the acoustic power distribution in a thermoacoustic transducer and make it possible to simulate linear acoustic processes in coaxial channels of thermoacoustic devices.

**Keywords:** wave equation, annular channel, temperature gradient, axial velocity, acoustic gas displacement

**Acknowledgments:** The results of the work were obtained using the equipment of the Center of collective use "Intercafederal Scientific and Research Center of CAM-TECHNOLOGIES" with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FSSS-2020-0019).

**For citation:** Vorotnikov G. V., Zinovyev E. A., Nekrasova S. O. Gas oscillations in an annular channel induced by a longitudinal temperature gradient. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 111–122 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2022-22-111-122>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC0-BY 4.0)

## Введение

Термоакустический двигатель (ТАД) (рис. 1) условно можно рассматривать как устройство, состоящее из двух принципиальных узлов: теплового узла (3–5), генерирующего акустическую мощность за счёт подводимого тепла, и акустических трактов, согласующих нагрузку с тепловым узлом и доставляющих акустическую мощность к нагрузке.

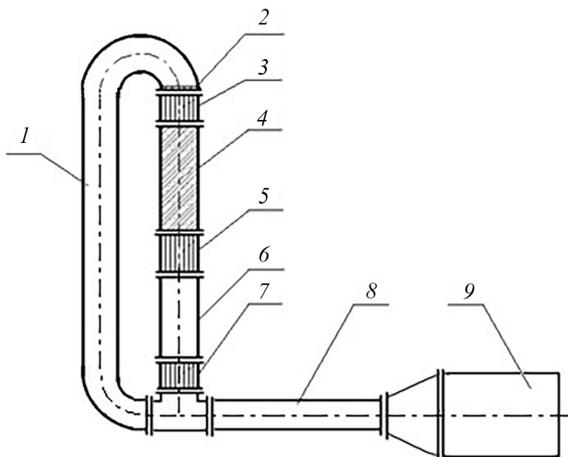


Рис. 1. Схема термоакустического двигателя: 1 – инерционная труба; 2 – супрессор; 3 – холодный теплообменник; 4 – регенератор; 5 – горячий теплообменник; 6 – термическая буферная труба; 7 – холодный теплообменник; 8 – узкая труба резонатора; 9 – широкая труба резонатора

Fig. 1. Schematic diagram of the thermoacoustic engine: 1 – inertial tube; 2 – suppressor; 3 – cold heat exchanger; 4 – regenerator; 5 – hot heat exchanger; 6 – thermal buffer tube; 7 – cold heat exchanger; 8 – narrow resonator tube; 9 – wide resonator tube

ТАД привлекательны прежде всего тем, что имеют минимум подвижных механических частей, что увеличивает срок их эксплуатации и снижает затраты на изготовление по сравнению с механическими аналогами [1, 2]. Высокорекурсивные ТАД с КПД порядка 28–34% [3] могут

применяться даже в системах энергоснабжения космических аппаратов для исследования как ближнего, так и дальнего космоса [4, 5].

Хотя принцип работы ТАД хорошо изучен и описан [6], для широкого распространения данные устройства требуют снижения габаритов и разработки компактных и удобных в компоновке решений. Одним из вариантов снижения массово-габаритных показателей термоакустических преобразователей (ТАП) является представление части акустических трактов в коаксиальной компоновке. Если рассматривать существующие конструкции термоакустических двигателей, то вполне очевидно, что коаксиальная схема (рис. 2, з) [7, 8] в отличие от традиционных схем (рис. 2, а, б, в) [9–11] определяет следующие преимущества: локализуется всего одна «горячая» и одна «холодная» зоны вместо трех; уменьшаются перетечки тепла по стенкам [12]; массовый выигрыш осуществляется не только за счёт уменьшения длины трактов, но и за счёт снижения толщины стенок внутренних трактов, поскольку эти стенки разгружены от давления рабочего тела; решается проблема установки пульсационной турбины [13, 14].

Хотя коаксиальные каналы в термоакустических системах встречаются нередко [15, 16], общее волновое уравнение для каналов кольцевого сечения с продольным температурным градиентом до настоящего времени не публиковалось. Для инженерных расчётов каналов кольцевого сечения использовались уравнения Ротта –Свифта [17], а возможная расчётная ошибка устранялась, если возможно, средствами регулировки. Для плоской волны давления в канале были даны теоретические решения для колебательных давления и скорости для различных форм поперечного сечения канала: круглого [18], прямоугольного плоского [19], канала с пористой

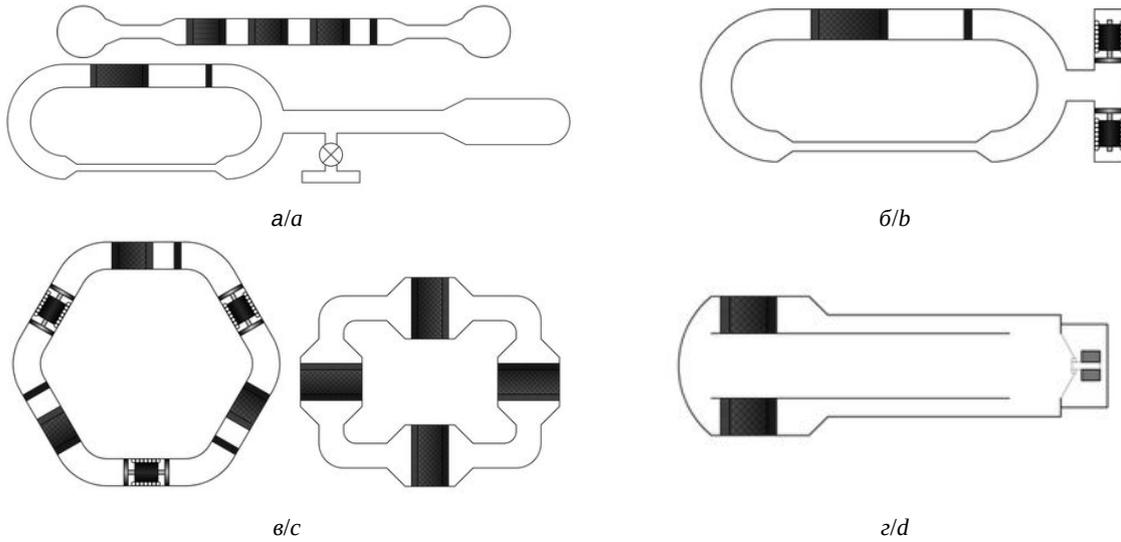


Рис. 2. Схемы компоновки термоакустических двигателей: а – линейная и комбинированная схемы компоновки, б – кольцевой замкнутый контур ТАД с нагрузкой, в – кольцевой замкнутый контур ТАД с несколькими тепловыми блоками, г – коаксиальная схема ТАД с подводом теплоты на конце

Fig. 2. Layout schemes of thermoacoustic engines: a – linear and combined layout schemes, b – looped circuit TAD with load, c – looped circuit TAD with several heat blocks, d – coaxial circuit TAD with heat input at the end

вставкой [20], щелевых каналов из параллельных пластин [17, 21].

Уравнение Ротта для осцилляций давления в канале круглого сечения с продольным градиентом температур впервые было опубликовано в работе [22]:

$$r_w^2 [1 + (\gamma - 1) f(\eta_w \sqrt{\sigma})] p_1 + \frac{d}{dx} \left[ r_w^2 \frac{a^2}{\omega^2} (1 - f(\eta_w)) \frac{dp_1}{dx} \right] - r_w^2 \frac{a^2}{\omega^2} \frac{f(\eta_w \sqrt{\sigma}) - f(\eta_w)}{1 - \sigma} \theta \frac{dp_1}{dx}, \quad (1)$$

где  $r$  – радиальная координата,  $f$  – функция Ротта для канала круглого сечения,  $a$  – скорость звука,  $x$  – продольная координата,  $\omega$  – угловая частота,  $\sigma$  – число Прандтля,  $\theta = \frac{1}{T_m} \cdot \frac{dT_m}{dx}$  – параметр, учитывающий температурный градиент.

Достоинство данного выражения заключается в том, что после аналитического интегрирования уравнение динамического давления в круглом канале  $p_1$  приведено к дифференциальному уравнению второго порядка по продольной координате (к одномерной задаче). После этого все акустические параметры так же определяются интегрированием по продольной координате, как функции динамического давления. Благодаря этому волновое уравнение Ротта (1) послужило основой для создания линейной теории термоакустики и изучения термоакустического эффекта [23–25].

В данной работе мы покажем, что уравнение Ротта для канала кольцевого сечения имеет форму (1), но содержит вместо  $f(\eta)$  иную обобщённую функцию.

## 1. Исходные уравнения

Следует отметить, что рассматриваются установившиеся колебания. Кроме того, приняты следующие упрощения:

- 1) радиальный градиент акустического давления по всему тракту – величина малого порядка,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad (2)$$

- 2) средняя температура постоянна по сечению канала;
- 3) вязкость и теплопроводность газа – величины постоянные;
- 4) все акустические параметры аппроксимируются в форме монохроматической волны:

$$p = p_m + p_1(x) e^{i\omega t}, \quad (3a)$$

$$u = u_1(x, r) e^{i\omega t}, \quad (3б)$$

$$v = v_1(x, r) e^{i\omega t}, \quad (3в)$$

$$T = T_m(x) + T_1(x, r) e^{i\omega t}, \quad (3г)$$

$$\rho = \rho_m(x) + \rho_1(x, r) e^{i\omega t}, \quad (3д)$$

где индекс  $p$  – давление,  $m$  – среднее значение параметра при отсутствии осцилляций, индекс 1 – профиль волны первого порядка,  $u$  – компонента



скорости в направлении оси канала,  $v$  – компонента скорости в направлении радиуса канала,  $T$  – температура.

В качестве исходных уравнений используем: уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4a)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости;  
уравнение количества движения в форме:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \sigma', \quad (4б)$$

где  $\sigma'$  – девятикомпонентный тензор вязких напряжений, Па,  
а также уравнение энергии (энтропии) в виде:

$$\begin{aligned} \rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \\ = \frac{\mu}{2} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right]^2 + \zeta (\nabla \mathbf{v})^2 + \lambda \nabla \nabla T, \end{aligned} \quad (4в)$$

где  $s$  – удельная энтропия газа,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $v$  – компонента скорости в направлении радиуса канала,  $\delta_{ik}$  – единичный тензор,  $\zeta$  – объемная вязкость,  $\lambda$  – теплопроводность газа.

Последнее уравнение подразумевает, что время релаксации параметров достаточно мало по сравнению с периодом колебаний. После линеаризации уравнений (4) путём отбрасывания членов выше первого порядка малости, а также после вычисления производных по времени получаем:

$$i\omega \rho_1 + \rho_m \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \rho_m}{\partial x} + \rho_m \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_1)}{\partial r} \right] = 0. \quad (5a)$$

Тогда уравнение проекции уравнения количества движения на продольную ось запишется как:

$$i\omega u_1 + \frac{1}{\rho_m} \frac{d p_1}{d x} = \frac{\mu}{\rho_m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right), \quad (5б)$$

$$\rho_m c_p \left( i\omega T_1 + u_1 \frac{d T_m}{d x} \right) - i\omega p_1 = \frac{\mu c_p}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad (5в)$$

$$p_1 = R(\rho_m T_1 + T_m \rho_1). \quad (5г)$$

## 2. Скорость акустического перемещения объемов газа в кольцевом канале $u_1$

Рассмотрим уравнение количества движения (5б), записанное в виде:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - i\omega u_1 \frac{\rho_m}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{d p_1}{d x}. \quad (6)$$

Уравнение (6) приводится к неоднородному уравнению Бесселя относительно  $u_1$  введением переменной  $\eta = cr$ , где  $r$  – радиальная координата,

$$c = \sqrt{\frac{\omega \rho_m}{i\mu}}. \quad (7)$$

Так как  $\partial p_1 / \partial r = 0$ , то уравнение Бесселя содержит в правой части константу. Тогда решение дифференциального уравнения (6) имеет вид:

$$u_1(\eta) = C_1 J_0(\eta) + C_2 Y_0(\eta) + \frac{1}{\mu c^2} \frac{d p_1}{d x}, \quad (8)$$

где  $C, C_1 - C_6$  – постоянные, которые определяются из граничных условий для скорости на стенке канала,  $J$  – функция Бесселя,  $Y$  – функция Неймана,  $c = \sqrt{\omega \rho_m / i\mu}$  – константа пограничного слоя. Вводя обозначения

$$\eta_0 = r_0 \sqrt{\frac{\omega \rho_m}{i\mu}}, \quad \eta_w = r_w \sqrt{\frac{\omega \rho_m}{i\mu}}, \quad (9)$$

имеем

$$\begin{cases} u_1(\eta_0) = 0, \\ u_1(\eta_w) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Окончательно получаем функцию скорости газа вида

$$u_1(\eta) = \frac{i}{\rho_m \omega} \frac{d p_1}{d x} \left[ \frac{\Phi_0(\eta_0, \eta) - \Phi_0(\eta_w, \eta)}{\Phi_0(\eta_w, \eta_0)} + 1 \right], \quad (11)$$

где здесь и далее для краткости используются вспомогательные функции:

$$\Phi_0(\xi, \zeta) = J_0(\xi) Y_0(\zeta) - J_0(\zeta) Y_0(\xi), \quad (12a)$$

$$\Phi_1(\xi, \zeta) = J_0(\xi) Y_1(\zeta) - J_1(\zeta) Y_0(\xi). \quad (12б)$$

Графики распределения скорости по сечению для демонстрации поперечного профиля, описываемого уравнением (11), представлены на рис. 3. Скорость в радиальном направлении описывается как  $u(r) = u_1 e^{i\phi}$ , где  $u_1$  определяется из (11) при  $\frac{i}{\rho_m \omega} \frac{d p_1}{d x} = 1$  (см. рис. 3). Данные профили получены для значений радиусов внутренней и внешней окружностей канала  $r_0 = 0.01$  м и  $r_w = 0.02$  м и  $\delta = 0.33$  мм, что соответствует толщине пограничного слоя  $5\delta = 1.65$  мм.

Пользоваться формулой (11) для реальных вычислений крайне затруднительно, поскольку функции Бесселя от комплексной переменной представляют собой гармонические функции с быстро возрастающей амплитудой, и при вычислениях выражения (11) наступает потеря порядка. Чтобы избежать этого при построении

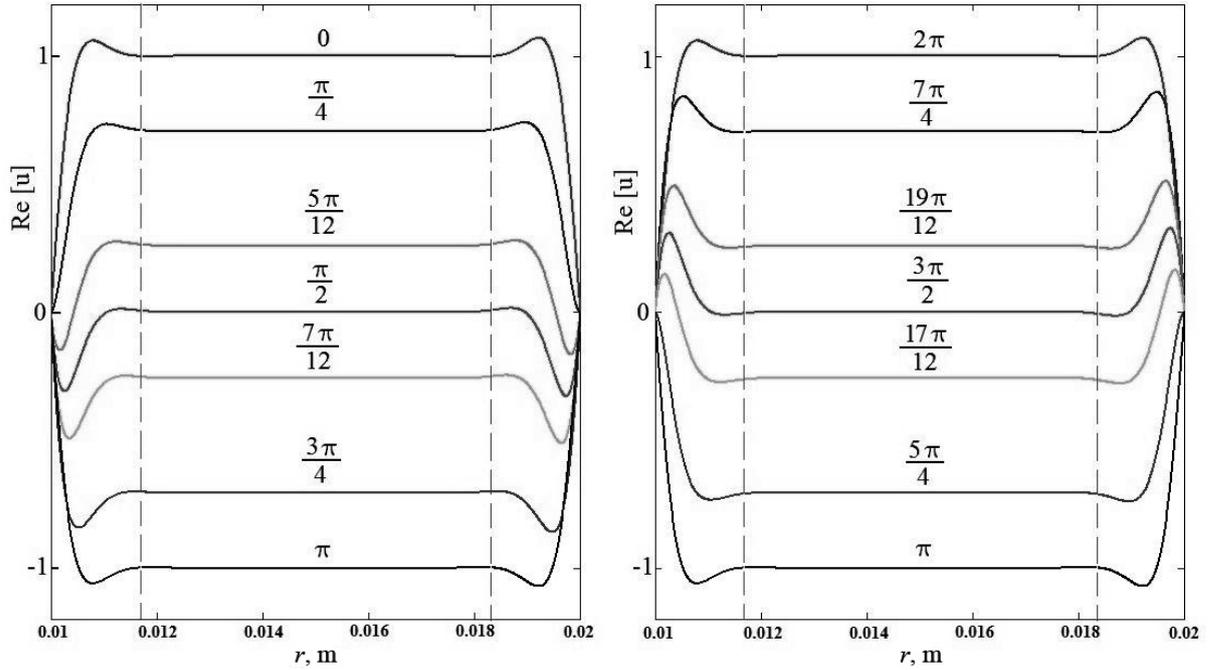


Рис. 3. Распределение скорости в кольцевом сечении для различных моментов времени колебаний в случае  $\frac{i}{\rho_m \omega} \frac{dp_1}{dx} = 1$ . Вертикальными пунктирными линиями показан пограничный слой  $\delta_5$

Fig. 3. Velocity distribution in the annular section for different time moments of the oscillation period in the case of  $\frac{i}{\rho_m \omega} \frac{dp_1}{dx} = 1$ . The vertical dotted lines show the boundary layer  $\delta_5$

графика (см. рис. 3) использовались асимптотические разложения. Видно, как осцилляции скорости в пограничном слое не совпадают по фазе с осцилляциями в центральной части тракта. С ростом высоты щели ширина «горизонтального участка» графиков тоже увеличивается, оставляя толщину пограничного слоя неизменной для конкретного значения частоты колебаний.

Результаты моделирования профиля скорости в поперечном кольцевом сечении имеют тот же характер распределения, что и профили осевой скорости акустического перемещения объемов газа, полученные экспериментально для осцилляций воздуха, находящегося при давлении 1 атм на частоте 2 Гц в межтрубном пространстве при  $r_w = 20.5$  см и различных значениях  $r_0$  [26]. Похожие распределения скорости впервые были получены для плоской волны в щелевом канале [19].

При расчёте термоакустических задач более широко используется объёмная скорость как интегральная характеристика скорости по сечению, которую с учетом (11) и (12) можно записать как:

$$U_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r_0}^{r_w} u_1 d\phi dr = \frac{i\pi}{\rho_m \omega} \frac{dp_1}{dx} \times$$

$$\times \left[ r_w^2 - r_0^2 - \frac{2i\mu}{\omega \rho_m} \frac{\Phi_1(\eta_0, \eta_w) \eta_w + \Phi_1(\eta_w, \eta_0) \eta_0 + \frac{4}{\pi}}{\Phi_0(\eta_0, \eta_w)} \right], \quad (13)$$

где  $U$  – объёмная скорость потока  $\phi$  – угловая координата

### 3. Амплитуда плотности газа в кольцевом канале $\rho_1$

Выразив из уравнения состояния (5г) переменную  $T_1$  и подставив в (5в), приходим к выражению

$$\rho_m c_p \left[ \left( i\omega \frac{p_1}{\rho_m R} - i\omega \frac{T_m}{\rho_m} \rho_1 \right) + u_1 \frac{dT_m}{dx} \right] - i\omega p_1 =$$

$$= -\frac{\mu c_p}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{T_m}{\rho_m} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right), \quad (14)$$

где  $p$  – изобарная теплоемкость на единицу массы,  $R$  – газовая постоянная. Так как осредненное по времени давление  $p_m$  не зависит от координаты  $x$ , то из уравнения состояния можно выразить:

$$\frac{dT_m}{dx} = -\frac{T_m}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dx}. \quad (15)$$



С учетом (15), а также соотношений  $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$  и  $a^2 = \gamma R T_m$  уравнение (14) преобразуется к виду:

$$i\omega \left( \rho_1 - \frac{p_1}{a^2} \right) + u_1 \frac{d\rho_m}{dx} = \frac{\mu}{\rho_m \sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right), \quad (16)$$

где  $\gamma$  – отношение изобарной удельной теплоемкости к изохорной. Подставим в (16) значение  $u_1$  из выражения (11) и перепишем это выражение относительно переменной  $\eta$  и, перегруппировав, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} + \sigma \rho_1 &= \sigma \frac{p_1}{a^2} - \frac{\sigma}{\omega^2 \rho_m} \frac{d\rho_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} + \\ &+ \frac{\sigma}{\omega^2 \rho_m} \frac{d\rho_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} \times \\ &\times \left[ \frac{Y_0(\eta_w) - Y_0(\eta_0)}{\Phi_0(\eta_0, \eta_w)} J_0(\eta) + \frac{J_0(\eta_0) - J_0(\eta_w)}{\Phi_0(\eta_0, \eta_w)} Y_0(\eta) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Данное уравнение можно заменить уравнением вида

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} + \sigma \rho_1 = A J_0(\eta) + B Y_0(\eta) + C \quad (18)$$

с постоянными коэффициентами А, В, С, которое приводится к неоднородному уравнению Бесселя с помощью подстановки  $\xi = \eta \sqrt{\sigma}$ . В итоге решение уравнения (18) имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho_1(\eta) &= C_3 J_0(\eta \sqrt{\sigma}) + C_4 Y_0(\eta \sqrt{\sigma}) + \\ &+ \frac{1}{\sigma - 1} [A J_0(\eta) + B Y_0(\eta)] + \frac{C}{\sigma}. \end{aligned} \quad (19)$$

Коэффициенты  $C_3$  и  $C_4$  определяются из граничных условий на стенках канала, выраженных через динамическую температуру на стенках в виде:

$$\begin{cases} \rho_1(\eta_0) = \frac{\gamma}{a^2} p_1 - \frac{\rho_m}{T_m} T_{10}, \\ \rho_1(\eta_w) = \frac{\gamma}{a^2} p_1 - \frac{\rho_m}{T_m}. \end{cases} \quad (20)$$

После определения  $C_3$  и  $C_4$  из условия (20) выражение (19) в итоге приобретает вид:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \left( \frac{\gamma - 1}{a^2} p_1 - \frac{1}{\sigma - 1} \frac{1}{\omega^2 \rho_m} \frac{d\rho_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} \right) \times \\ &\times \frac{\Phi_0(\eta_0 \sqrt{\sigma}, \eta \sqrt{\sigma}) - \Phi_0(\eta_w \sqrt{\sigma}, \eta \sqrt{\sigma})}{\Phi_0(\eta_0 \sqrt{\sigma}, \eta_w \sqrt{\sigma})} - \\ &- \frac{\rho_m}{T_m} \times \frac{\Phi_0(\eta_0 \sqrt{\sigma}, \eta \sqrt{\sigma}) T_{10} - \Phi_0(\eta_w \sqrt{\sigma}, \eta \sqrt{\sigma}) T_{10}}{\Phi_0(\eta_0 \sqrt{\sigma}, \eta_w \sqrt{\sigma})} + \\ &+ \frac{\sigma}{\sigma - 1} \frac{1}{\omega^2 \rho_m} \frac{d\rho_m}{dx} \frac{dp_1}{dx} \left[ \frac{\Phi_0(\eta_0, \eta) - \Phi_0(\eta_w, \eta)}{\Phi_0(\eta_0, \eta_w)} \right] + \\ &+ \frac{p_1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2 \rho_m} \frac{d\rho_m}{dx} \frac{dp_1}{dx}. \end{aligned} \quad (21)$$

#### 4. Обобщенная функция уравнения Ротта для кольцевого канала $F(\eta)$

Алгоритм получения уравнения для  $p_1$ , приведенный в данной работе, аналогичен используемому в работе Ротта [22]. Выразив из уравнения (16) величину  $i\omega \rho_1$  и подставив ее в уравнение (5а), имеем:

$$\rho_m \frac{\partial u_1}{\partial x} + i\omega \frac{p_1}{a^2} + \frac{\mu}{\rho_m \sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right) + \rho_m \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_1)}{\partial r} \right] = 0. \quad (22)$$

Интегрируя (22) в пределах от  $r_0$  до  $r_w$ , предварительно умножив на  $2a^2 r / (r_w^2 - r_0^2)$ , получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r_w^2 - r_0^2} \frac{d[\Psi(r_w^2 - r_0^2)]}{dx} + i\omega p_1 = \\ &= - \frac{\mu}{\rho_m \sigma} \frac{2a^2}{r_w^2 - r_0^2} \left[ r_w \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)_w - r_0 \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)_0 \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\Psi = \frac{2a^2 \rho_m}{r_w^2 - r_0^2} \int_{r_0}^{r_w} u_1 r dr.$$

Аналогично, предварительно умножив на тот же множитель уравнение количества движения (5б), производится интегрирование от  $r_0$  до  $r_w$ ,

$$i\omega \Psi + a^2 \frac{dp_1}{dx} = 2 \frac{\mu a^2}{r_w^2 - r_0^2} \left[ r_w \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_w - r_0 \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_0 \right]. \quad (24)$$

Чтобы исключить из уравнений (23) и (24) функцию  $\Psi$ , уравнение (24) умножается на  $r_w^2 - r_0^2$  и дифференцируется по  $x$ . После подстановки полученного значения  $d[\Phi(r_w^2 - r_0^2)]/dx$  в (23) имеем

$$\begin{aligned} &\omega^2 p_1 (r_w^2 - r_0^2) + \frac{d}{dx} \left[ a^2 (r_w^2 - r_0^2) \frac{dp_1}{dx} \right] - \\ &- 2 \frac{d}{dx} \left\{ \mu a^2 \left[ r_w \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_w - r_0 \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_0 \right] \right\} - \\ &- i\omega \frac{2\mu a^2}{\rho_m \sigma} \left[ r_w \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)_w - r_0 \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Такой подход для получения выражения (25) позволяет рассматривать его не только для каналов с постоянным сечением, но и для труб с переменными радиусами. Используя выражение (11) для исключения производных  $\partial u_1 / \partial r$



и выражение (21) для исключения производных  $\partial p_1 / \partial r$ , в итоге получаем:

$$\begin{aligned}
 & p_1 \left\{ r_w^2 - r_0^2 + (\gamma - 1) r_w^2 F(\eta \sqrt{\sigma}) \right\} + \\
 & + \frac{d}{dx} \left\{ \frac{a^2}{\omega^2} [r_w^2 - r_0^2 - r_w^2 F(\eta)] \frac{dp_1}{dx} \right\} + \\
 & + \frac{r_w^2}{\sigma - 1} \frac{a^2}{\omega^2} \frac{1}{T_m} \frac{dT_m}{dx} [F(\eta \sqrt{\sigma}) - F(\eta)] \frac{dp_1}{dx} - \\
 & - 2a^2 \left( \frac{r_w}{\eta_w \sqrt{\sigma}} \right)^2 \frac{\rho_m}{T_m} \left[ T_{1w} \frac{\Phi_1(\eta_0 \sqrt{\sigma}, \eta_w \sqrt{\sigma}) \eta_w \sqrt{\sigma} + \frac{2}{\pi}}{\Phi_0(\eta_0 \sqrt{\sigma}, \eta_w \sqrt{\sigma})} + \right. \\
 & \left. + T_{10} \frac{\Phi_1(\eta_w \sqrt{\sigma}, \eta_0 \sqrt{\sigma}) \eta_0 \sqrt{\sigma} + \frac{2}{\pi}}{\Phi_0(\eta_0 \sqrt{\sigma}, \eta_w \sqrt{\sigma})} \right] = 0.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Здесь введена новая функция

$$F(\eta) = \frac{2}{\eta_w^2} \frac{\Phi_1(\eta_0, \eta_w) \eta_w + \Phi_1(\eta_w, \eta_0) \eta_0 + \frac{4}{\pi}}{\Phi_0(\eta_0, \eta_w)}.
 \tag{27}$$

### 5. Применение к каналам резонатора термоакустического преобразователя

В данной работе не приводится выражение для амплитуды температуры газа, поскольку в общем случае температурные осцилляции на стенках  $T_{10}$  и  $T_{1w}$  находятся из уравнения теплопроводности. Они зависят от ряда факторов и в

рамках этой статьи не рассматриваются. Кроме того, если принять во внимание, что теплопроводность стенок, а также теплоёмкость единицы поверхности стенки во много раз выше, чем у газа, то для многих задач можно пренебречь колебаниями температуры на стенке.

Таким образом, в случае  $T_{1w} = 0$  и  $T_{10} = 0$ , а также при условии  $r_0 \rightarrow 0$ , полученное уравнение (26) полностью идентично уравнению Ротта для канала круглого сечения с той разницей, что вместо функции

$$f(\eta) = \frac{2J_1(\eta_w)}{\eta_w J_0(\eta_w)}
 \tag{28}$$

теперь присутствует обобщенная функция для кольцевого канала:

$$\begin{aligned}
 F(\eta) = & \frac{2}{\eta_w^2} \frac{[J_0(\eta_0) Y_1(\eta_w) - Y_0(\eta_0) J_1(\eta_w)] \eta_w +}{J_0(\eta_0) Y_0(\eta_w) - J_0(\eta_w) Y_0(\eta_0)} + \\
 & + \frac{2}{\eta_w^2} \frac{[J_0(\eta_w) Y_1(\eta_0) - Y_0(\eta_w) J_1(\eta_0)] \eta_0 + \frac{4}{\pi}}{J_0(\eta_0) Y_0(\eta_w) - J_0(\eta_w) Y_0(\eta_0)}.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Сравнение в поведении действительных и мнимых частей функций уравнения Ротта для круглого и кольцевого каналов в соответствии с (28) и (29) представлены на рис. 4, 5.

Чтобы оценить количественные отличия, вызываемые использованием функций (28) и (29),

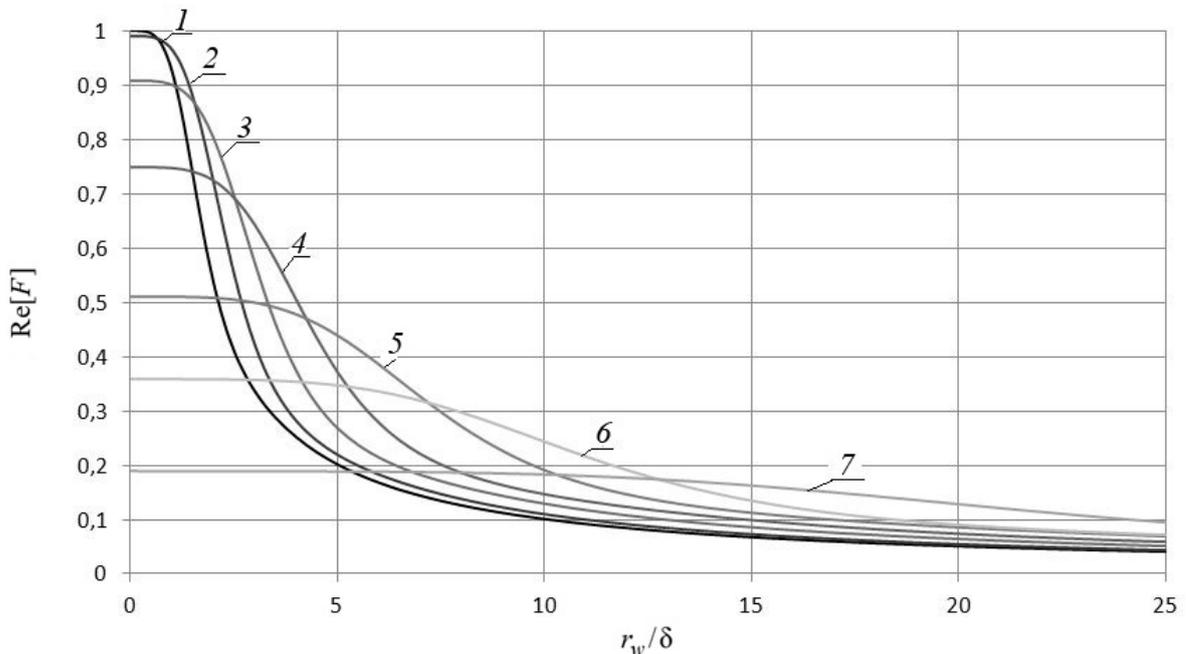


Рис. 4. Действительные части функции  $F(r_0/\delta, r_w/\delta)$  при различных соотношениях  $r_0/r_w$ : 1 -  $r_0/r_w = 0$  или  $f(r_w/\delta) = F$ ; 2 -  $r_0/r_w = 0.1$ ; 3 -  $r_0/r_w = 0.3$ ; 4 -  $r_0/r_w = 0.5$ ; 5 -  $r_0/r_w = 0.7$ ; 6 -  $r_0/r_w = 0.8$ ; 7 -  $r_0/r_w = 0.9$

Fig. 4. Real parts of the function  $F(r_0/\delta, r_w/\delta)$  for different ratios  $r_0/r_w$ : 1 -  $r_0/r_w = 0$  or  $f(r_w/\delta) = F$ ; 2 -  $r_0/r_w = 0.1$ ; 3 -  $r_0/r_w = 0.3$ ; 4 -  $r_0/r_w = 0.5$ ; 5 -  $r_0/r_w = 0.7$ ; 6 -  $r_0/r_w = 0.8$ ; 7 -  $r_0/r_w = 0.9$

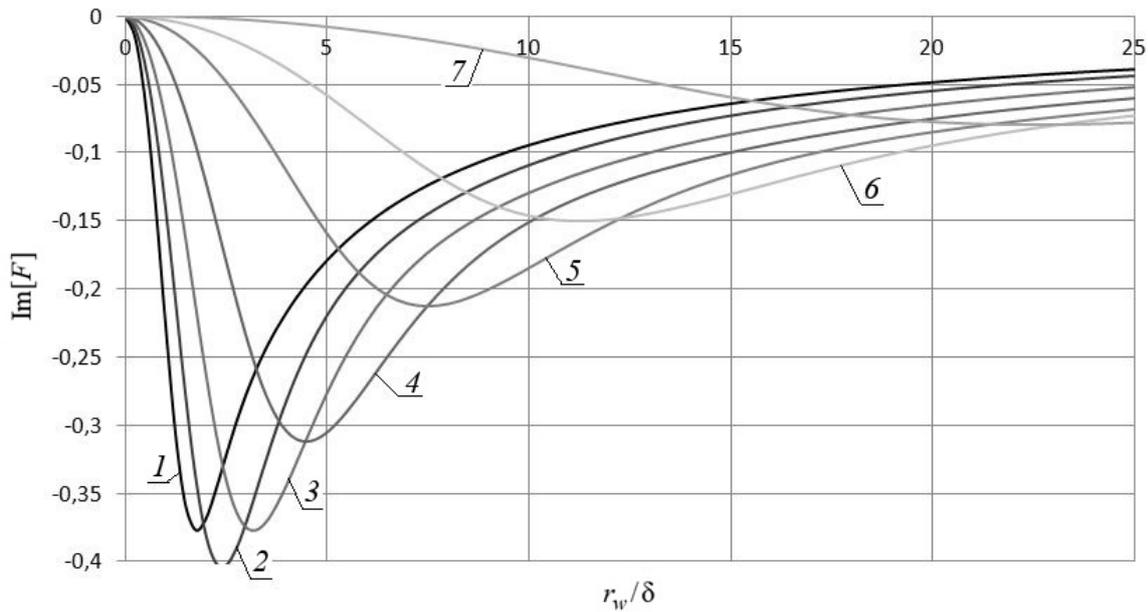


Рис. 5. Мнимые части функции  $F(r_0/\delta, r_w/\delta)$  при различных соотношениях  $r_0/r_w$ . Условные обозначения см. рис. 4  
 Fig. 5. Imaginary parts of the function  $F(r_0/\delta, r_w/\delta)$  for different ratios  $r_0/r_w$ . Designations see Fig. 4

рассмотрим канал постоянного кольцевого сечения без градиента температур. На входе в канал заданы акустическое давление  $p_{вх}$  и осреднённая по сечению скорость осцилляций  $u_{вх} = U_1/S$ . Исследуем поведение динамических акустических параметров  $p_1$  и  $u_1$  на выходе из трубы в зависимости от площади поперечного сечения канала и размера щели в радиальном направлении,  $h = r_w - r_0$ .

Используем приведённое сечение равной площади  $r_n^2 = r_w^2 - r_0^2$ , без учёта температурных осцилляций на стенках уравнение (26) принимает вид:

$$\begin{aligned} & [r_w^2 - r_0^2 + (\gamma - 1)r_w^2 F(\eta\sqrt{\sigma})] p_1 + \\ & + \frac{a^2}{\omega^2} [r_w^2 - r_0^2 - r_w^2 F(\eta)] \frac{d^2 p_1}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Оно имеет аналитическое решение

$$p_1 = C_5 e^{-ik_f x} + C_6 e^{ik_f x}, \quad (31)$$

$$k_F = \frac{\omega}{a} \sqrt{\frac{r_w^2 - r_0^2 + r_w^2 (\gamma - 1) F(\eta\sqrt{\sigma})}{r_w^2 - r_0^2 - r_w^2 F(\eta)}}. \quad (32)$$

Исходя из идентичности уравнений для каналов круглого [1] и кольцевого сечения можно записать в общем виде уравнение преобразования

акустического сигнала для отдельного участка канала:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \langle u_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kx & C \sin kx \\ \frac{-1}{C} \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{вх} \\ u_{вх} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

В случае кольцевого сечения канала  $k = k_F$ , и  $C = C_F$ , где

$$C_F = \frac{-i\rho_m \omega}{k_F \left[ 1 - \frac{r_w^2}{r_w^2 - r_0^2} F(\eta) \right]}. \quad (34)$$

В случае круглого сечения  $k = k_f$ , и  $C = C_f$ , где

$$k_f = \frac{\omega}{a} \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1) f(\eta\sqrt{\sigma})}{1 - f(\eta)}}, \quad (35)$$

$$C_f = \frac{-i\rho_m \omega}{k_f [1 - f(\eta)]}. \quad (36)$$

В данной работе проведено сравнение распределения динамических параметров осциллирующего газа при одинаковой площади проходного сечения  $S$  для каналов круглого и кольцевого сечения, заполненных гелием. Результаты расчета динамических параметров на выходе из каналов длиной 0.05 м для рабочей частоты  $f = 50$  Гц приведены на рис. 6, 7.

Входные параметры давления и осредненной по сечению осевой скорости приняты равными

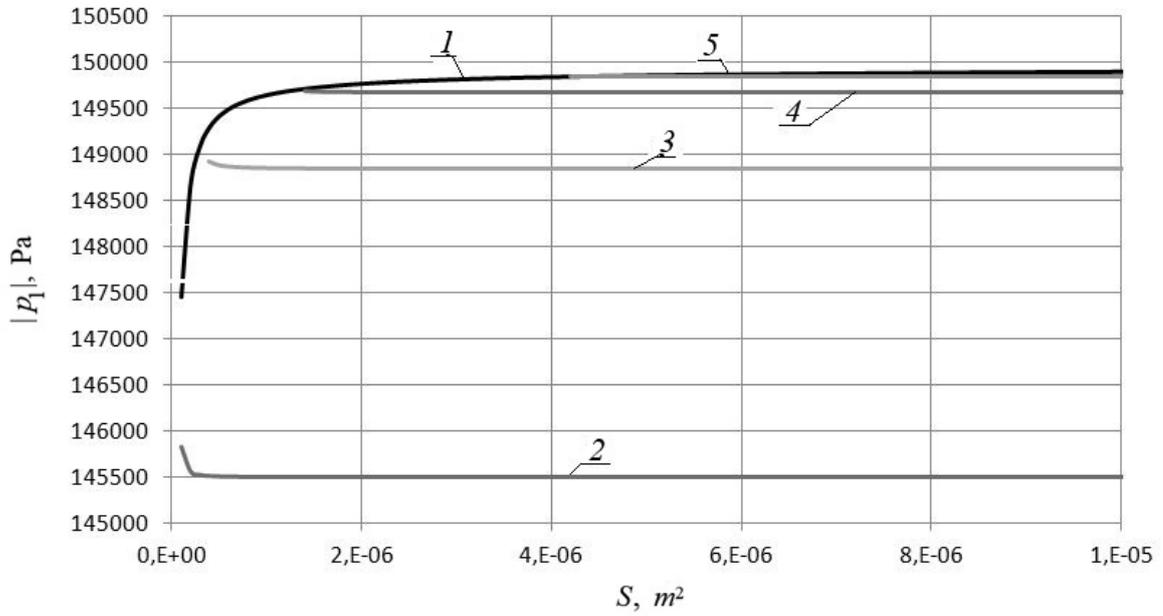


Рис. 6. Амплитуда динамического давления как функция площади поперечного сечения трубы: 1 – для круглого сечения; для кольцевых сечений: 2 –  $h/\delta = 2$ ; 3 –  $h/\delta = 4$ ; 4 –  $h/\delta = 7$ ; 5 –  $h/\delta = 10$

Fig. 6. Dynamical pressure amplitude as a function of the cross-sectional area: 1 – for circular section; for annular section: 2 –  $h/\delta = 2$ ; 3 –  $h/\delta = 4$ ; 4 –  $h/\delta = 7$ ; 5 –  $h/\delta = 10$

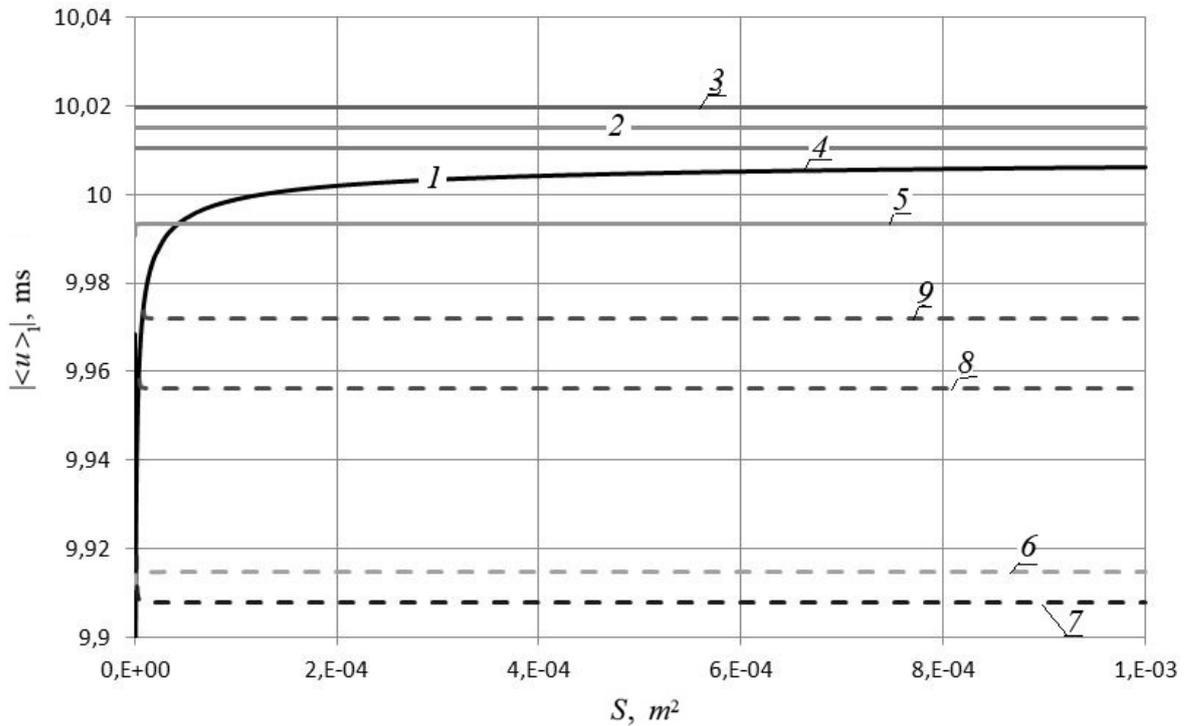


Рис. 7. Амплитуда динамической скорости как функция площади поперечного сечения трубы: 1 – для круглого сечения; для кольцевых сечений: 2 –  $h/\delta = 0.2$ ; 3 –  $h/\delta = 0.4$ ; 4 –  $h/\delta = 0.7$ ; 5 –  $h/\delta = 1$ ; 6 –  $h/\delta = 2$ ; 7 –  $h/\delta = 4$ ; 8 –  $h/\delta = 7$ ; 9 –  $h/\delta = 10$

Fig. 7. Dynamical velocity amplitude as a function of the cross-sectional area: 1 – for circular section; for annular section: 2 –  $h/\delta = 0.2$ ; 3 –  $h/\delta = 0.4$ ; 4 –  $h/\delta = 0.7$ ; 5 –  $h/\delta = 1$ ; 6 –  $h/\delta = 2$ ; 7 –  $h/\delta = 4$ ; 8 –  $h/\delta = 7$ ; 9 –  $h/\delta = 10$



$p_{\text{вх}} = 150$  кПа,  $u_{\text{вх}} = 10$  м/с, осредненные по времени давления и температуры –  $p_m = 3$  МПа,  $T_m = 300$  К.

Из рис. 6 видно, что с ростом площади поперечного кольцевого сечения параметры  $p_1$  и  $\langle u_1 \rangle$  быстро выходят на свои асимптотические значения, равные значениям в плоскопараллельном канале бесконечно большой длины. Из теоретических оценок приближённое совпадение с асимптотическим значением должно наблюдаться в случае, когда высота канала  $h$  мала по сравнению с шириной эквивалентного прямоугольного сечения, т. е. при  $S > 10h^2$ , однако конкретный расчёт показал что реальная граница в 2-3 раза меньше.

Анализ результатов расчётов позволяет заключить, что наилучшей аппроксимацией параметров  $p_1$  и  $u_1$  для коротких каналов кольцевого сечения при  $S > 10h^2$  и  $h/\delta > 1$  являются уравнения для плоского канала, ограниченного плоскими параллельными пластинами с тем же зазором  $h$ . Однако следует учесть, что для расчёта объёмной скорости  $U_1$  (которая имеет более широкое практическое применение) необходима реальная площадь кольцевого сечения.

Также расчёты показали, что для кольцевых каналов длиной 5 см при  $h/\delta < 0.15$  сдвиг фаз между давлением и средней по сечению скоростью на выходе изменяется от 194 до 90°, что свидетельствует об акустическом запирании канала. Затем сдвиг фаз почти скачкообразно изменяется и при  $h/\delta > 0.2$  до конца рассматриваемого диапазона плавно уменьшается от 6.5 до 2.6°. Под акустическим запиранием понимается неспособность канала пропускать акустическую энергию исходной монохроматической волны в заданном направлении при длине канала гораздо меньшей, чем длина волны. Для каналов длиной 1 м диапазон акустического запираения наблюдается при  $h/\delta < 2$ , а затем сдвиг фаз на выходе без скачка плавно уменьшается до 44°. Для каналов круглого сечения эффекта запираения канала не наблюдалось. В круглом канале длиной 1 м максимальный сдвиг фаз наблюдается в самой узкой трубе и составил на выходе 63°.

## Заключение

Уравнение для каналов круглого сечения той же площади, которые дают схожие результаты для динамического давления при  $h/\delta > 10$ , имеют близкие, но различные асимптотические значения с каналами кольцевого сечения при

$S \rightarrow \infty$ . Это объясняется тем, что рассматриваемые уравнения получены для узких каналов и их применимость ограничена по площади поперечного сечения. Таким образом, применимость уравнений круглого канала в качестве аппроксимации для каналов кольцевого сечения возможна лишь для очень коротких каналов. С ростом длины канала ошибка на выходе из него увеличивается как по абсолютному значению, так и по фазе (поскольку ошибка давления растёт медленнее, чем ошибка скорости). Это особенно актуально для термоакустических устройств на бегущей волне, в которых короткий регенератор должен располагаться в том месте, где сдвиг фаз между акустическим давлением и скоростью равен нулю.

В случае  $h/\delta < 1$  расчётные значения, полученные по формулам для каналов кольцевого сечения, существенно отличаются от результатов, полученных для каналов круглого и плоского сечения. Это объясняется влиянием пограничного слоя на столь узкие щели, профиль которого в общем случае существенно отличается. Использование уравнений кольцевого канала позволяет предсказать акустическое запираение канала, тогда как использование уравнений круглого канала той же площади вместо кольцевого этого не определяет.

Таким образом, полученные уравнения позволяют аналитически описать процессы осцилляций скорости и давления для каналов кольцевого сечения более достоверно, чем это возможно с использованием уравнений для плоского щелевого канала и канала круглого поперечного сечения, что имеет важное значение при численном моделировании процессов, протекающих в осесимметричных каналах термоакустических установок.

## Список литературы

1. Perozziello C., Grosu L., Vaglieco B. M. Free-Piston Stirling Engine Technologies and Models : A Review // Energies. 2021. Vol. 14. Article number 7009. <https://doi.org/10.3390/en14217009>
2. De Boer P. C. T. Basic limitations on the performance of Stirling engines // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. 2007. Vol. 129. P. 104–113. <https://doi.org/10.1115/1.2204629>
3. Ceperley P. H. A pistonless Stirling engine – the traveling wave heat engine // J. Acoust. Soc. Am. 1979. Vol. 66. P. 1508–1513. <https://doi.org/10.1121/1.383505>
4. Macdonald M., Badescu V. The International Handbook of Space Technology. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2014. 731 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41101-4>



5. Backhaus S., Tward E., Petach M. Thermoacoustic power systems for space applications // *AIP Conf. Proc.* 2002. Vol. 608. P. 939–945. <https://doi.org/608.10.1063/1.1449822>
6. Swift G. W. Thermoacoustic engines // *J. of the Acoust. Soc. of Am.* 1988. Vol. 84, № 4. P. 1145–1180. <https://doi.org/10.1121/1.396617>
7. Tijani M. E. H., Spoelstra S. Study of a coaxial thermoacoustic-Stirling cooler // *Cryogenics*. 2008. Vol. 48. P. 77–82. <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2008.01.001>
8. Poignand G., Podkovskiy A., Penelet G., Lotton P., Bruneau M. Analysis of a coaxial, compact thermoacoustic heat-pump // *Acta Acustica united with Acustica*. 2013. Vol. 99, № 6. P. 898–904. <https://doi.org/10.3813/AAA.918669>
9. Backhaus S., Swift G. W. A thermoacoustic Stirling heat engine : Detailed study // *J. of the Acoust. Soc. of Am.* 2000. Vol. 107, № 6. P. 3148–3166. <https://doi.org/10.1121/1.429343>
10. Yazaki T., Iwata A., Maekawa T., Tominaga A. Travelling wave thermoacoustic engine in a looped tube // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, № 15. P. 3128–3131.
11. Swift G. W. Thermoacoustic engines and refrigerators // *Phys. Today*. 1995. Vol. 48, № 7. P. 22–28. <https://doi.org/10.1063/1.4704199>
12. Telesz M. P. Design and testing of a thermoacoustic power converter : Masters of science thesis. Georgia Institute of Technology, 2006. 139 p.
13. Blok K., Owczarek P., Francois M. Bi-directional turbines for converting acoustic wave power into electricity // 9th PAMIR Int. Conf. on Fund. and Appl. MHD. 2014. P. 433–438.
14. Elhawary M. A., Abdelmaged H., Ibrahima A., Sabry S., Abdel-Rahman E. Experimental study of a small scale bi-directional axial impulse turbine for acoustic-to-mechanical power conversion // *Renewable En.* 2020. Vol. 159. P. 414–426. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2020.05.162>
15. Mohammad H. R., Abolghasemi A., Stone R., Dadd M., Bailey P. Numerical modelling of a coaxial Stirling pulse tube cryocooler with an active displacer for space applications // *Cryogenics*. 2020. Vol. 106. Article number 103048. <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2020.103048>
16. Zhao Y., Yu G., Tan J., Mao X., Li J., Zhab R., Li N., Dang H. CFD modeling and experimental verification of oscillating flow and heat transfer processes in the micro coaxial Stirling-type pulse tube cryocooler operating at 90–170 Hz // *Cryogenics*. 2018. Vol. 90. P. 30–40. <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2018.01.003>
17. Swift G. W., Garret S. L. Thermoacoustics : A unifying perspective for some engines and refrigerators // *J. of the Acoust. Soc. of Am.* 2003. Vol. 113. P. 2379–2381. <https://doi.org/10.1121/1.1561492>
18. Tijdeman H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes // *J. of Sound and Vib.* 1975. Vol. 39, iss. 1. P. 1–33. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(75\)80206-9](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(75)80206-9)
19. Stinson M. R. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape // *J. of the Acoust. Soc. of Am.* 1991. Vol. 89, № 2. P. 550–558. <https://doi.org/10.1121/1.400379>
20. Stinson M. R., Champoux Y. Propagation of sound and the assignment of shape factors in model porous materials having simple pore geometries // *J. of the Acoust. Soc. of Am.* 1992. Vol. 91, iss. 2. P. 685–695. <https://doi.org/10.1121/1.402530>
21. Yazaki T., Tashiro Y., Biwa T. Measurements of sound propagation in narrow tubes // *Proc. of the Royal Society of Math. Phys. and Eng. Sciences*. 2007. Vol. 463, iss. 2087. P. 2855–2862. <https://doi.org/10.1098/rspa.2007.1897>
22. Rott N. Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes // *J. of Appl. Math. and Phys.* 1969. Vol. 20. P. 230–243. <https://doi.org/10.1007/BF01595562>
23. Rott N., Zouzoulas G. Thermally driven acoustic oscillations. Part IV : Tubes with variable cross-section // *J. of Appl. Math. and Phys.* 1976. Vol. 27. P. 197–224.
24. Swift G. W. Analysis and performance of a large thermoacoustic engine // *J. of the Acoust. Soc. of Am.* 1992. Vol. 92, iss. 3. P. 1551–1563. <https://doi.org/10.1121/1.403896>
25. Верещагина Т. Н., Михеев А. С., Кудряева Ю. В. Термоакустический эффект и его применение // *Вопросы атомной науки и техники. Серия : Ядерно-реакторные константы*. 2021. Вып. 2. С. 127–138. <https://doi.org/10.55176/2414-1038-2021-2-127-138>
26. Morii J., Biwa T., Yazaki T. Measurements of acoustic particle velocity in a coaxial duct and its application to a traveling-wave thermoacoustic heat engine // *Rev. of Scientific Inst.* 2014. Vol. 85, iss. 9. Article number 094902. <https://doi.org/10.1063/1.4893639>

## References

1. Perozziello C., Grosu L., Vaglieco B. M. Free-Piston Stirling Engine Technologies and Models : A Review. *Energies*, 2021, vol. 14, article no. 7009. <https://doi.org/10.3390/en14217009>
2. De Boer P. C. T. Basic limitations on the performance of Stirling engines. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2007, vol. 129, pp. 104–113. <https://doi.org/10.1115/1.2204629>
3. Ceperley P. H. A pistonless Stirling engine – the traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1979, vol. 66, pp. 1508–1513. <https://doi.org/10.1121/1.383505>
4. Macdonald M., Badescu V. *The International Handbook of Space Technology*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2014. 731 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41101-4>
5. Backhaus S., Tward E., Petach M. Thermoacoustic power systems for space applications. *AIP Conf. Proc.*, 2002, vol. 608, pp. 939–945. <https://doi.org/608.10.1063/1.1449822>
6. Swift G. W. Thermoacoustic engines. *J. of the Acoust. Soc. of Am.*, 1988, vol. 84, no. 4, pp. 1145–1180. <https://doi.org/10.1121/1.396617>



7. Tijani M. E. H., Spoelstra S. Study of a coaxial thermoacoustic-Stirling cooler. *Cryogenics*, 2008, vol. 48, pp. 77–82. <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2008.01.001>
8. Poinand G., Podkovskiy A., Penelet G., Lotton P., Bruneau M. Analysis of a coaxial, compact thermoacoustic heat-pump. *Acta Acustica united with Acustica*, 2013, vol. 99, no. 6, pp. 898–904. <https://doi.org/10.3813/AAA.918669>
9. Backhaus S., Swift G. W. A thermoacoustic Stirling heat engine : Detailed study. *J. of the Acoust. Soc. of Am.*, 2000, vol. 107, no. 6, pp. 3148–3166. <https://doi.org/10.1121/1.429343>
10. Yazaki T., Iwata A., Maekawa T., Tominaga A. Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, vol. 81, no. 15, pp. 3128–3131.
11. Swift G. W. Thermoacoustic engines and refrigerators. *Phys. Today*, 1995, vol. 48, no. 7, pp. 22–28. <https://doi.org/10.1063/1.4704199>
12. Telesz M. P. *Design and testing of a thermoacoustic power converter : Masters of science thesis*. Georgia Institute of Technology, 2006. 139 p.
13. Blok K., Owczarek P., Francois M. Bi-directional turbines for converting acoustic wave power into electricity. *9th PAMIR Int. Conf. on Fund. and Appl. MHD*, 2014, pp. 433–438.
14. Elhawary M. A., Abdelmaged H., Ibrahima A., Sabry S., Abdel-Rahman E. Experimental study of a small scale bi-directional axial impulse turbine for acoustic-to-mechanical power conversion. *Renewable En.*, 2020, vol. 159, pp. 414–426. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2020.05.162>
15. Mohammad H. R., Abolghasemi A., Stone R., Dadd M., Bailey P. Numerical modelling of a coaxial Stirling pulse tube cryocooler with an active displacer for space applications. *Cryogenics*, 2020, vol. 106, article no. 103048. <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2020.103048>
16. Zhao Y., Yu G., Tan J., Mao X., Li J., Zhab R., Li N., Dang H. CFD modeling and experimental verification of oscillating flow and heat transfer processes in the micro coaxial Stirling-type pulse tube cryocooler operating at 90–170 Hz. *Cryogenics*, 2018, vol. 90, pp. 30–40. <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2018.01.003>
17. Swift G. W., Garret S. L. Thermoacoustics : A unifying perspective for some engines and refrigerators. *J. of the Acoust. Soc. of Am.*, 2002, vol. 113, pp. 2379–2381. <https://doi.org/10.1121/1.1561492>
18. Tijdeman H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. *J. of Sound and Vib.*, 1975, vol. 39, iss. 1, pp. 1–33. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(75\)80206-9](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(75)80206-9)
19. Stinson M. R. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. *J. of the Acoust. Soc. of Am.*, 1991, vol. 89, no. 2, pp. 550–558. <https://doi.org/10.1121/1.400379>
20. Stinson M. R., Champoux Y. Propagation of sound and the assignment of shape factors in model porous materials having simple pore geometries. *J. of the Acoust. Soc. of Am.*, 1992, vol. 91, iss. 2, pp. 685–695. <https://doi.org/10.1121/1.402530>
21. Yazaki T., Tashiro Y., Biwa T. Measurements of sound propagation in narrow tubes. *Proc. of the Royal Society of Math. Phys. and Eng. Sciences*. 2007, vol. 463, iss. 2087, pp. 2855–2862. <https://doi.org/10.1098/rspa.2007.1897>
22. Rott N. Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *J. of Appl. Math. and Phys.*, 1969, vol. 20, pp. 230–243. <https://doi.org/10.1007/BF01595562>
23. Rott N., Zouzoulas G. Thermally driven acoustic oscillations. Part IV : Tubes with variable cross-section. *J. of Appl. Math. and Phys.*, 1976, vol. 27, pp. 197–224.
24. Swift G. W. Analysis and performance of a large thermoacoustic engine. *J. of the Acoust. Soc. of Am.*, 1992, vol. 92, iss. 3, pp. 1551–1563. <https://doi.org/10.1121/1.403896>
25. Vereshchagina T. N., Mikheev A. S., Kudryaeva Yu. V. Thermoacoustic effect and its application. *Voprosy atomnoj nauki i tekhniki. Ser. Yaderno-reaktornye konstanty* [Problems of Atomic Science and Technology. Series : Nuclear and Reactor Constants], 2021, iss. 2, pp. 127–138 (in Russian). <https://doi.org/10.55176/2414-1038-2021-2-127-138>
26. Morii J., Biwa T., Yazaki T. Measurements of acoustic particle velocity in a coaxial duct and its application to a traveling-wave thermoacoustic heat engine. *Rev. of Scientific Inst.*, 2014, vol. 85, iss. 9, article no. 094902. <https://doi.org/10.1063/1.4893639>

Поступила в редакцию 21.02.2022; одобрена после рецензирования 15.04.2022; принята к публикации 23.04.2022

The article was submitted 21.02.2022; approved after reviewing 15.04.2022; accepted for publication 23.04.2022