



# РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 343–354

*Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 343–354

<https://fizika.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-4-343-354>

Научная статья  
УДК 538.56:519.25

## Режимы колебаний линейного осциллятора, индуцированные флуктуациями частоты в виде немарковского дихотомического шума

О. Л. Сироткин

Научно-производственное предприятие «Ника-СВЧ», Россия, 410040, г. Саратов, а/я 20

Сироткин Олег Леонидович, кандидат физико-математических наук, [mahbor111@gmail.com](mailto:mahbor111@gmail.com),  
<https://orcid.org/0000-0001-9792-5541>

**Аннотация.** Формулируются дифференциальные уравнения для плотностей вероятности фазовых координат динамических систем с параметрическими флуктуациями в виде немарковского дихотомического шума, имеющего произвольные функции распределения времён жизни в состояниях  $\pm 1$ . В качестве примера вычислен первый момент фазовой координаты линейного осциллятора, возмущённое движение которого описывается стохастическим аналогом уравнения Матье – Хилла. Цель этих вычислений – показать, что в случае линейных динамических систем параметрические флуктуации способны индуцировать состояния, которых нет в детерминированном режиме. Задача решается при помощи метода дополнительных переменных, позволяющего за счет расширения фазового пространства перевести немарковский дихотомический шум в марковский. Показано присутствие незатухающих колебаний амплитуд в форме биений, когда в структуре дихотомического шума есть функции распределения времён его жизни в состояниях  $\pm 1$  в виде суммы двух взвешенных экспонент. Марковская модель осциллятора даёт только затухающие колебания. Свойства дельта-коррелированности и гауссовости исследуемого процесса не используются. Вычисления проводятся в рамках простых дифференциальных уравнений без привлечения интегральных операторов.

**Ключевые слова:** немарковские процессы, дополнительные переменные, линейный осциллятор, индуцированные шумом колебания, биения

**Для цитирования:** Сироткин О. Л. Режимы колебаний линейного осциллятора, индуцированные флуктуациями частоты в виде немарковского дихотомического шума // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 343–354. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-4-343-354>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

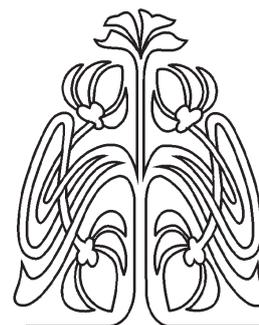
**Oscillation modes of a linear oscillator, induced by frequency  
fluctuations in the form of non-Markovian dichotomous noise**

O. L. Sirotkin

Npp Nika-Svch, 20 po/box, Saratov 410040, Russia

Oleg L. Sirotkin, [sirotkin.saratov@mail.ru](mailto:sirotkin.saratov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-9792-5541>

© Сироткин О. Л., 2021



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





**Abstract. Background and Objectives:** A set of differential equations is derived for the probability density functions of the phase coordinates of dynamic systems featuring parametric fluctuations in the form of non-Markovian dichotomous noise having arbitrary distribution functions for life at the states  $\pm 1$ . As an example, the first moment of the phase coordinate of an oscillator was calculated, its perturbed motion being described by a stochastic analogue of the Mathieu–Hill equation. It is intended to show that linear dynamical systems subjected to parametric fluctuations are capable of producing states not appropriate to deterministic modes. **Materials and Methods:** The problem is solved using the method of supplementary variables which facilitates, through an expansion of the phase space, transformation of the non-Markovian dichotomous noise into a Markovian one. **Results:** It has been established that sustained beating oscillations of the amplitudes are observed provided the dichotomous noise structure contains the life time distribution function as a sum of two weighted exponents describing two states of the system, i.e.  $\pm 1$ . **Conclusion:** As a matter of fact, a Markovian simulation of the oscillator features only damped oscillations. Properties of the process in question being delta-correlated or Gaussian are not utilized. The calculations are made using ordinary differential equations with no integral operators being involved.

**Keywords:** non-Markovian processes, supplementary variables, linear oscillator, induced oscillations, beating oscillations

**For citation:** Sirotkin O. L. Oscillation modes of a linear oscillator, induced by frequency fluctuations in the form of non-Markovian dichotomous noise. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 343–354 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-4-343-354>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию динамической системы с флуктуациями, вызванными внешним воздействием:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{V}(t), I(t)). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{F}$  – векторы,  $I(t)$  – случайная функция, стохастические свойства которой известны,  $\mathbf{F}$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{V}(t), i, t) = - \sum_{v, \mu} A_{v, \mu}(i) \frac{\partial}{\partial V_v} [V_\mu P(\mathbf{V}(t), i, t)] + \mathbf{W} P(\mathbf{V}(t), i, t). \quad (2)$$

Здесь  $i = \pm 1$  – реализации процесса  $I(t)$ ,  $v = 1, 2$ ;  $\mu = 1, 2$ ;  $V_v$  и  $V_\mu$  – компоненты вектора  $\mathbf{V}$ ;  $A_{v, \mu}$  – коэффициенты, которые определяются параметрами динамической системы;  $\mathbf{W}$  – матрица с элементами  $\gamma$ , имеющих смысл средней частоты переходов процесса  $I(t)$  между уровнями  $\pm 1$ .

В данной модели развитием плотности вероятности управляет дихотомический шум  $I(t)$ , поэтому распишем более подробно матрицу  $\mathbf{W}$ . Временная эволюция  $I(t)$  задаётся уравнениями Колмогорова для вероятностей состояний  $P(I(t) = 1) = P_+(t)$  и  $P(I(t) = -1) = P_-(t)$  [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_+(t) &= -\gamma P_+(t) + \gamma P_-(t), \\ \frac{d}{dt} P_-(t) &= -\gamma P_-(t) + \gamma P_+(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следует

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma \\ \gamma & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Реальные случайные события часто обладают последствием и поэтому не являются марковскими. Следовательно, применение уравнений Фоккер – Планка проблематично. В полной мере это относится также к дихотомическому шуму.

не зависит явно от времени  $t$ . Для вычисления моментов фазовых координат такой системы необходимо знать плотность вероятности совместного процесса  $\{\mathbf{V}(t), I(t)\}$ , т.е.  $P(\mathbf{V}(t), I(t), t)$ . Если  $I(t)$  – марковский дихотомический шум (телеграфный сигнал) с произвольным временем корреляции, кинетическое уравнение относительно  $P(\mathbf{V}(t), I(t), t)$  известно [1] и имеет следующий вид:

С этой точки зрения представляется актуальным расширение круга задач, решаемых при помощи уравнения (2), на более общий случай немарковских моделей процесса  $I(t)$ . Методически общий подход к решению задач предпочтительней, чем частные случаи с ограниченными возможностями, как у марковских процессов.

Поскольку немарковские процессы относятся к более широкому классу случайных процессов, можно ожидать, что они дадут эффекты, отсутствующие в марковских вариантах задач. Проверка этого предположения связана с вычислением первых моментов фазовых координат динамической системы, так как эти моменты, в частности, информируют о ее работе.

Собственно метод состоит в следующем. При помощи дополнительных переменных немарковский дихотомический шум  $I(t)$  сводится к марковскому [3], что позволяет записать кинетическое уравнение для плотности вероятности, сохранив его форму (2), но в расширенном фазовом пространстве. Этот прием позволяет найти решение задачи в рамках простых дифференциальных уравнений без привлечения интегральных операторов. Функции распределения случайных времен жизни процесса  $I(t)$  в состояниях  $\pm 1$  могут быть любыми.



Полученное таким образом кинетическое уравнение является исходным для вычисления моментов фазовых координат. В конечных результатах дополнительные переменные устраняются после их предельного перехода к бесконечности.

Решение уравнений для первых моментов получено в замкнутом виде без привлечения методов возмущений, гипотезы о квазигассовости и  $\delta$ -коррелированности. Аналитические выражения здесь позволяют наглядно провести анализ динамической системы на устойчивость по математическому ожиданию.

Далее будет показано, что в случае линейного гармонического осциллятора параметрические флуктуации в виде определенной модели немарковского дихотомического шума индуцируют незатухающие амплитуды колебаний, частота и форма которых отличаются от колебаний детерминированного режима. В марковском варианте получаются только затухающие амплитуды.

### 1. Уравнения эволюции дихотомического шума в расширенном фазовом пространстве

Процесс  $I(t)$  как управляющий в уравнении (1) флуктуирует независимо от  $V(t)$  и, следо-

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_+(t, \tau_+, \tau_-) &= \frac{\partial}{\partial \tau_+} P_+(t, \tau_+, \tau_-) - \frac{\partial}{\partial \tau_+} P_+(t, \tau_+, \tau_-)|_{\tau_+=0} + F_-(\tau_-) \frac{\partial}{\partial \tau_-} P_-(t, \tau_+, \tau_-)|_{\tau_-=0}, \\ \frac{\partial}{\partial t} P_-(t, \tau_+, \tau_-) &= \frac{\partial}{\partial \tau_-} P_-(t, \tau_+, \tau_-) - \frac{\partial}{\partial \tau_-} P_-(t, \tau_+, \tau_-)|_{\tau_-=0} + F_+(\tau_+) \frac{\partial}{\partial \tau_+} P_+(t, \tau_+, \tau_-)|_{\tau_+=0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $P_{\pm}(t, \tau_+, \tau_-) = P(I(t) = \pm 1, F_+(\tau_+), F_-(\tau_-))$  – функции распределения времен жизни процесса  $I(t)$  в состояниях  $\pm 1$ .

Итак, уравнения эволюции марковского варианта  $I(t, \tau_+, \tau_-)$  теперь известны и можно перейти к формулировке уравнений для совместной плотности вероятности процесса  $\{V(t), I(t, \tau_+, \tau_-)\}$ .

### 2. Кинетические уравнения для плотностей вероятности $P_{\pm}(x, y, t, \tau_+, \tau_-)$ в расширенном фазовом пространстве

Далее будет рассматриваться процесс колебаний линейного осциллятора, уравнения движения которого есть

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = -\omega_0^2 [1 + \alpha I(t)] x(t).$$

Здесь  $0 \leq \alpha \leq 1$  – параметр внешнего воздействия.

вательно, рассматривается самостоятельно. В нашем случае удобно ввести дополнительные переменные как остаточные времена не экспоненциально распределённых времён жизни  $I(t)$  от момента  $t$  до перехода  $I(t)$  в другое состояние. Обозначим эти действительные случайные величины через  $\varepsilon_{\pm}(t)$ . Условие марковости дихотомического шума выполняется за счет дополнительных переменных  $\varepsilon_{\pm}(t)$ . При любой истории развития процесса  $I(t, \tau_+, \tau_-)$  в состоянии  $+1$  он останется в  $+1$ , если будет  $\varepsilon_+(t) > 0$ , и перейдет в  $-1$ , если  $\varepsilon_+(t) = 0$ . Аналогично и для состояния  $-1$ . Как и в марковской модели, необходимо двумерные плотности вероятности  $P(I(t + \Delta t) = \pm 1; \varepsilon_{\pm}(t + \Delta t) < \tau_{\pm})$ , где  $\tau_{\pm}$  – некоторые уровни времени, которые не могут превосходить значения  $\varepsilon_{\pm}(t)$ , выразить через их значения в момент времени  $t$  и вероятности переходов (событий) на интервале  $[t, t + \Delta t]$ . Прделав эту операцию, далее при помощи теорем сложения и умножения вероятностей выводятся уравнения Колмогорова для немарковской модели дихотомического шума [4] и Приложение:

В матричном виде, согласно (1), система (6) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 [1 + \alpha I(t)] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты  $A_{\nu, \mu}$ , которые определяются параметрами осциллятора, находим из (7):

$$\begin{aligned} A_{11}(1) &= A_{22}(1) = 0, \\ A_{12}(1) &= 1, \quad A_{21}(1) = -\omega_0^2 (1 + \alpha), \\ A_{11}(-1) &= A_{22}(-1) = 0, \quad A_{12}(-1) = 1, \\ A_{21}(-1) &= -\omega_0^2 (1 - \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Считая  $I(t)$  марковским процессом, с учетом (8), запишем кинетическое уравнение (2) в развернутом виде:



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} P_+(x, y, t) \\ P_-(x, y, t) \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ y \begin{pmatrix} P_+(x, y, t) \\ P_-(x, y, t) \end{pmatrix} \right] + \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left[ x \begin{pmatrix} P_+(x, y, t) \\ P_-(x, y, t) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\gamma & \gamma \\ \gamma & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+(x, y, t) \\ P_-(x, y, t) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь,  $P(x, y; I(t) = +1; t) = P_+(x, y, t)$ ,  $P(x, y; I(t) = -1; t) = P_-(x, y, t)$ .

Структура системы (9) следующая. Поскольку  $I(t)$  флуктуирует независимо от  $x(t)$ , изменения  $P_{\pm}(x, y, t)$  за время  $\Delta t$  являются аддитивными. Таким образом, кинетические уравнения для  $P_{\pm}(x, y, t)$  состоят из двух частей: одна описывает эволюцию  $x(t), y(t)$  при фиксированных значениях  $I(t)$  – первые два слагаемых в правой части уравнения (9), а другая – третье слагаемое – отвечает за развитие процесса  $I(t)$ , согласно (3). Такая структура кинетических уравнений для плотностей вероятности будет сохраняться и в случае применения метода дополнительных переменных. Это самый важный момент данной работы.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} P_+(x, y, t, \tau_+) \\ P_-(x, y, t, \tau_-) \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ y \begin{pmatrix} P_+(x, y, t, \tau_+) \\ P_-(x, y, t, \tau_-) \end{pmatrix} \right] + \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left[ x \begin{pmatrix} P_+(x, y, t, \tau_+) \\ P_-(x, y, t, \tau_-) \end{pmatrix} \right] + \widetilde{W}(x, y, t, \tau_+, \tau_-), \quad (11)$$

$$C_1 P_+(\tau_-) = F_-(\tau_-), \quad C_2 P_-(\tau_+) = F_+(\tau_+). \quad (12)$$

Здесь  $C_1, C_2 - \text{const}$ ,

$$\widetilde{W}(x, y, t, \tau_+, \tau_-) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau_+} P_+(x, y, t, \tau_+) - \tilde{\alpha}_+(x, y, t) + C_1 P_-(\tau_+) \tilde{\alpha}_-(x, y, t) \\ \frac{\partial}{\partial \tau_-} P_-(x, y, t, \tau_-) - \tilde{\alpha}_-(x, y, t) + C_2 P_+(\tau_-) \tilde{\alpha}_+(x, y, t) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\alpha}_+(x, y, t) = \left. \frac{\partial}{\partial \tau_+} P_+(x, y, t, \tau_+) \right|_{\tau_+=0}; \quad \tilde{\alpha}_-(x, y, t) = \left. \frac{\partial}{\partial \tau_-} P_-(x, y, t, \tau_-) \right|_{\tau_-=0}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  вычисляются из начальных условий и условия нормировки. Проведя соответствующие выкладки, находим  $C_1 = C_2 = 1$ .

Система (11) дает обобщение основного кинетического уравнения (2) на немарковскую модель процесса  $I(t)$ , что расширяет возможности его применения. Коэффициенты  $A_{\nu,\mu}$  могут отличаться от принятых в разделе 2. В других работах, связанных с параметрическими флуктуациями в виде дихотомического шума, система (11) не встречается.

Интерес представляет не совместная вероятность для переменных  $x, y$  и флуктуирующего параметра, а плотность вероятности только переменных  $x, y$ .

Очевидно, что

$$P(x, y, t, \tau_+, \tau_-) =$$

$$= P_+(x, y, t, \tau_+, \tau_-) + P_-(x, y, t, \tau_+, \tau_-). \quad (13)$$

Из (10), (12) находим

Моменты фазовых координат могут быть вычислены при помощи уравнения (9), но интерес представляет случай немарковского характера дихотомического шума  $I(t)$ .

Марковские свойства процесса  $I(t, \tau_+, \tau_-)$  позволяют записать кинетическое уравнение для  $P_{\pm}(x, y, t, \tau_+, \tau_-)$ , сохранив форму уравнения (9), но с заменой  $WP(V, I, t)$  выражением, которое следует из (5).

Переменные в этом уравнении разделяются:

$$\begin{aligned} P_+(x, y, t, \tau_+, \tau_-) &= P_+(x, y, t, \tau_+) P_+(\tau_-), \\ P_-(x, y, t, \tau_+, \tau_-) &= P_-(x, y, t, \tau_-) P_-(\tau_+). \end{aligned} \quad (10)$$

и получаем

$$\begin{aligned} P(x, y, t, \tau_+, \tau_-) &= P_+(x, y, t, \tau_+) F_-(\tau_-) + \\ &+ P_-(x, y, t, \tau_-) F_+(\tau_+). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, эволюция плотности вероятности  $P(x, y, t, \tau_+, \tau_-)$  плотностью определена уравнениями (11), (12), что позволяет перейти к вычислению моментов фазовых координат.

### 3. Уравнения для первых моментов фазовых координат $\overline{x_{\pm}}(s, \tau_{\pm})$

Зафиксировав уровень +1, определим частное среднее обычным способом:

$$\overline{x_+}(t, \tau_+, \tau_-) = \iint_{-\infty}^{\infty} x P_+(x, y, t, \tau_+, \tau_-) dx dy.$$

Из (10), (14) находим

$$\overline{x_+}(t, \tau_+, \tau_-) = \overline{x_+}(t, \tau_+) P_+(\tau_-) = \overline{x_+}(t, \tau_+) F_-(\tau_-),$$

где  $F_-(\tau_-)$  задаётся моделью дихотомического шума.



Умножая первое уравнение системы (11) на  $x$  и интегрируя по  $x$  и  $y$  в пределах  $(-\infty, \infty)$ , получаем уравнение для  $\bar{x}_+(t, \tau_+)$ . Умножая это

же уравнение на  $y$  и опять интегрируя по  $x$  и  $y$  в пределах  $(-\infty, \infty)$ , получаем уравнение для  $\bar{y}_+(t, \tau_+)$ . После таких операций имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \bar{x}_+(t, \tau_+) - \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{x}_+(t, \tau_+) - \bar{y}_+(t, \tau_+) = F_+(\tau_+) a_2(t) - a_1(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{y}_+(t, \tau_+) - \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{y}_+(t, \tau_+) + \omega_0^2 (1 + \alpha) \bar{x}_+(t, \tau_+) = F_+(\tau_+) a_4(t) - a_3, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{x}_+(t, \tau_+) |_{\tau_+=0}; & a_2(t) &= \frac{\partial}{\partial \tau_-} \bar{x}_-(t, \tau_-) |_{\tau_-=0}; \\ a_3(t) &= \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{y}_+(t, \tau_+) |_{\tau_+=0}; & a_4(t) &= \frac{\partial}{\partial \tau_-} \bar{y}_-(t, \tau_-) |_{\tau_-=0}. \end{aligned}$$

Таким же образом из второго уравнения системы (11) определяется эволюция  $\bar{x}_-(t, \tau_-)$ ,  $\bar{y}_-(t, \tau_-)$ .

В случае равновероятного старта процесса  $I(t)$  из состояний  $\pm 1$ , начальное условие для  $\bar{x}_+(0, \tau_+)$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_+(0, \tau_+) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(0) P(x(0) = x_0; I(0) = +1; \varepsilon_+ \leq \tau_+) dx = \\ &= x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx P(I(0) = +1) F_+(\tau_+) = \frac{1}{2} x(0) F_+(\tau_+). \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично  $\bar{x}_-(0, \tau_-) = \frac{1}{2} x(0) F_-(\tau_-)$  и, принимая  $y(0) = 0, \bar{y}_+(0, \tau_+) = \bar{y}_-(0, \tau_-) = 0$ .

параметром  $s \leftrightarrow t$  и запишем всю систему для первых моментов в полном виде с учётом  $\bar{x}_-(s, \tau_-)$ ,  $\bar{y}_-(s, \tau_-)$  и начальных условий (18):

Применим к (15) преобразование Лапласа с

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{x}_+(s, \tau_+) - s \bar{x}_+(s, \tau_+) + \bar{y}_+(s, \tau_+) = a_1(s) - a_2(s) F_+(\tau_+) - \frac{1}{2} x(0) F_+(\tau_+), \\ \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{y}_+(s, \tau_+) - s \bar{y}_+(s, \tau_+) - \omega_0^2 (1 + \alpha) \bar{x}_+(s, \tau_+) = a_3(s) - a_4(s) F_+(\tau_+), \\ \frac{\partial}{\partial \tau_-} \bar{x}_-(s, \tau_-) - s \bar{x}_-(s, \tau_-) + \bar{y}_-(s, \tau_-) = a_2(s) - a_1(s) F_-(\tau_-) - \frac{1}{2} x(0) F_-(\tau_-), \\ \frac{\partial}{\partial \tau_-} \bar{y}_-(s, \tau_-) - s \bar{y}_-(s, \tau_-) - \omega_0^2 (1 - \alpha) \bar{x}_-(s, \tau_-) = a_4(s) - a_3(s) F_-(\tau_-). \end{cases} \quad (17)$$

Так как  $\tau_{\pm}$  есть уровень времени, который не могут превышать значения положительных случайных величин  $\varepsilon_{\pm}$ , то события  $\varepsilon_{\pm} < 0$  считаются невозможными и  $P_{\pm}(x, t, \varepsilon_{\pm} < \tau_{\pm} = 0) = 0$ . Если  $\varepsilon_{\pm} = 0$ , процесс  $I(t)$  в этот момент времени скачком переходит из одного состояния в другое, события  $I(t) = +1$  или  $I(t) = -1$  также считаются невозможными и  $P_{\pm}(x, t, \varepsilon_{\pm} = 0) = 0$ . Соответственно,  $\bar{x}_+(t, 0) = \bar{x}_-(t, 0) = 0$ , что даёт  $\bar{x}_+(s, 0) = \bar{x}_-(s, 0) = 0$ . Аналогично имеем  $\bar{y}_+(s, 0) = \bar{y}_-(s, 0) = 0$ . Таким образом, гранич-

ные условия для системы (17) определены и можно перейти к её решению. Система (17) является универсальной, так как позволяет вычислять первые моменты фазовых координат в случае различных функций  $F_{\pm}(\tau_{\pm})$ , т.е. различных моделей дихотомического шума.

#### 4. Первый момент фазовой координаты $\bar{x}(s)$ в случае дихотомического шума с функциями распределения частного вида $1 - \Phi(\tau_{\pm})$

Выделим в функциях распределения  $F_{\pm}(\tau_{\pm})$  и  $F_-(\tau_-)$  постоянную составляющую, это будет



единица, и зависящую от времени – остальные слагаемые. Подставляя в первые два уравнения

системы (17)  $F_+(\tau_+) = 1 - \Phi(\tau_+)$ , представим её в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{x}_+(s, \tau_+) = s\bar{x}_+(s, \tau_+) - \bar{y}_+(s, \tau_+) + a_1(s) - a_2(s) - \frac{1}{2}x(0), \\ \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{y}_+(s, \tau_+) = \omega_0^2(1 + \alpha)\bar{x}_+(s, \tau_+) + s\bar{y}_+(s, \tau_+) + a_3(s) - a_4(s), \end{cases} \quad (18)$$

и, следуя принципу суперпозиции,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{x}_+(s, \tau_+) = s\bar{x}_+(s, \tau_+) - \bar{y}_+(s, \tau_+) + (a_2(s) + \frac{1}{2}x(0))\Phi(\tau_+), \\ \frac{\partial}{\partial \tau_+} \bar{y}_+(s, \tau_+) = \omega_0^2(1 + \alpha)\bar{x}_+(s, \tau_+) + s\bar{y}_+(s, \tau_+) + a_4(s)\Phi(\tau_+). \end{cases} \quad (19)$$

С целью не загружать текст формулами выкладки приводятся для систем (18) и (19), а для случая  $\bar{x}_-(s, \tau_-), \bar{y}_-(s, \tau_-)$  даются сразу

конечные результаты. Алгоритм вычислений не меняется. Частное решение системы (18) есть

$$\widehat{\bar{x}}_+(s, \tau_+) = -\frac{k(s)}{2a_1\lambda_1(s)} - \frac{\sigma(s)}{2a_1\lambda_2(s)} + \frac{k(s)}{2a_1\lambda_1(s)}e^{\lambda_1(s)\tau_+} + \frac{\sigma(s)}{2a_1\lambda_2(s)}e^{\lambda_2(s)\tau_+}, \quad (20)$$

где  $k(s) = \theta(s) - a_3(s) + a_4(s), \sigma(s) = \theta(s) + a_3(s) - a_4(s),$

$$\theta(s) = a_1 \left( a_1(s) - a_2(s) - \frac{1}{2}x(0) \right), \quad a_1 = j\omega_0\sqrt{1 + \alpha}, \quad \lambda_1(s) = s + a_1, \quad \lambda_2(s) = s - a_1.$$

Одно из частных решений системы (17), записанное для  $\bar{x}_-(s, \tau_-)$  без учёта функции  $\Phi(\tau_-)$ , есть

$$\widehat{\bar{x}}_-(s, \tau_+) = -\frac{\tilde{k}(s)}{2a_2\lambda_3(s)} - \frac{\tilde{\sigma}(s)}{2a_2\lambda_4(s)} + \frac{\tilde{k}(s)}{2a_2\lambda_3(s)}e^{\lambda_3(s)\tau_-} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{2a_2\lambda_4(s)}e^{\lambda_4(s)\tau_-}, \quad (21)$$

где  $\tilde{k}(s) = L(s) + a_3(s) - a_4(s), \tilde{\sigma}(s) = L(s) - a_3(s) + a_4(s),$

$$L(s) = a_2 \left( a_2(s) - a_1(s) - \frac{1}{2}x(0) \right), \quad a_2 = j\omega_0\sqrt{1 - \alpha}, \quad \lambda_3(s) = s + a_2, \quad \lambda_4(s) = s - a_2.$$

Конечный результат, т.е. момент  $\bar{x}(s)$  дополнительных переменных  $\tau_+, \tau_-$  не содержит. Слагаемые с  $\exp(\lambda_1(s)\tau_+), \dots, \exp(\lambda_4(s)\tau_-)$  убираются и в (20), (21) остаются только два первых члена. Далее будет показано, как это

получается. Подставляя в первые два слагаемых формул (20), (21) значения  $k(s), \tilde{k}(s), \sigma(s), \tilde{\sigma}(s)$ , выраженные через  $a_1(s), \dots, a_4(s)$ , находим  $\bar{x}(s) = \widehat{\bar{x}}_+(s, \tau_+) + \widehat{\bar{x}}_-(s, \tau_+)$ :

$$\bar{x}(s) = \frac{2\alpha\omega_0^2[s(a_1(s) - a_2(s)) + a_3(s) - a_4(s)] + x(0)s(s^2 + \omega_0^2)}{(s^2 + \omega_0^2)^2 - (\alpha\omega_0^2)^2}. \quad (22)$$

Очевидно, что момент  $\bar{x}(t)$  не замкнут, так как содержит пока неизвестные  $a_1(s), \dots, a_4(s)$ . Рассмотрим способ вычисления этих неизвестных.

Следуя изложенной в данном разделе методике, из (11), (12) выводим уравнения и для  $\bar{x}_+^2(t, \tau_+), \bar{y}_+^2(t, \tau_+), \bar{x}_+(t, \tau_+)\bar{y}_+(t, \tau_+), \dots$

### 5. Преобразование момента $\bar{x}(t)$ к замкнутому виду на примере марковской модели осциллятора

Теперь необходимо задать  $\Phi(\tau_+), \Phi(\tau_-)$ , т.е. выбрать модель дихотомического шума. В марковском варианте  $\Phi(\tau_+) = e^{-\gamma\tau_+}$  и  $\Phi(\tau_-) = e^{-\gamma\tau_-}$  – симметричный телеграфный сигнал. Далее аргумент  $s$  при параметрах  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  опускается. Частное решение системы (19) есть



$$\tilde{\bar{x}}_+(s, \tau_+) = \frac{l(s)}{2a_1(\lambda_1 + \gamma)} e^{\lambda_1 \tau_+} + \frac{d(s)}{2a_1(\lambda_2 + \gamma)} e^{\lambda_2 \tau_+} - \left( \frac{l(s)}{(\lambda_1 + \gamma)} - \frac{d(s)}{(\lambda_2 + \gamma)} \right) e^{-\gamma \tau_+}$$

и полностью для  $\bar{x}_+(s, \tau_+) = \widehat{\bar{x}}_+(s, \tau_+) + \tilde{\bar{x}}_+(s, \tau_+)$  с  $l(s) = a_1(a_2(s) + \frac{1}{2}x(0)) - a_4(s)$ ,  $d(s) = a_1(a_2(s) + \frac{1}{2}x(0)) + a_4(s)$  имеем

$$2a_1\bar{x}_+(s, \tau_+) = -\frac{k(s)}{\lambda_1} - \frac{\sigma(s)}{\lambda_2} + \left( \frac{k(s)}{\lambda_1} + \frac{l(s)}{(\lambda_1 + \gamma)} \right) e^{\lambda_1 \tau_+} - \left( \frac{l(s)}{(\lambda_1 + \gamma)} + \frac{d(s)}{(\lambda_2 + \gamma)} \right) e^{-\gamma \tau_+} + \left( \frac{\sigma(s)}{\lambda_2} + \frac{d(s)}{(\lambda_2 + \gamma)} \right) e^{\lambda_2 \tau_+}.$$

Согласно методу дополнительных переменных здесь следует перейти к  $\lim_{\tau_+ \rightarrow \infty} \bar{x}_+(s, \tau_+)$ . Чтобы избежать трудностей, имеющих место при выполнении этой операции, приравняем к нулю коэффициенты, которые стоят множителями перед  $\exp(\lambda_1 \tau_+)$ ,  $\exp(\lambda_2 \tau_+)$ , и получившиеся выражения будем рассматривать как уравнения относительно  $a_1(s), \dots, a_4(s)$ . Имеем

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \gamma)k(s) + \lambda_1 l(s) = 0, \\ (\lambda_2 + \gamma)\sigma(s) + \lambda_2 d(s) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Ещё два уравнения следуют из  $\bar{x}_-(s, \tau_-) = \widehat{\bar{x}}_-(s, \tau_-) + \tilde{\bar{x}}_-(s, \tau_-)$ :

$$\begin{pmatrix} a_1(\lambda_1 + \gamma) & -a_1\gamma & -(\lambda_1 + \gamma) & \gamma \\ a_1(\lambda_2 + \gamma) & -a_1\gamma & \lambda_2 + \gamma & -\gamma \\ -a_2\gamma & a_2(\lambda_3 + \gamma) & \gamma & -(\lambda_3 + \gamma) \\ -a_2\gamma & a_2(\lambda_4 + \gamma) & -\gamma & \lambda_4 + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(s) \\ a_2(s) \\ a_3(s) \\ a_4(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x_0\gamma \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Итак, все значения  $a_1(s), \dots, a_4(s)$  определяются только параметрами осциллятора и управляюще-

$$\begin{cases} (\lambda_3 + \gamma)\tilde{k}(s) + \lambda_3\tilde{l}(s) = 0, \\ (\lambda_4 + \gamma)\tilde{\sigma}(s) + \lambda_4\tilde{d}(s) = 0, \end{cases} \quad (24)$$

где  $\tilde{l}(s) = a_2(a_1(s) + \frac{1}{2}x(0)) - a_3(s)$ ,  $\tilde{d}(s) = a_2(a_1(s) + \frac{1}{2}x(0)) + a_3(s)$ .

Таким образом, одновременно устраняется расходимость, обусловленная экспонентами  $\exp(\lambda_1 \tau_+)$ ,  $\exp(\lambda_2 \tau_+)$ , и вычисляются образы производных  $a_1(s), \dots, a_4(s)$ .

В развернутом виде из (23), (24) получаем

го процесса  $I(t)$ . Подставим в (22) решения системы (25), которые находятся по правилу Крамера:

$$\overline{x(s)} = \frac{2\omega_0^2\alpha[s(\Delta_1 - \Delta_2) + \Delta_3 - \Delta_4] + x(0)s\Delta(s^2 + \omega_0^2)}{\Delta[(s^2 + \omega_0^2)^2 - \alpha^2\omega_0^4]}. \quad (26)$$

Здесь  $\Delta$  – определитель системы (25),  $\Delta_i$  – определители, получающиеся из  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца на столбец свободных членов,  $i = 1, \dots, 4$ .

Примененный здесь способ получения зам-

кнутого выражения для первого момента  $\overline{x(s)}$  в других работах не встречается.

Проделав простые выкладки, связанные с вычислением  $\Delta$  и  $\Delta_i$  согласно (25), можно убедиться в том, что из (26) следует:

$$\bar{x}(s) = \overline{x_+}(s) + \overline{x_-}(s) = \frac{x_0s(s^2 + 4\gamma s + 4\gamma^2 + \omega_0^2)}{s^4 + 4\gamma(s + \gamma)(s^2 + \omega_0^2) + 2\omega_0^2s^2 + \omega_0^4(1 - \alpha^2)}.$$

Это выражение совпадает с образом по Лапласу первого момента фазовой координаты линейного осциллятора, полученное в [5].

Таким образом, две различные модели дают одинаковый результат, поскольку марковские процессы являются частным случаем немарковских процессов.



**7. Колебания гармонического осциллятора, индуцированные немарковским дихотомическим шумом**

Колебания гармонического осциллятора, частота которого промодулирована марковским дихотомическим шумом, могут только затухать [5]. В этом случае функция распределения времен жизни процесса  $I(t)$  в состояниях  $\pm 1$  задаётся экс-

**Модель № 1:**

$$F_-(t) = 1 - D_1 e^{-\gamma t} - D_2 e^{-\gamma_2 t}; \quad F_+(t) = 1 - \bar{C}_1 e^{-\gamma t} - \bar{C}_2 e^{-\gamma_1 t}, \quad (27)$$

где  $D_1 + D_2 = 1$ ,  $\bar{C}_1 + \bar{C}_2 = 1$ . Если  $D_2 = \bar{C}_2 = 0$  немарковский процесс  $I(t)$  переходит в марковский.

поненциальным законом:  $F_{\pm}(t) = 1 - \exp(-\gamma t)$ . Несимметричная модель  $I(t)$  также дает затухающие колебания.

Рассмотрим влияние на первый момент фазовой координаты  $\bar{x}(t)$  гармонического осциллятора немарковского дихотомического шума, имеющего различные функции распределения времен жизни на уровнях  $\pm 1$ .

Вычисление первого момента  $\bar{x}(s)$  проводится по методике разделов 5 и 6. Теперь

$$\Phi(\tau_+) = \bar{C}_1 e^{-\gamma \tau_+} + \bar{C}_2 e^{-\gamma_1 \tau_+}, \quad \Phi(\tau_-) = D_1 e^{-\gamma \tau_-} + D_2 e^{-\gamma_2 \tau_-}$$

и  $a_1(s), \dots, a_4(s)$  определяются из видоизмененной системы (25):

$$\begin{pmatrix} a_1(\lambda_1 + \gamma) & a_1 b_1 & -(\lambda_1 + \gamma) & -b_1 \\ a_1(\lambda_2 + \gamma) & a_1 b_2 & \lambda_2 + \gamma & b_2 \\ a_2 d_1 & a_2(\lambda_3 + \gamma) & -d_1 & -(\lambda_3 + \gamma) \\ a_2 d_2 & a_2(\lambda_4 + \gamma) & d_2 & \lambda_4 + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(s) \\ a_2(s) \\ a_3(s) \\ a_4(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} x_0 \begin{pmatrix} -a_1 b_1 \\ -a_1 b_2 \\ -a_2 d_1 \\ -a_2 d_2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Здесь принималось  $\bar{C}_1 = 1 - \bar{C}_2$ ,  $D_1 = 1 - D_2$ ,

$$b_1 = \frac{\gamma - \gamma_1}{\lambda_1 + \gamma_1} \cdot \lambda_1 \bar{C}_2 - \gamma, \quad b_2 = \frac{\gamma - \gamma_1}{\lambda_2 + \gamma_1} \cdot \lambda_2 \bar{C}_2 - \gamma,$$

$$d_1 = \frac{\gamma - \gamma_2}{\lambda_3 + \gamma_2} \cdot \lambda_3 D_2 - \gamma, \quad d_2 = \frac{\gamma - \gamma_2}{\lambda_4 + \gamma_2} \cdot \lambda_4 D_2 - \gamma.$$

Все остальные параметры те же, что и для системы (25).

Полученные после решения системы (28) значения  $a_1(s), \dots, a_4(s)$  подставляются

в формулу (22), что дает образ  $\bar{x}(s)$ . Для нахождения оригинала  $\bar{x}(t)$  параметры осциллятора зададим в числах. Будем считать, что

$$\omega_0 = 12 \text{ Гц}; \quad \gamma = 0.5 \text{ Гц}; \quad \gamma_1 = 0.02 \text{ Гц}; \quad \gamma_2 = 0.06 \text{ Гц}; \quad \alpha = 0.4; \quad \bar{C}_2 = D_2 = 0.7; \quad x_0 = 2 \text{ В}.$$

Далее размерности не приводятся с целью получения компактной записи формул. С этими па-

раметрами, после разложения  $\bar{x}(s)$  на простые дроби находим:

$$\bar{x}(s) = \frac{0.1142s + 0.0336}{s^2 + 86.42} + \frac{0.0536s - 1.612}{s^2 + 201.7} + \frac{0.2982s + 0.6598}{s^2 + 0.9976s + 201.6} + \dots$$

Здесь все слагаемые, за исключением первых двух, есть дробные (рациональные) функции, знаменатели которых представляют собой квадратные трехчлены. Приравнивая нулю эти знаменатели, получаем уравнения, корни которых

$$\bar{x}(t) = 0.125 \cdot \cos(14.2t + 1.13) + 0.114 \cdot \cos(9.3t - 0.03). \quad (29)$$

Из (29) следует, что работа осциллятора переходит в режим биений (рис. 1), который является результатом сложения колебаний  $\bar{x}_+(t)$  и  $\bar{x}_-(t)$  отсутствует в детерминированном слу-

чае, т.е. когда  $\alpha = 0$ . Если  $\alpha = 0$ , из (9) или (22) находим

Оригиналы первых двух слагаемых легко вычисляются, и мы имеем:

$$\bar{x}(s) = x(0) \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \Rightarrow x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t).$$

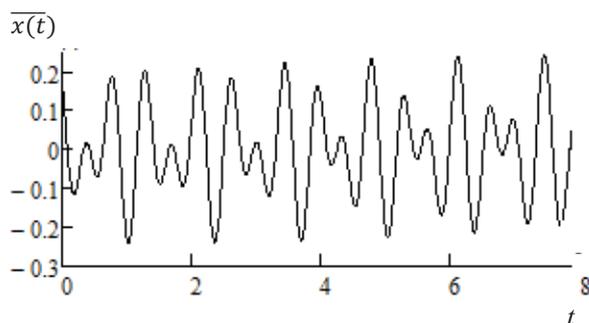


Рис. 1. Незатухающие биения амплитуды колебаний линейного осциллятора с параметрами модели № 1  
Fig. 1. Sustained amplitude beatings of a linear oscillator featuring parameters of the no. 1 simulation

Пусть  $\alpha = 0.9$ , а все остальные параметры остались без изменений. В этом случае

$$\overline{x(t)} = 0.904 \cdot \cos(16.54t - 0.567) - 0.057 \cdot \cos(3.79t - 5.83 \cdot 10^{-4}).$$

Здесь режим биений выражен слабо (рис. 2), но, по крайней мере, затухания колебаний, как в марковском варианте задачи, нет.

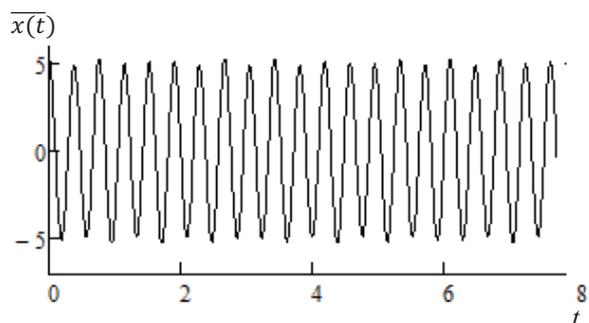


Рис. 2. Незатухающие колебания конечной амплитуды линейного осциллятора  
Fig. 2. Sustained oscillations of the finite amplitude of a linear oscillator

### Модель № 2:

$$F_+(t) = 1 - \overline{C}_1 e^{-\gamma t} - \overline{C}_2 e^{-\gamma_1 t}, \quad \overline{C}_1 + \overline{C}_2 = 1;$$

$$F_-(t) = 1 - e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t}.$$

Здесь принимается  $\omega_0 = 1$  Гц;  $\gamma = 0.5$  Гц;  $\alpha = 0.2$ ;  $\gamma_1 = 0.02$  Гц;  $\overline{C}_2 = 0.5$ ;  $x_0 = 1$  В.

Все вычисления аналогичны тем, которые проводились в случае модели № 1. Имеем

$$\overline{x(t)} = 0.256 \cdot \cos(0.894t) + 0.198 \cdot \cos(1.095t) + 0.070 \cdot \sin(0.894t) + 0.092 \cdot \sin(1.095t).$$

График колебаний показан на рис. 3.

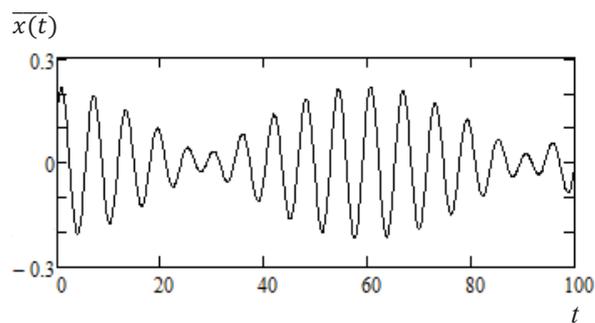


Рис. 3. Амплитудно-модулированные колебания линейного осциллятора с параметрами модели № 2  
Fig. 3. Amplitude-modulated oscillations of a linear oscillator featuring parameters of the no. 2 simulation

### Модель № 3:

$$F_+(t) = 1 - \overline{C}_1 e^{-\gamma t} - \overline{C}_2 e^{-\gamma_1 t};$$

$$F_-(t) = 1 - D_1 e^{-\gamma t} - D_2 e^{-\gamma_2 t} - D_3 e^{-\gamma_3 t},$$

$$D_1 + D_2 + D_3 = 1.$$

Здесь  $\omega_0 = 1$  Гц;  $\gamma = 0.5$  Гц;  $\alpha = 0.1$ ;  $\gamma_2 = 0.06$  Гц;  $\overline{C}_2 = 0.7$ ;  $x_0 = 1$  В;  $\gamma_3 = 0.059$  Гц;  $D_2 = 0.7$ ;  $D_3 = 0.5$ .

Следуя методике вычислений, принятой для модели № 1, находим:

$$\overline{x(t)} = 0.054 \cdot \cos(0.948t) + 0.094 \cdot \cos(1.049t) + 0.079 \cdot \sin(0.948t) + 0.076 \cdot \sin(1.049t).$$

График колебаний показан на рис. 4.

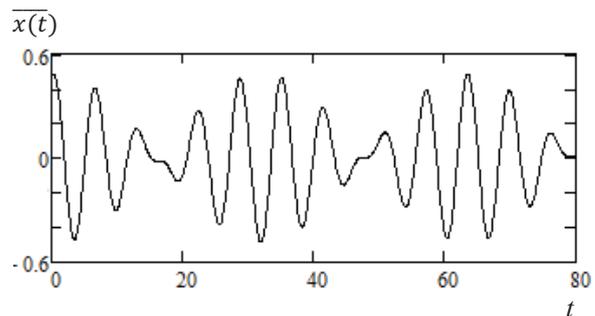


Рис. 4. Амплитудно-модулированные колебания линейного осциллятора с параметрами модели № 3  
Fig. 4. Amplitude-modulated oscillations of a linear oscillator featuring parameters of the no. 3 simulation

Известно, что внешний гауссовский белый шум приводит к уходу нелинейной системы в состояние, не имеющее детерминированного аналога [6]. Например, это модель Ферхюльста. В нашем случае такое явление имеет место для линейной системы, но с немарковским внешним шумом.



## 8. Области применения

Метод дополнительных переменных позволяет исследовать возмущённое движение динамических систем, обусловленное различными моделями параметрических флуктуаций в виде дихотомического шума. Например, функции распределения времён жизни процесса  $I(t)$  в состояниях  $\pm 1$  задаются суммой взвешенных экспонент, равномерным распределением, распределением Эрланга или их комбинацией.

Известен комплексный осциллятор, стохастическое уравнение движения которого есть  $\dot{x}(t) = -j(\omega_0 + \alpha I(t))x(t)$  [1]. Здесь точка над  $x(t)$  означает производную по времени. В марковском варианте дихотомического шума первый момент  $\bar{x}(t)$  дан в монографии [1]. Немарковская модель  $I(t)$  предлагалась в [7], однако  $\bar{x}(t)$  в случае различных функций распределения времён жизни процесса  $I(t)$  в состояниях  $\pm 1$  не вычислялся. При помощи метода дополнительных переменных решить такую задачу достаточно просто.

Для определения первых моментов фазовых координат динамических систем, эволюция которых описывается стохастическим линейным дифференциальным уравнением первого порядка, существует известное уравнение Дайсона [8]. В этом случае не надо делать предположений о дельта-коррелированности, гауссовости, марковости параметрических флуктуаций. Собственно стохастическое дифференциальное уравнение, из которого следует уравнение Дайсона для  $\bar{x}(t)$ , по крайней мере, как это дано в [8], имеет первый порядок.

Метод дополнительных переменных позволяет рассматривать стохастические дифференциальные уравнения более высокого порядка, чем первый, и не ограничиваться двумя состояниями дихотомического шума. Вычислять корреляционную функцию, как это требуется в случае уравнения Дайсона, здесь не надо.

Рассмотрим вычисление  $P_{\pm}(t)$  для немарковского процесса  $I(t)$ . С этой целью будем использовать метод дополнительных переменных [3]. Конкретизируем модель  $I(t)$ . Пусть функция распределения времени жизни  $I(t)$  в состоянии (+1) есть  $1 - e^{-\alpha_1 t}$ , а в состоянии (-1) она произвольная. Выберем в качестве дополнительной переменной остаточное время жизни в состоянии (-1) от момента времени  $t$  до момента перехода в состояние (+1). Обозначим это остаточное время через  $\varepsilon$  и  $\tau_-$  обозначим как  $\zeta$ . Представим вероятности  $P(I(t+\Delta t)=-1; \varepsilon(t+\Delta t) < \zeta)$ ,  $P(I(t+\Delta t)=+1)$  через их распределение в момент  $t$  и вероятности переходов за интервал  $[t, t+\Delta t]$ :

$$P(I(t+\Delta t) = -1; \varepsilon(t+\Delta t) < \zeta) = P(I(t) = -1; \varepsilon(t) < \zeta + \Delta t) - P(I(t) = -1; \varepsilon(t) < \Delta t) + \alpha_1 \cdot \Delta t \cdot P(I(t) = +1);$$

$$P(I(t+\Delta t) = +1) = (1 - \alpha_1 \Delta t) P(I(t) = +1) + P(I(t) = -1; \varepsilon(t) < \Delta t) \cdot P(\varepsilon(t) < \zeta).$$

Считается [6], что методы работы с немарковскими процессам того типа, который встречается в приложениях, разработаны пока недостаточно. Следует отметить монографию [9] и статьи [10, 11], в которых предлагается вместо операторов дифференцирования использовать интегральные операторы. В случае дихотомического шума такой подход не целесообразен, так как для процесса с дискретными состояниями удобно ввести дополнительные переменные – свои на каждом уровне,  $\varepsilon_{\pm}(t)$ , что дает возможность работать с немарковским процессом, оставаясь в рамках дифференциальных уравнений, имеющих аналитическое решение. Процедура решения интегральных уравнений для прикладных задач представляется достаточно сложной.

## Выводы

1. Метод дополнительных переменных сводит немарковский дихотомический шум к марковскому, что позволяет в расширенном фазовом пространстве получить уравнения относительно плотностей вероятности двумерного процесса  $P(V(t), I(t, \tau_+, \tau_-))$ , из которых следуют замкнутые аналитические выражения для моментов фазовых координат линейного гармонического осциллятора.

2. Сравнение результатов вычислений марковским методом и через дополнительные переменные показало их совпадение.

3. Параметрические флуктуации, моделируемые немарковским дихотомическим шумом с функциями распределения времён его жизни на уровнях  $\pm 1$  в виде суммы двух экспонент, индуцируют колебания гармонического осциллятора в режиме биений.

4. Метод описания немарковских процессов при помощи линейных интегральных преобразований не используется.

Приложение



В более удобной форме записи это есть

$$P_{-1}(\zeta, t + \Delta t) = P_{-1}(\zeta + \Delta t, t) - P_{-1}(\Delta t, t) + \alpha_1 \Delta t \cdot P_{+1}(t), \quad P_{+1}(t + \Delta t) = (1 - \alpha_1 \Delta t) \cdot P_{+1}(t) + P_{-1}(\Delta t, t) \cdot F(\zeta).$$

Упростим индексацию и вместо  $\pm 1$  будем писать только  $\pm$ . Здесь  $F(\zeta) = P(\varepsilon(t) < \zeta)$  – функция распределения времени жизни  $I(t)$  в  $(-1)$ . В состоянии  $(+1)$  вводить дополнительную переменную не надо. Используя разложение в ряд Тейлора и условие  $P_{-}(0, t) = 0$ , т.е.

$$P_{-}(\zeta + \Delta t, t) = P_{-}(\zeta, t) + \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{-}(\zeta, t), \quad P_{-}(\Delta t, t) = \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{-}(\zeta, t)|_{\zeta=0},$$

приходим при  $\Delta t \rightarrow 0$  к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_{+}(\zeta, t) = -\alpha_1 P_{+}(\zeta, t) + F(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{-}(\zeta, t)|_{\zeta=0}, \\ \frac{\partial}{\partial t} P_{-}(\zeta, t) = \alpha_1 P_{+}(\zeta, t) + \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{-}(\zeta, t) - \frac{\partial}{\partial \zeta} P_{-}(\zeta, t)|_{\zeta=0} \end{cases} \quad (1\Pi)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} P_{+}(0, t) &= P_{-}(0, t) = 0, \\ P_{+}(\infty, t) + P_{-}(\infty, t) &= 1. \end{aligned}$$

Искомые вероятности  $P_{\pm}(t)$  получаются как маргинальные:  $P_{\pm}(t) = P_{\pm}(\infty, t)$ .

Достаточно просто проверить правильность системы (1\Pi). Если  $F(\zeta) = 1 - e^{-\alpha_2 \zeta}$ , то её решения с граничными условиями  $P_{+}(\infty, 0) = p_0$ ;  $P_{-}(\infty, 0) = 1 - p_0$  есть

$$\begin{aligned} P_{+}(\zeta, t) &= \left\{ \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_1} + \left[ p_0 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] \cdot e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \right\} \cdot (1 - e^{-\alpha_2 \zeta}), \\ P_{-}(\zeta, t) &= \left\{ \frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} - \left[ p_0 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] \cdot e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \right\} \cdot (1 - e^{-\alpha_2 \zeta}) \end{aligned} \quad (2\Pi)$$

Что при  $\zeta \rightarrow \infty$  даёт хорошо известные из марковской модели вероятности состояний  $P_{\pm}(t)$ . Заметим, что переменные  $\zeta$  и  $t$  в (2\Pi) разделились.

Аналогичным образом выводятся уравнения Колмогорова в случае произвольной функции распределения времени жизни процесса  $I(t)$  в состоянии  $+1$ .

### Список литературы

1. Ван Кампен И. Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высш. шк., 1990. 376 с.
2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 486 с.
3. Cox D. R. The Analysis of non-Markovian Stochastic Processes by the Inclusion of Supplementary Variables // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1955. Vol. 51, № 3. P. 433–440.
4. Сироткин О. Л. Особенности моментных функций осциллятора с параметрической нестабильностью, обусловленной дихотомическим шумом с эрланговскими функциями распределения // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52, № 11. С. 921–932.
5. McKenna J., Morrison J. A. Application of a Smoothing Method to a Stochastic Ordinary Differential Equation // Journal of Mathematical Physics. 1970. Vol. 11, № 8. P. 2348–2360.
6. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 397 с.
7. Goychuk I. Quantum Dynamics with non-Markovian Fluctuating Parameters // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 016109-1–016109-8.

8. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е. Введение в статистическую физику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.
9. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. Немарковские физические процессы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. 288 с.
10. Морозов А. Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых системой линейных интегральных уравнений // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2017. № 5. С. 57–60.
11. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. Использование теории немарковских процессов при описании теплопроводности в пространстве, окружающем сферическую частицу // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2011. № 1. С. 88–91.

### References

1. Van Kampen I. G. *Stokhasticheskie protsessy v fizike i khimii* [Stochastic Processes in Physics and Chemistry]. Moscow, Vysshiaia skola Publ., 1990. 376 p. (in Russian).
2. Tikhonov V. I., Mironov M. A. *Markovskie protsessy* [Markovian Processes]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1977. 485 p. (in Russian).



3. Cox D. R. The Analysis of non-Markovian Stochastic Processes by the Inclusion of Supplementary Variables. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1955, vol. 51, no. 3, pp. 433–441.
4. Sirotkin O. L. Features of the Moment Functions of an Oscillator with Parametric instability due to Dichotomous Noise with Erlang Distribution Functions. *Izvestija vuzov. Seriya Radiofizika*, 2009, vol. 52, no. 11, pp. 921–932 (in Russian).
5. McKenna J., Morrison J. A. Application of a Smoothing Method to a Stochastic Ordinary Differential Equation. *Journal of Mathematical Physics*, 1970, vol. 11, no. 8, pp. 2361–2367.
6. Horstkemke W., Lefever R. *Indutsirovannye shumom perekhody* [Noise-Induced Transitions]. Moscow, Mir Publ., 1987. 397 p. (in Russian).
7. Goychuk I. Quantum Dynamics with non-Markovian Fluctuating Parameters. *Physical Review E*, 2004, Vol. 70, pp. 016109-1–016109-8.
8. Ahmanov S. A., Dyakov Y. E. *Vvedenie v statisticheskuyu fiziku i optiku* [Introduction to Statistical Physics and Optics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 640 p. (in Russian).
9. Morosov A. N., Skripkin A. V. *Nemarkovskie fizicheskie protsessy* [Non-Markovian Physical Processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2018. 288 p. (in Russian).
10. Morozov A. N. Method for Describing non-Markovian Processes Given by a System of Linear Integral Equations. *Vestnik Bauman MGTU*, 2017, no. 5, pp. 57–60 (in Russian).
11. Morozov A. N., Skripkin A. V. Using the Theory of non-Markovian Processes in Describing Heat Conduction in the Space Surrounding a Spherical Particle. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences*, 2011, no. 1, pp. 88–91 (in Russian).

Поступила в редакцию 06.03.2021, после рецензирования 17.05.2021, принята к публикации 15.06.2021  
Received 06.03.2021, revised 17.05.2021, accepted 15.06.2021