



## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 293–298

*Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 293–298

<https://fizika.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-3-293-298>

Научная статья  
УДК 530.145.82

### Приготовление и считывание кубита на частице в потенциальной яме

В. И. Цой

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Цой Валерий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, [tsoyvi@info.sgu.ru](mailto:tsoyvi@info.sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8055-4385>

**Аннотация.** Одной из эффективных разновидностей ячеек для хранения квантовой информации является частица в двухуровневой квантовой яме. В такой системе нетрудно приготовить любое суперпозиционное состояние двух стационарных состояний – кубита, используя осцилляции Раби между этими состояниями при наложении импульса внешнего поля соответствующей длительности. При этом стандартное считывание кубита производится многократными актами редукции в ансамбле к одному из стационарных состояний с вероятностями, определяемыми коэффициентами суперпозиции, либо селективным непрерывным измерением. В настоящей работе выполнено численное моделирование волновой функции кубита на двух нижних уровнях прямоугольной ямы большой глубины. Показано, что для считывания кубита после вероятностного отбора стационарного состояния теоретически возможна схема быстрой непрерывной редукции к этому состоянию с неединичной нормировкой, определяющей вероятности базисных состояний. Такое считывание могло бы послужить дополнением к стандартным схемам измерения.

**Ключевые слова:** квантовая информация, квантовые компьютеры, кубиты, квантовые измерения

**Для цитирования:** Цой В. И. Приготовление и считывание кубита на частице в потенциальной яме // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 293–298. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-3-293-298>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

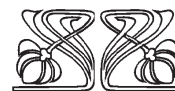
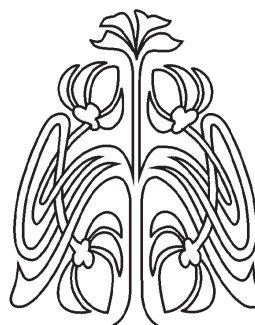
**Preparing and readout of the qubit on the particle in the potential well**

**V. I. Tsoy**

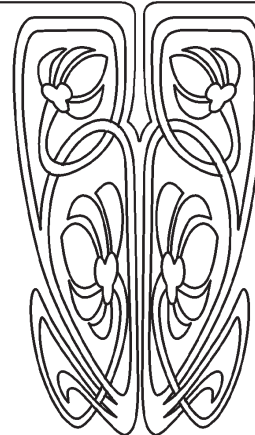
Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Valeriy I. Tsoy, [tsoyvi@info.sgu.ru](mailto:tsoyvi@info.sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8055-4385>

**Abstract. Background and Objectives:** There are known Rabi oscillations between the basic states of a two-level system, and the preparation of any qubit states is possible using these oscilla-



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





tions. There are several ways to readout qubits. It can be the strong random projective measurement, the weak continuous selective measurement, even the non-demolition readout of the qubit by a measurement of the ancillary qubit. Another qubit readout scheme is proposed in this article.

**Methods:** The non-stationary Schrodinger equation is solved numerically by the finite element method to simulate the preparation and the readout of the qubit. Two levels near the bottom of the one-dimensional rectangle potential well are considered as a qubit. The Rabi oscillations and time-averaging Fourier-type integrals are calculated. **Results and Conclusion:** It is shown that there is also another way to read out the state of a qubit. After preparing the superposition state by the Rabi oscillations the external field must be turned off so that the prepared state can be measured. The first step of measurement is a random choice of the basic state to which the reduction leads. Then there is an instant projective reduction or continuous selective reduction. The presence of only two levels in a qubit system makes it possible to propose a scheme for effective control over continuous reduction. The measurement scheme is proposed in which continuous reduction to the basis wave function occurs over a period at the Bohr transition frequency and for a multiple of this period.

**Keywords:** quantum information, quantum computers, qubits, quantum measurements

**For citation:** Tsoy V. I. Preparing and readout of the qubit on the particle in the potential well. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 293–298 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-3-293-298>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Изменение волновой функции квантовой системы происходит эволюционно в соответствии с уравнением Шредингера, либо вероятностной мгновенной редукцией к одной из собственных (базисных) функций оператора измеряемой величины при «сильных» измерениях [1–4], либо вероятностной, но непрерывной во времени редукцией, вызываемой «слабыми» измерениями [2, 5, 6]. Уравнение Шредингера позволяет проследить за непрерывным изменением между актами выбора базисного состояния, причем сильное измерение, согласно проективному постулату, вызывает мгновенный случайный переход в собственное стационарное состояние, доступное регистрации классическим прибором. Переход в собственное состояние совершается с вероятностью, определяемой квадратом модуля амплитуды вероятности перехода – скалярного произведения векторов конечного и исходного состояний. Такие проективные стандартные измерения позволяют охарактеризовать измеряемое состояние вероятностями переходов в базисные состояния и найти их после измерений в ансамбле одинаково приготовленных в этом состоянии квантовых систем. При этом определенного состояния после измерения не существует и измерение не селективно. Другие возможности возникают, если взаимодействие с измерительным прибором недостаточно для мгновенной редукции. В этом случае измерительные эффекты появляются при повторных измерениях через малые промежутки времени, в пределе – непрерывном измерении. Достаточно сильное взаимодействие и большая частота повторных измерений вызывают эффект Зенона – замораживание системы в исходном состоянии [2, 5]. При умеренном взаимодействии с прибором в селективной схеме измерений оказывается воз-

можным осуществить мониторинг квантового перехода [5, 6]. С другой стороны, используя квантовые корреляции в паре систем в запутанном состоянии, можно реализовать невозмущающее измерение одной из систем путем обычного измерения другой системы.

Этим общим квантовым законам движения и измерений, безусловно, подчиняются и волновые функции двухуровневой системы, состояния которой могут служить единицей квантовой информации – кубитом [7, 8]. Замечательной особенностью кубита являются его осцилляции между базисными стационарными состояниями под воздействием внешнего поля в резонанс с частотой перехода – осцилляции Раби [5–8]. Это означает, что за один период осцилляций кубит проходит через каждое из двух стационарных состояний с вероятностью единица, т.е. после выключения поля может быть измерен в этом состоянии классическим прибором. Подбирая длительность управляющего импульса, можно приготовить любое из возможных суперпозиционных состояний кубита. При этом с помощью слабых непрерывных измерений в квантовом коридоре энергий возможен мониторинг вероятностей перехода в осцилляциях Раби [5, 6].

В данной статье показано, как теоретически можно считать чистое суперпозиционное состояние кубита путем измерения с непрерывной редукцией волновой функции к базисной функции.

## 1. Численное моделирование приготовления кубита

Осцилляции Раби, используемые для приготовления нужных состояний кубита, являются эволюцией, описываемой уравнением Шредингера. Примем нестационарное уравнение Шредингера в виде [9]



$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(t)\psi(t) \quad (1)$$

и выберем систему измерения с единичной постоянной Планка  $\hbar = 1$  и единичной массой  $m = 1$ , так что гамильтониан частицы в поле с потенциалом  $U(\mathbf{x})$  равен  $H = -\nabla^2/2 + U(\mathbf{x})$ . Решение уравнения (1)

$$\psi(t) = T_D \exp\left(-i \int_{t_0}^t H(t') dt'\right) \psi(t_0), \quad (2)$$

где  $T_D$  – хронологическое упорядочивание, можно получить численно на временной сетке  $t_k = k\tau$ ,  $k = 0, 1, \dots, K$ ;  $K\tau = t$ , пользуясь схемой Кранка–Николсона [9]

$$\begin{aligned} (1 + i(\tau/2)H(t_{k+1/2}))\psi(\mathbf{x}, t_{k+1}) = \\ = (1 - i(\tau/2)H(t_{k+1/2}))\psi(\mathbf{x}, t_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения, преобразованные к слабой форме, решались в данной работе методом конечных элементов [10]. В качестве кубита рассматривались два нижних уровня энергии частицы в одномерном прямоугольном ящике – потенциальной яме. Энергия  $E_n = k_n^2/2$  частицы в яме определяется волновыми числами, которые при большой глубине ямы  $U$  даются выражением  $k_n \approx n\pi/L \left(1 + \sqrt{2\hbar^2/mUL^2}\right) \approx n\pi/L$ , где  $L$  – ширина ямы [3]. Этим волновым числам соответствуют стационарные волновые функции в яме с непроницаемыми стенками

$$\begin{aligned} \psi_n(x, t) = \psi_n(x) \exp(-iE_n t) = \\ = \sqrt{2/L} \sin(n\pi x/L) \exp(-iE_n t). \end{aligned} \quad (4)$$

При наложении внешнего электрического поля с энергией взаимодействия  $W = -exE_0 \cos([E_2 - E_1]t)$  с зарядом  $e$  возникают переходы между уровнями 1 и 2 с вероятностью быть в состоянии 2, равной  $p_2(t) = (\cos[\Omega t/2])^2$ . Эти осцилляции характеризуются частотой Раби, определяемой амплитудой внешнего поля  $E^0$  и матричным элементом дипольного момента перехода  $d_{21}$ . Используя простые выражения (4) для стационарных волновых функций, легко выразить эту частоту через амплитуду силы  $eE_0$  и ширину ямы  $L$ :

$$\begin{aligned} \Omega = |\langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle| eE_0 = |d_{21}| E^0 = \\ = 0.180127 eE^0 L. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение уравнения (1) с гамильтонианом  $H = -\nabla^2/2 + W$  показывает, что рассматриваемые переходы являются циклическими и два нижних уровня глубокой прямоугольной ямы служат хорошо изолированным от других переходов кубитом. Для реализации только одного перехода между двумя уровнями системы пригодна не только частица в прямоугольной яме, но этот случай выбран из-за простоты решения.

На рис. 1 показаны полученные в расчетах плотности вероятности координат частицы к моментам времени, равным четверти периода, половине периода осцилляций Раби ( $\pi/2$  и  $\pi$  импульсы) и периоду  $T_{osc}$ . Расчеты сделаны для силы  $eE^0 = 0.001$  с шагом интегрирования  $\tau = 0.005$  ( $2\pi/E_1$ ) на сетке  $\Delta x = L/200$ .

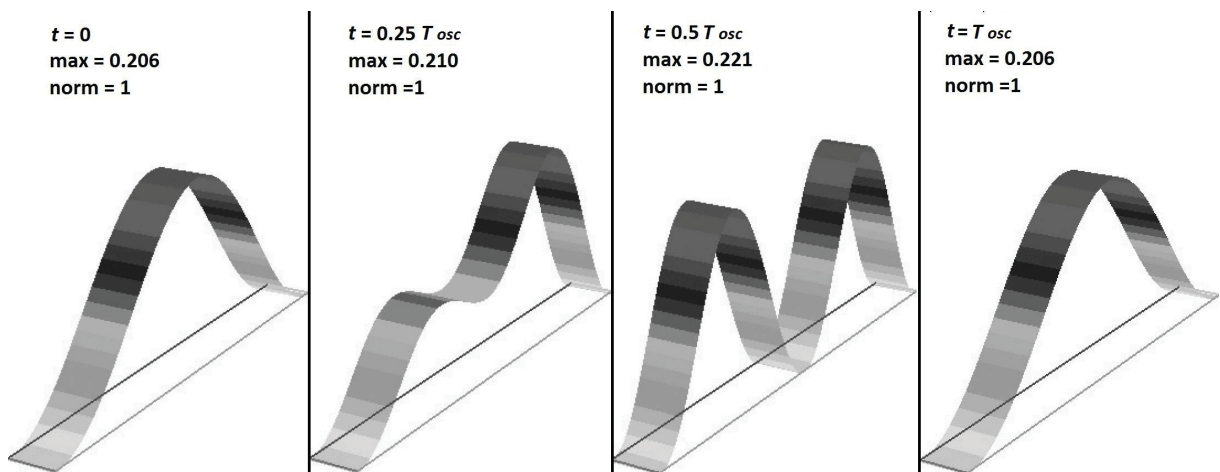


Рис. 1. Плотность вероятности при переходе между основным ( $n = 1$ ) и возбужденным ( $n = 2$ ) состояниями частицы в ящике под воздействием резонансного внешнего поля. Моменты времени  $t/T_{osc} = 0, 0.25, 0.5, 1$

Fig. 1. Probability density in the transition between the ground state ( $n = 1$ ) and excited state ( $n = 2$ ) of a particle in a box under the resonance external field. Time moments are  $t/T_{osc} = 0, 0.25, 0.5, 1$



Первое, третье и четвертое (слева направо) распределения на рисунке соответствуют стационарным состояниям и не изменяются, если в моменты, когда достигнуты эти состояния, обнулить силу  $eE^0$ . Второе распределение представляет собой равновероятную суперпозицию первого и третьего распределений – базисных состояний кубита, поэтому продолжает изменяться после обнуления силы.

## 2. Численное моделирование считывания кубита

Считывание кубита возможно по разным схемам. Это может быть сильное, мгновенное вероятностное проектирование к базисным состояниям [7, 8], мониторинг перехода путем слабого, непрерывного селективного измерения в квантовом коридоре для измеряемого состояния [5], неразрушающее измерение в запутанной паре кубитов [11]. Характерно, что в осцилляциях Раби достигаются базисные состояния кубита, измеряемые с единичной вероятностью. Покажем, что в измерениях чистых суперпозицион-

ных состояний кубита имеется дополнительная возможность в контроле непрерывной редукции к базисному состоянию. Рассмотрим сначала многоуровневую систему, эволюция которой описывается суперпозицией стационарных волновых функций

$$\psi(x, t) = \sum_n C_n(t) \psi_n(x) \exp(-i E_n t / \hbar). \quad (6)$$

Пусть в момент  $t = 0$  внешнее воздействие выключается,  $C_n(t) = C_n$  и начинается измерение энергии, т. е. происходит вероятностный выбор состояния  $\psi_m(x)$ , к которому совершается редукция. После этого измерение становится селективным и допускает непрерывное течение, если селекция происходит по временным частотам  $\omega_m = E_m / \hbar$ . Естественно считать, что гармоническая составляющая волновой функции на частоте  $\omega_m$  устанавливается во времени в соответствии с формулой для коэффициента Фурье  $C(\omega_m) = \int \psi(x, t) \exp(i\omega_m t) dt$ . Для среднего по времени в течение конечного интервала  $T$  получим:

$$\langle \psi(x, t) \exp(i\omega_m t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(x, t) \exp(i\omega_m t) dt = C_m \psi_m(x) + \sum_{n \neq m} C_n \psi_n(x) \exp[i(\omega_m - \omega_n) T / 2] \frac{\sin[(\omega_m - \omega_n) T / 2]}{(\omega_m - \omega_n) T / 2}. \quad (7)$$

Это означает, что процедура

$$\langle \psi(x, t) \exp(i\omega_m t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(x, t) \exp(i\omega_m t) dt \quad (8)$$

приводит в многоуровневой системе к стационарной волновой функции  $\psi_m(x)$ , умноженной на амплитуду вероятности состояния, с тем меньшей погрешностью, чем дольше усреднение. Для двухуровневой системы появляется дополнительная возможность получить точный результат за короткое время. Действительно, в сумме (7) остается единственное зависящее от времени слагаемое, которое пропорционально  $\sin[(\omega_2 - \omega_1) T / 2]$  и обращается в нуль, если время усреднения кратно периоду  $T_{trn}$  с боковой частотой перехода  $(\omega_2 - \omega_1)$  и равно  $T = 2\pi n' / (\omega_2 - \omega_1) = n' T_{trn}$ ,  $n'$  – целое.

Таким образом, может быть предложена следующая схема селективного измерения кубита. После выключения внешнего воздействия и вероятностного выбора базисного состояния запускается процесс интегрирования (8), соответствующий выделению колебаний с частотой базисной волновой функции. Усреднение за время, кратное «времени перехода»  $T_{trn}$ ,

приводит к базисной волновой функции с нестандартной нормой, равной той вероятности, с которой произошел выбор селективного измерения.

На рис. 2 показаны результаты численного моделирования измерения кубита в равновероятной суперпозиции базисных состояний, часто применяемой в квантовой информации. Характерные периоды времени соотносились как  $T_{trn} = 42.4$ ,  $T_{osc} = 3488$ . Первое, второе и четвертое (слева направо) распределения, после принятия их в качестве начального условия при численном решении уравнения Шредингера по схеме (3), приводят к решениям, изменяющимся во времени. Третье распределение не изменяется и является тем базисным состоянием, к которому приводит измерение кубита с вероятностью, равной получившейся норме, в данном случае  $p = 0.5$ . Следовательно, другое базисное состояние содержалось в измеренном состоянии с вероятностью  $p' = 1 - p = 0.5$ .



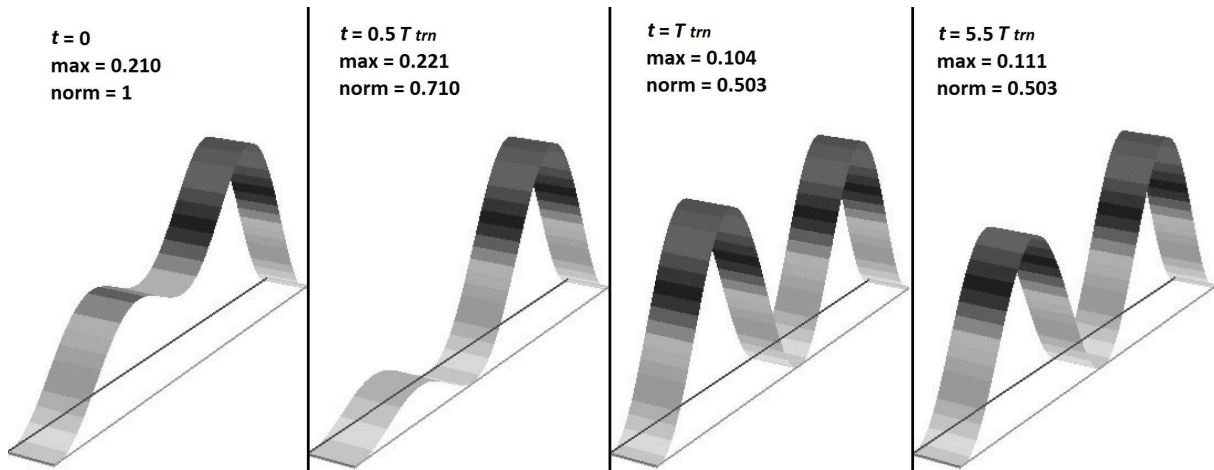


Рис. 2. Плотность вероятности при считывании кубита в возбужденное состояние ( $n = 2$ ) усреднением по времени. Моменты времени  $t/T_{trn} = 0, 0.5, 1.0, 5.5$

Fig. 2. Probability density in the readout of the qubit to the excited state ( $n = 2$ ) using the time averaging. Time moments are  $t/T_{trn} = 0, 0.5, 1.0, 5.5$

Вычисления показали, что осцилляции Раби возникают и не затухают, если амплитуда возмущающей периодической силы недостаточна для возбуждения других уровней и не превышает величины  $eE^0 \leq 0.01$ . Это значение на порядок выше, чем в случае, представленном на рис. 2, при этом  $T_{trn} / T_{osc} \approx 0.1$ . Таким образом, для режима незатухающих осцилляций Раби необходимо, чтобы характерное время диссипации энергии  $\tau \gg T_{osc} = 10T_{trn}$  было выше на два порядка и более, чем период, соответствующий боровской частоте перехода.

Изменение нормировки волновой функции кубита при моделировании селективного измерения можно интерпретировать следующим образом. Измерение начинается с запутывания измеряемого состояния  $|\psi\rangle = C_1|\psi_1\rangle + C_2|\psi_2\rangle$  и состояния прибора  $|\phi\rangle$  в общее состояние кубит-прибор  $|\Psi\rangle = C_1|\psi_1\rangle|\phi_1\rangle + C_2|\psi_2\rangle|\phi_2\rangle$  [5, 6]. В случае селективной редукции к выбранному базисному состоянию, которому соответствует матрица плотности  $|C_m|^2|\psi_m\rangle\langle\psi_m|$ , редуцированными матрицами плотности кубита и прибора будут  $|\psi_m\rangle\langle\psi_m|$  и  $|C_m|^2|\phi_m\rangle\langle\phi_m|$ . В результате такого измерения остается состояние  $C_m|\psi_m\rangle|\phi_m\rangle$ , в котором состояние кубита  $\exp(i\varphi_C)|\psi_m\rangle$  не запутано с окружением, а в показаниях прибора должна отражаться зависимость состояния прибора  $|C_m||\phi_m\rangle$  от модуля амплитуды вероятности  $|C_m|$  редукции кубита к базисному состоянию при неселективном измерении.

### Заключение

Суммируем некоторые черты предложенной схемы считывания кубита. Предположительно к ней применимо положение о том, что для любой заданной последовательности состояний можно построить непрерывную последовательность измерений, заставляющих систему следовать через эту последовательность состояний [2]. Предложенная схема измерения по существу соответствует классической спектроскопии в отношении селекции частот и тому, что для многих измерений существенно усреднение по времени. Можно отметить, что эта схема в целом согласуется с типичным свойством увеличения точности измерений при увеличении времени измерения. Однако в ее рамках имеется дополнительная возможность произвести точное измерение кубита за период, определяемый боровской частотой перехода между базисными состояниями кубита. Вероятностный же характер отбора состояния, к которому совершается редукция, имеет принципиальное значение для квантовых измерений, в том числе в случае непрерывных измерений в квантовых коридорах, так как центры их не определены [5, 6]. Величина вероятности редукции к отобранному состоянию в предлагаемой схеме определяется уменьшенной нормой волновой функции, как и в схеме с квантовым коридором [5]. Стоит также заметить, что даже неразрушающее считывание рабочего кубита в паре запутанных кубитов [11] сопровождается разрушающим измерением вспомогательного кубита.



Таким образом, развитие методов считывания кубита с редукцией к базисному состоянию остается важной задачей квантовой информации.

### Список литературы

1. *Нейман фон И.* Математические основы квантовой механики. М. : Наука, 1964. 367 с.
2. *Садбери А.* Квантовая механика и физика элементарных частиц. М. : Мир, 1989. 485 с.
3. *Ландау Д. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М. : Наука, 1989. 768 с.
4. *Клышко Д. Н.* Основные понятия квантовой физики с операциональной точки зрения // УФН. 1998. Т. 168. С. 975–1015. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0168.199809d.0975>
5. *Менский М. Б.* Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология. М. : Физматлит, 2001. 232 с.
6. *Менский М. Б.* Явление декогеренции и теория непрерывных квантовых измерений // УФН. 1998. Т. 168. С. 1017–1035. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0168.199809e.1017>
7. *Валиев К. А.* Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // УФН. 2005. Т. 175. С. 3–39. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0175.200501a.0003>
8. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М. : Мир, 2006. 824 с.
9. *Виницкий С. И., Пузынин И. В., Селин А. В.* Численное решение нестационарного уравнения Шредингера с повышенной точностью. Препринт ОИЯИР 11-98-44. Дубна, 1998. 14 с.
10. *Hecht F.* Freefem++. Third Edition. Version 3.58-1. Paris : Universite' Pierre et Marie Curie. 424 p. URL: <http://doc.freefem.org> (дата обращения: 26.02.2021).
11. *Yoneda J., Takeda K., Noiri A., Nakajima T., Kamioka J., Koder N., Tarucha S.* Quantum non-demolition readout of an electron spin in silicon // *Nat. Commun.* 2020. Vol. 11. Article number 1144. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-14818-8>

### References

1. *Neumann J. V.* *Matematicheskie osnovy kvantovoi mekhaniki* [Mathematische Grundlagger Quantummechanik]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 367 p. (in Russian).
2. *Sudbery A.* *Kvantovaya mekhanika i fizika elementarnykh chshastits* [Quantum Mechanics and the Particles of Nature]. Moscow, Mir Publ., 1989. 485 p. (in Russian).
3. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* *Kvantovaya mekhanika* [The Quantum Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 768 p. (in Russian).
4. *Klyshko D. N.* Basic Quantum Concepts from the Operational Viewpoint. *Phys. Usp.*, 1998, vol. 168, pp. 975–1015 (in Russian). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0168.199809d.0975>
5. *Mensky M. B.* *Kvantovye izmereniya i decogerentsiya. Modeli i fenomenologiya* [Quantum Measurements and Decoherence. Models and Phenomenology]. Moscow, Physmatlit Publ., 2001. 232 p. (in Russian).
6. *Mensky M. B.* Decoherence and the theory of continuous quantum measurements. *Phys. Usp.*, 1998, vol. 168, pp. 1017–1035 (in Russian). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0168.199809e.1017>
7. *Valiev K. A.* Quantum Computers and Quantum Computing. *Phys. Usp.*, 2005, vol. 175, pp. 3–39 (in Russian). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0175.200501a.0003>
8. *Nielsen M. A., Chuang I. L.* *Kvantovye vychisleniya i kvantovaya informatsiya* [Quantum Computation and Quantum Information]. Moscow, Mir Publ., 2006. 824 p. (in Russian).
9. *Vinitsky S. I., Puzynin I. V., Selin A. V.* *Chislennoe reshenie nestatsionarnogo uravneniya Shredingera s povyshennoy tochnostyu* [Numerical Solution of the Non Stationary Schredinger Equation with Increased Accuracy]. JINR Preprint 11-98-44. Dubna, 1998. 14 p. (in Russian).
10. *Hecht F.* *Freefem++*. Third Edition. Version 3.58-1. Paris, Universite' Pierre et Marie Curie. 424 p. Available at: <http://doc.freefem.org> (accessed 26 February 2021).
11. *Yoneda J., Takeda K., Noiri A., Nakajima T., Kamioka J., Koder N., Tarucha S.* Quantum non-demolition readout of an electron spin in silicon. *Nat. Commun.*, 2020, vol. 11, article number 1144. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-14818-8>

Поступила в редакцию 24.03.2021, после рецензирования 16.04.2021, принята к публикации 07.05.2021  
Received 24.03.2021, revised 16.04.2021, accepted 07.05.2021