

РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 4–20
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Physics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 4–20

Научная статья
УДК 537.86:517.38
<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-4-20>

Взаимная синхронизация сложных структур во взаимодействующих ансамблях нелокально-связанных ротаторов

Т. Е. Вадивасова, П. А. Аринушкин , В. С. Анищенко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени
Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Вадивасова Татьяна Евгеньевна, доктор физико-математических наук, профессор
кафедры радиофизики и нелинейной динамики, vadivasovate@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8081-2820>

Аринушкин Павел Алексеевич, аспирант кафедры радиофизики и нелинейной дина-
мики, arinushkin.pavel@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3011-8336>

Анищенко Вадим Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, за-
ведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики, <https://orcid.org/0000-0003-2255-1498>

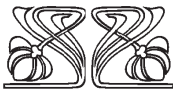
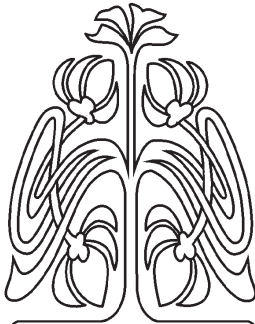
Аннотация. В работе рассматривается мало изученная на сегодняшний день задача, касающаяся особенностей взаимодействия ансамблей фазовых осцилляторов с инерцией (ротаторов) и синхронизации формирующихся в этих ансамблях сложных пространственных структур (химер и уединенных состояний). Исследуемая модель представляет собой двухслойную мультиплексную сеть ротаторов с нелокальным характером внутрислойных связей. Каждый слой состоит из 100 идентичных элементов с одинаковым значением коэффициента связи и фазового сдвига для каждого элемента внутри одного слоя. Между собой слои могут различаться частотами вращения составляющих слой элементов. Межслойная связь является симметричной. В работе рассматривается взаимодействие как идентичных слоев, в которых в отсутствие межслойной связи устанавливаются несколько различные структуры, так и слоев, характеризующихся частотной расстройкой ротаторов. Для идентичных слоев установлен эффект полной синхронизации сложных структур начиная с некоторого значения коэффициента межслойной связи. Для слоев с частотной расстройкой показан режим эффективной синхронизации, соответствующей незначительному различию фаз ротаторов во взаимодействующих слоях при полной синхронизации частот. Исследуется влияние, оказываемое на синхронизацию пространственных структур значением фазового сдвига в цепи межслойной связи.

Ключевые слова: фазовые осцилляторы с инерцией (ротаторы), химеры, уединенные состояния, синхронизация пространственных структур

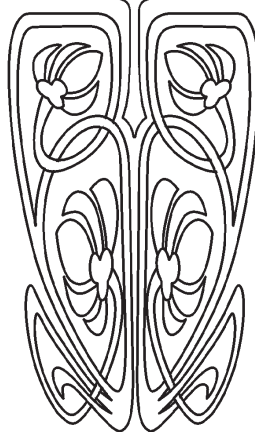
Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-12-00119).

Для цитирования: Вадивасова Т. Е., Аринушкин П. А., Анищенко В. С. Взаимная синхронизация сложных структур во взаимодействующих ансамблях нелокально-связанных ротаторов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 4–20. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-4-20>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Article

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-4-20>**Mutual synchronization of complex structures in interacting ensembles of non-locally coupled rotators**T. E. Vadivasova, P. A. Arinushkin[✉], V. S. Anishchenko

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Tatyana E. Vadivasova, vadivasovate@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8081-2820>Pavel A. Arinushkin, arinushkin.pavel@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3011-8336>Vadim S. Anishchenko, <https://orcid.org/0000-0003-2255-1498>

Abstract. Background and Objectives: One of the actual problems in nonlinear dynamics is the formation and interaction of complex spatial structures such as chimeras and solitary states arising in multicomponent systems. Chimera states are typical for ensembles of identical oscillators with regular, chaotic, and even stochastic behavior in a case of nonlocal interaction of the elements. They represent cluster structures, including groups of elements with synchronous and non-synchronous oscillations. Chimeras were discovered and investigated in real experiments, that indicates the possibility of observing such regimes in complex systems in living nature and in technology. Solitary states are less studied today. The regime of solitary states is characterized by the synchronous behavior of most elements of the ensemble, while individual oscillators behave in a “special state”. In the present work, an ensemble of phase oscillators with inertia (rotators) is chosen as the basic model for investigation. Such ensembles with a specific coupling topology are widely used in modeling the operation of energy networks. Ensembles of rotators with nonlocal coupling are characterized by both chimera states and solitary state regimes. The problem of interaction of ensembles of rotators with nonlocal coupling and synchronization of complex spatial structures (chimeras and solitary states) formed in them has not been studied yet. **Materials and Methods:** A two-layer multiplex network of rotators with a nonlocal character of intralayer interactions is considered. Each layer consists of 100 elements with the same value of the coupling coefficient and coupling phase shift for each element within one layer. The interlayer coupling is symmetric. At the initial stage, with a random choice of initial conditions, steady regimes (chimeras or solitary states) in non-interacting layers were found. Next, the interlayer coupling was introduced and the evolution of the layer dynamics in the selected initial regimes was studied. Four cases of interaction with various initial states of the layers were considered. In the first case, the two layers are completely identical and demonstrate slightly different chimera structures without interlayer coupling. Their evolution with the introduction and growth of the interlayer coupling is considered for two values of the coupling phase shift. It is shown that, starting from a certain threshold value of the interlayer coupling coefficient, the complete synchronization regime is established in the layers, and the coupling phase shift significantly affects the value of the synchronization threshold. In the second case, the previous experiment is reproduced for the two layers with a frequency mismatch. Chimera states established without interlayer interaction are characterized by significantly different average frequencies of the elements in the two layers. In the presence of non-identity of the layers (in this case, frequency mismatch), the regime of complete synchronization of spatial structures is impossible. However, with an increase in the interlayer coupling coefficient, effective synchronization can be obtained which corresponds to a slight difference in the phases of rotators in the interacting layers with full frequency synchronization. In the third case, we consider the interaction between the layers in the solitary state regimes with different spatial structures. In this case, a frequency mismatch is also introduced for the elements of the two layers. For solitary states, the effective synchronization regime with an increase in the interlayer coupling is also established. In both layers the same configurations of solitary states are realized and frequency synchronization is observed. In the fourth case, a heterogeneous multiplex network is considered, in which one layer is in the chimera state, the second layer shows the solitary state mode. With a certain strength of the interlayer coupling the complex structures are destroyed in both layers of the network and a spatially uniform regimes are established. In this case, all the rotators of the two layers rotate at the same frequency, and the difference in the regimes in the layers reduces to a small phase shift, the same for all pairs of coupled rotators of the two layers. **Conclusion:** The effects of synchronization in the multiplex network were established for two layers in the regimes of complex spatio-temporal dynamics, such as chimera states and solitary states. The influence of the frequency mismatch of the network elements and the phase shift in the interlayer coupling on the synchronization phenomena was studied.

Keywords: phase oscillators with inertia (rotators), chimeras, solitary states, synchronization of spatial structures

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-12-00119).

For citation: Vadivasova T. E., Arinushkin P. A., Anishchenko V. S. Mutual synchronization of complex structures in interacting ensembles of non-locally coupled rotators. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Physics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 4–20 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-4-20>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Синхронизация колебаний взаимодействующих систем является фундаментальным нелинейным эффектом и играет важнейшую роль во многих процессах в живой природе и технике [1, 2]. Эффекты синхронизации присущи не только отдельным осцилляторам, но и сложным ансамблям и распределенным системам [3–5]. В

последние годы большое внимание уделяется исследованию синхронизации пространственно-временной динамики взаимодействующих ансамблей осцилляторов и осцилляторных сетей [6–10]. Особо можно выделить проблему синхронизации ансамблей и многослойных сетей в режиме сложных пространственных структур, таких как химерные состояния. Химерные состояния, возникающие в



ансамблях идентичных осцилляторов различного типа (как с регулярной, так и с хаотической динамикой), были исследованы ранее в ряде работ (см., например, [11–18]). Химеры можно рассматривать как особый случай кластерной синхронизации, когда элементы ансамбля разбиваются на группы с почти синхронным поведением (кластеры когерентности) и полностью несинхронным поведением (кластеры некогерентности). Химерные состояния наиболее характерны для ансамблей с нелокальными регулярными связями, хотя, в некоторых случаях, встречаются и при другой топологии связей [19–24]. Сложная динамика и явление взаимной и вынужденной синхронизации взаимодействующих ансамблей и слоев многослойной сети, демонстрирующих режимы химер, исследовались в работах [25–31]. Основная доля работ, посвященных химерным состояниям, рассматривает в качестве моделей ансамбли фазовых осцилляторов Курамото–Сакагучи (Kuramoto–Sakaguchi) [11, 12, 19, 21, 25, 27, 32–35] или ансамбли периодических генераторов [16, 20, 22, 23, 26, 36–38], динамика которых качественно в фазовом приближении может быть сведена к модели Курамото. Имеются также работы, в которых исследуются ансамбли хаотических автогенераторов и отображений, демонстрирующих химерные состояния [13, 18, 28–31].

Одной из базовых моделей нелинейной динамики, для которой характерны сложные пространственные структуры, является ансамбль фазовых осцилляторов с инерцией (ротаторов). Данная модель представляет собой обобщение фазовой модели Курамото, учитывающее инерцию фазовой динамики элементов. Ансамбли осцилляторов с инерцией, обычно с глобальной связью, исследовались во многих работах, например [39–42]. Модель взаимодействующих ротаторов с учетом нелинейности используется во многих технических задачах, таких как динамика массива контактов Джозефсона [43–47] и ансамбль связанных маятников [48, 49]. Данная модель, при соответствующем выборе конфигурации и параметров связей, широко применяется при анализе функционирования энергетических сетей [50–52].

Динамика ансамблей осцилляторов с инерцией является более разнообразной, чем в случае фазовой модели Курамото–Сакагучи. Даже в случае простой формы глобальной связи (без подбора специальных характеристик, как в [19], [47]) такой ансамбль может демонстрировать по-

явление химероподобных кластеров [53]. Химерные состояния и сложная динамика во времени, наблюдающиеся во взаимодействующих ансамблях глобально-связанных ротаторов, описаны в [54, 55]. В случае нелокального взаимодействия с конечным радиусом в ансамбле ротаторов также в широкой области значений параметров наблюдаются химерные состояния [45, 56] и кроме того, существуют так называемые уединенные состояния [56, 57]. Режим уединенных состояний наблюдался в ансамблях осцилляторов Курамото с комбинированным (отталкивающе-притягивающим) характером взаимодействия [58, 59], а также в ансамблях нелокально-связанных хаотических отображений [60–62], где был установлен новый тип химерной структуры, возникающей на основе уединенных состояний [63]. Режим уединенных состояний характеризуется синхронным поведением большинства элементов ансамбля, демонстрирующих одно состояние и «особым» поведением отдельных элементов, находящихся в другом состоянии.

В целом ансамбли осцилляторов с инерцией в случае нелокальной связи исследовались еще сравнительно мало. В частности, взаимодействие и синхронизация сложных структур в таких ансамблях, насколько нам известно, еще не рассматривалась. В то же время здесь может быть поставлен ряд интересных задач, касающихся синхронизации не только химерных состояний, но и различных уединенных состояний, рассмотрено влияние частотной расстройки и эффект синхронизации частот взаимодействующих структур.

Настоящая работа посвящена рассмотрению указанных выше задач. Цель работы состоит в исследовании эффектов взаимной синхронизации взаимодействующих ансамблей ротаторов при нелокальном характере связей внутри ансамблей. Рассматриваются два таких ансамбля, составляющие двухслойную мультиплексную сеть. Исследуется синхронизация ансамблей в режиме сложных пространственных структур, таких как химеры и уединенные состояния. Устанавливаются особенности полной синхронизации идентичных ансамблей в режиме различающихся между собой структур, а также частотной синхронизации при наличии расстройки частот элементов двух ансамблей. Исследуется случай взаимодействия ансамблей с сильно различающимися пространственными структурами. Кроме того, анализируется влияние на эффект синхронизации величины фазового сдвига в слагаемом связи между ансамблями.



1. Исследуемая система

В последние годы в сфере нелинейной динамики и самоорганизации сетей большой интерес представляет изучение синхронизации взаимодействующих осцилляторов в сложных топологиях и сетях. Такие системы обладают пространственно-временной динамикой ансамблей осцилляторов и

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_{1i} + \lambda_1 \dot{\phi}_{1i} &= \gamma_1 + \frac{\sigma_1}{2P_1} \sum_{j=i-P_1}^{i+P_1} \sin(\varphi_{1j} - \varphi_{1i} - \alpha_1) + \kappa_{12} \sin(\varphi_{1i} - \varphi_{2i} - \beta_{12}), \\ \ddot{\phi}_{2i} + \lambda_2 \dot{\phi}_{2i} &= \gamma_2 + \frac{\sigma_2}{2P_2} \sum_{j=i-P_1}^{i+P_1} \sin(\varphi_{2j} - \varphi_{2i} - \alpha_{2i}) + \kappa_{21} \sin(\varphi_{2i} - \varphi_{1i} - \beta_{21}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$i = 0, 2, \dots, N - 1, \quad \varphi_{vi \pm N}(t) = \varphi_{vi}(t), \quad \dot{\phi}_{vi \pm N}(t) = \dot{\phi}_{vi}(t), \quad v = 1, 2,$$

где φ_{vi} – фаза i -го ротатора в слое $v = 1, 2$; λ_v , γ_v – параметры ротаторов в слое v ; σ_v , P_v , α_v – параметры внутрислойной связи между ротаторами в слое v (коэффициент связи, число соседей с одной стороны и фазовый сдвиг в цепи связи соответственно); κ_{vl} , β_{vl} , ($v, l = 1, 2$) – параметры межслойной связи (сила связи и фазовый сдвиг). Рассматривались слои длиной $N = 100$ элементов. Параметры ротаторов λ_v и число соседей P_v в обоих слоях полагались одинаковыми со следующими фиксированными значениями: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0.1$; $P_1 = P_2 = P = 40$. Значения σ_v и α_v выбирались в соответствии с исследуемым режимом. При расчетах использовались параметры слоя, приведенные в работах [56, 57]. Для получения химеры выбирались значения $\sigma_v = 0.013$ и $\alpha_v = 1.5558$; для уединенных состояний: $\sigma_v = 0.08$ и $\alpha_v = 0.6$. Взаимная связь элементов двух слоев полагается симметричной: $\kappa_{12} = \kappa_{21} = \kappa$, $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta$. Параметры межслойной связи κ и β являются контрольными параметрами при исследовании взаимодействия и синхронизации слоев. Слабая расстройка слоев вводится с помощью параметров γ_1 и γ_2 , которые управляют частотой вращений ротаторов и слабо влияют на пространственные структуры, формирующиеся в слоях.

Начальные значения фаз φ_{vi} ротаторов в обоих слоях задавались случайным образом в интервале $[0, 2\pi]$, а начальные значения мгновенных частот вращения $\dot{\phi}_{vi}$ – в интервале $[-0.1, 0.1]$. Система (1) интегрировалась в отсутствие связи между слоями на достаточно большом времени (порядка 10000 единиц безразмерного времени),

наличием в них химерных структур. Исследуется мультиплексная сеть из двух слоев, каждый из которых представляет собой кольцо идентичных фазовых осцилляторов с инерцией (ротаторов), соединенных нелокальными связями с конечным радиусом. Уравнения исследуемой системы в безразмерных переменных имеют вид:

пока в слоях не устанавливались стационарные структуры. Из множества режимов, полученных для различных случайных начальных условий при соответствующих значениях параметров, были выбраны режимы, соответствующие химерам или уединенным состояниям. Структуры в двух слоях при одинаковых параметрах являются однотипными, но при этом достаточно сильно отличаются друг от друга. Соответствующие этим установившимся структурам значения переменных используются в качестве начальных условий при исследовании взаимодействия слоев.

Интегрирование системы (1) проводилось методом Рунге – Кутты 4-го порядка с шагом $h = 0.01$. По результатам интегрирования строились мгновенные пространственные профили в двух слоях, которые представляют собой множества значений $\sin(\varphi_{vi}(t_n))$, фиксируемых в один выбранный момент времени, а также рассчитывались средние частоты вращения ротаторов:

$$\begin{aligned} \omega_{vi}^m &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{vi}(T) - \varphi_{vi}(0)}{T}, \\ v &= 1, 2, \quad i = 0, 2, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Расчеты средних частот проводились в установившемся динамическом режиме. Для оценки синхронизации структур в двух слоях рассчитывался средний по всем элементам колец квадрат синуса разности мгновенных фаз соответствующих ротаторов:

$$\delta(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi_{2i}(t) - \varphi_{1i}(t)). \quad (3)$$



По абсолютной величине δ в установившемся режиме можно оценить степень синхронности структур в двух слоях. Изменение величины δ во времени позволяет оценить скорость установления режима синхронизации.

2. Синхронизация слоев в режиме химерных состояний

Положим $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и исследуем эволюцию двух химерных структур, устанавливающихся в слоях без связи при $\sigma = 0.013$ и $\alpha = 1.5558$, вводя межслойную связь и увеличивая коэффициент κ . При этом рассмотрим случай двух полностью идентичных слоев и случай двух слоев с расстройкой параметров γ_1 и γ_2 . Выясним, влияет ли на результирующий режим выбор фазового сдвига межслойной связи β . Расчеты проводились при двух значениях фазового сдвига: в первом случае он выбирался равным фазовому сдвигу связи внутри слоев ($\beta = \alpha = 1.5558$); во втором случае фазовый сдвиг связи слоев отсутствовал ($\beta = 0$).

2.1. Синхронизация идентичных слоев с различными химерными структурами

Рассмотрим случай полностью идентичных слоев, положив $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0$, как это полагалось для одного кольца ротаторов в [56, 57]. Исследуемые химерные состояния, устанавливающиеся в двух слоях в отсутствие взаимодействия, проиллюстрированы на рис. 1, *a–z*.

На графиках, приведенных на рис. 1, *a, в*, показаны мгновенные распределения в пространстве значений величины $\sin(\varphi_{vi})$ в двух слоях. При рассмотрении мгновенного профиля удобнее использовать синусы фаз, так как значения фаз, близкие к нулю и 2π , можно считать близкими, но на профилях φ_{vi} они сильно различаются, что мешает визуально выделить когерентный кластер. Представленные профили свидетельствуют о существовании в каждом слое однотипных химер, состоящих из двух кластеров: некогерентного с большим разбросом мгновенных фаз и когерентного – в котором фазы ротаторов некоторым образом группируются. Кластеры в двух слоях смещены вдоль пространственной координаты i . Распределения средних частот ротаторов в двух слоях, рассчитываемых по формуле (2), даны на рис. 1, *б и 1, г*. Средние частоты в области неко-

герентного кластера возрастают по сравнению с частотами в когерентном кластере. Для двух слоев распределения однотипны, характеризуются близкими значениями частот в когерентном и некогерентном кластерах, но, аналогично пространственно-временным профилям, имеют смещение в пространстве.

При введении достаточно слабой связи можно наблюдать режим полной синхронизации пространственно-временной динамики двух слоев в некотором химерном состоянии. Пример такого установившегося синхронного режима проиллюстрирован на рис. 1, *д, е*. Мгновенные пространственные профили и распределения средних частот в обоих слоях, приведенные на одних и тех же фрагментах (рис. 1, *д* и рис. 1, *е* соответственно), полностью совпадают.

Рассмотрим, как влияет на динамику слоев введение межслойной связи при двух значениях фазового сдвига связи: $\beta = 1.5558$ (чуть больше $\pi/2$) и $\beta = 0$. Результаты расчетов приведены на рис. 2. Графики слева (на фрагментах *a* и *в* получены при $\beta = 1.5558$, а справа (*б* и *г*) – при $\beta = 0$). На рис. 2, *a* и *2 б*, показано, как ведет себя во времени величина $\delta(t)$, характеризующая степень близости структур в слоях, при различных значениях κ и β . В случае $\beta = 1.5558$ при слабой связи $\kappa = 0.01$ наблюдаются значительные осцилляции величины δ во времени, которые сохраняются на больших временах наблюдения. Это говорит об отсутствии синхронизации поведения слоев, несмотря на их полную идентичность. Для соответствующей перестройки различающихся начальных структур (см. рис. 1) требуется более сильная связь. С ростом κ в слоях устанавливается режим полной синхронизации. Так, при $\kappa = 0.1$ значение величины $\delta(t)$ в пределах погрешности вычислений достаточно быстро спадает до нуля (см. рис. 2, *a*). В случае $\beta = 0$ порог синхронизации структур уменьшается и уже при $\kappa = 0.01$ величина $\delta(t)$ сходится к нулю. При $\kappa = 0.1$ процесс установления идентичных структур происходит еще быстрее (см. рис. 2, *б*). Поведение мгновенных частот элементов первого и второго слоя $\omega_{vi}(t) = \dot{\varphi}_{vi}(t)$ при $\kappa = 0.01$ и двух разных значениях β проиллюстрировано на рис. 2, *в* и *2, г* на примере ротаторов с номером $i = 0$ (выбор ротаторов здесь не принципиален). Следует отметить, что как мгновенные, так и

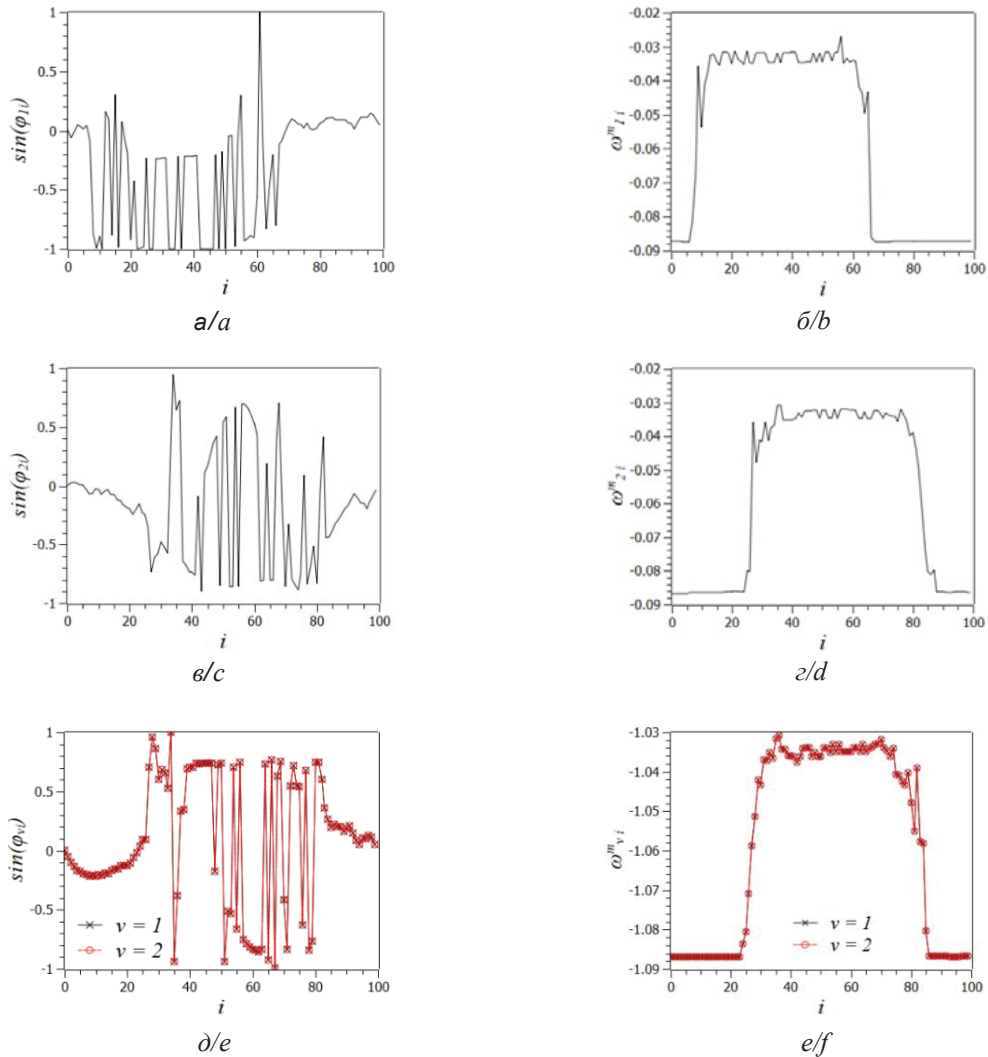


Рис. 1. Установившиеся химерные состояния в двух идентичных слоях ротаторов в отсутствие межслойной связи ($\kappa = 0$) и при наличии межслойной связи с параметрами $\kappa = 0.1, \beta = 1.5558$: a, b – мгновенные пространственные профили $\sin(\varphi_{v,i}(t_n))$, $v = 1, 2$ в первом и втором слоях без связи; b, d – соответствующие распределения средних частот ротаторов $\omega_{v,i}^m$ в отсутствие связи; d – мгновенные пространственные профили синхронизированных химерных состояний при взаимодействии слоев; e – соответствующие распределения средних частот. Параметры слоев идентичны: $N = 100; \lambda = 0.1; P = 40; \sigma = 0.013; \alpha = 1.5558, \gamma = 0$. Время установления в отсутствие межслойной связи 10000 единиц. Время установления при наличии связи 5000 единиц

Fig. 1. Steady chimera states in two identical layers of rotators without interlayer coupling ($\kappa = 0$) and in the presence of interlayer coupling with parameters $\kappa = 0.1, \beta = 1.5558$: a, c – instantaneous spatial profiles $\sin(\varphi_{v,i}(t_n))$, $v = 1, 2$ for the first and the second layers without coupling; b, d – the corresponding distributions of the average frequencies of the rotators. The parameters of the layers are identical: $N = 100; \lambda = 0.1; P = 40; \sigma = 0.013; \alpha = 1.5558, \gamma = 0$. The transient time without interlayer coupling is equal to 10000 units of system dimensionless time. The transient time in the presence of coupling is 5000 units

средние частоты рассматриваемых ротаторов в исходном режиме в отсутствие связи различны (см. рис. 1). При $\beta = 1.5558, \kappa = 0.01$ мгновенные частоты остаются различными, хотя и становятся

ближе (см. рис. 2, b). При $\beta = 0$ и том же значении силы связи мгновенные частоты ротаторов $i = 0$ в двух слоях быстро сходятся и становятся одинаковыми (см. рис. 2, d).

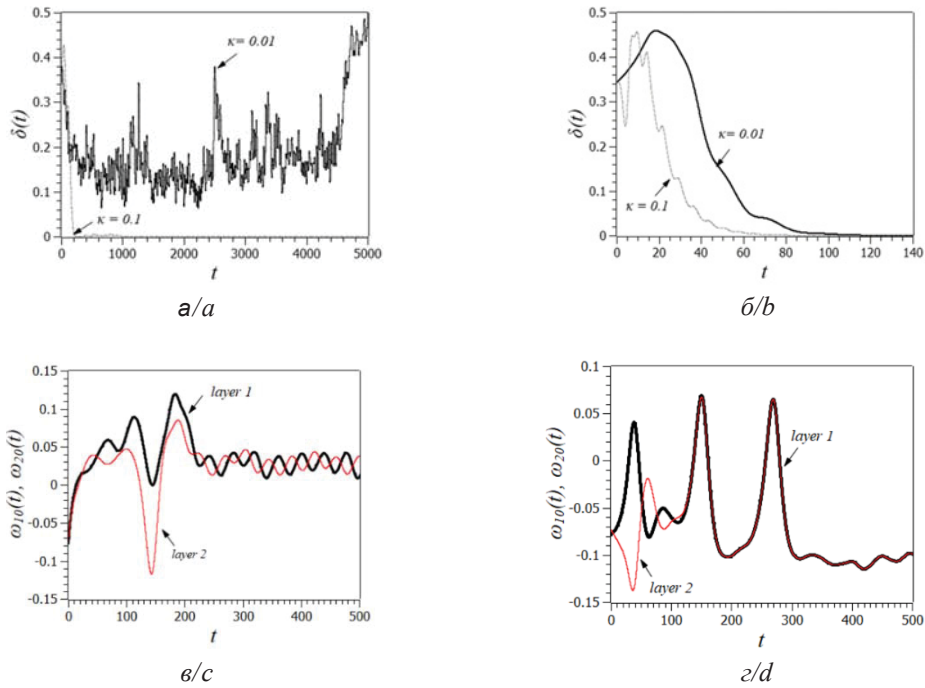


Рис. 2. Эволюция поведения слоев в присутствии межслойной связи: зависимость величины δ от времени при двух различных значениях параметра связи κ и фазовых сдвигах $\beta = 1.5558$ (а) и $\beta = 0$ (б); изменение во времени мгновенных частот элементов первого и второго слоя $\omega_{vi}(t) = \dot{\phi}_{vi}(t)$, $i = 0$ при $\kappa = 0.01$ и фазовых сдвигах $\beta = 1.5558$ (в) и $\beta = 0$ (г)
 Fig. 2. Evolution of the layer behavior in the presence of interlayer coupling: the time dependence of δ for two different values of the coupling parameter κ and the phase shift: $\beta = 1.5558$ (a) and $\beta = 0$ (b); time realizations of the instantaneous frequencies of the elements of the first and the second layers $\omega_{vi}(t) = \dot{\phi}_{vi}(t)$, $i = 0$ at $\kappa = 0.01$ and the phase shift: $\beta = 1.5558$ (c) and $\beta = 0$ (d)

Таким образом, различающиеся химерные структуры в двух идентичных слоях ротаторов синхронизируются при введении достаточно слабой связи между слоями, причем порог синхронизации зависит от сдвига фазы межслойной связи. При нулевом фазовом сдвиге $\beta = 0$ синхронизация структур происходит при меньшем коэффициенте связи и синхронный режим устанавливается быстрее во времени. Интересно также отметить тот факт, что полной (фазовой) синхронизации структур предшествует (по параметру κ) синхронизация средних частот вращения взаимодействующих ротаторов в двух слоях.

2.2. Синхронизация слоев в режиме химерных состояний при наличии частотной расстройки

Теперь рассмотрим, к чему приведет взаимодействие химерных состояний в слоях с частотной расстройкой. В качестве начальных состояний возьмем те же установившиеся химерные режимы, которые были получены в идентичных

слоях без связи, и введем расстройку параметров γ_1 и γ_2 , влияющих на частоты вращения ротаторов в двух слоях. В отсутствие межслойной связи уравнения (1) инвариантны относительно замены $\phi_{vi}(t) = \phi_{vi}(t) + \gamma_v t / \lambda_v$, т.е. для каждого слоя можно перейти во вращающуюся систему координат, изменив значение γ_v так, что пространственная структура в слое останется неизменной. При введении межслойной связи такая инвариантность, строго говоря, нарушается, однако, как показало численное моделирование, устанавливающиеся в слоях состояния по своей пространственной структуре мало отличаются от исходных состояний, наблюдавшихся при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Положим $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$. В результате частоты ротаторов в разных слоях существенно сдвигаются (в область отрицательных и положительных значений для слоя 1 и слоя 2 соответственно). Характеристики режимов во невзаимодействующих слоях и в режиме синхронизации при введении межслойной связи показаны на рис. 3.

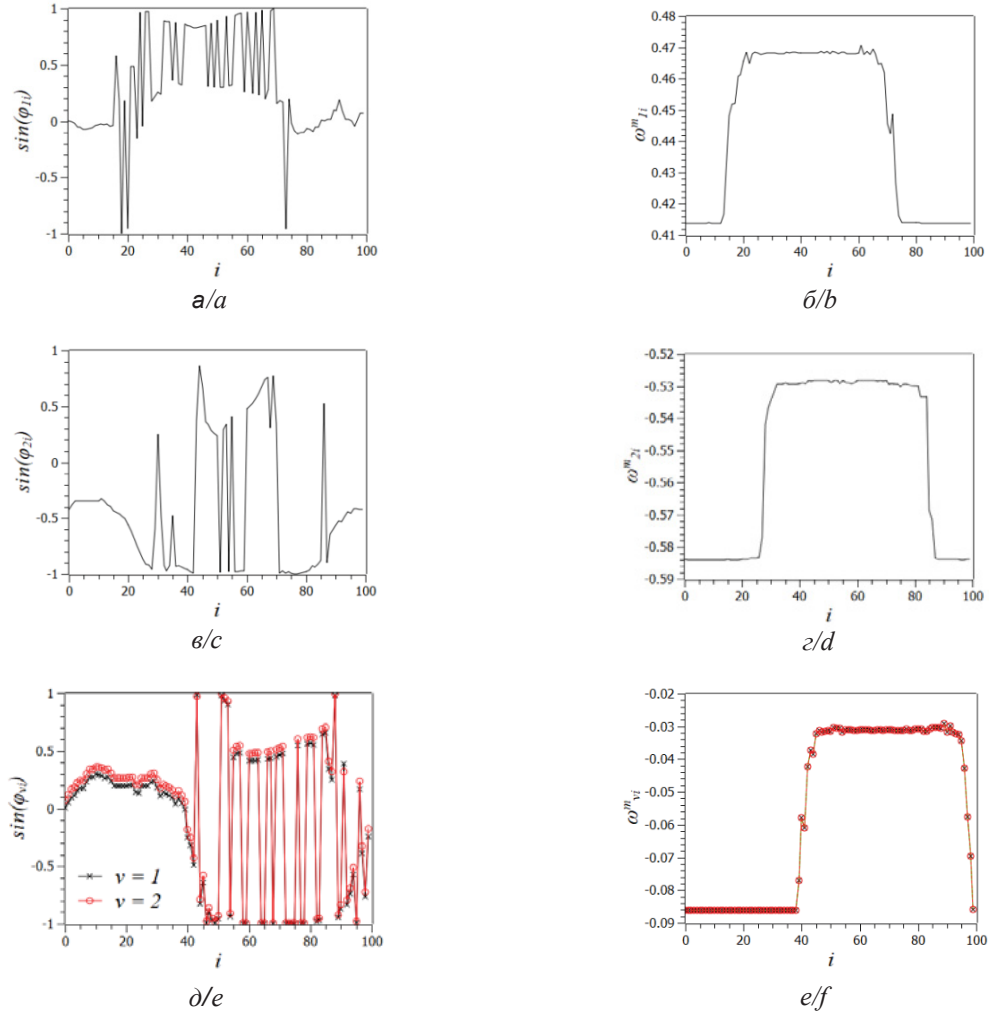


Рис. 3. Установившиеся химерные состояния в двух неидентичных слоях ротаторов при $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$ в отсутствие взаимодействия ($\kappa = 0$) и при наличии межслойной связи с параметрами $\kappa = 0.7$, $\beta = 0$: а, в – мгновенные пространственные профили $\sin(\varphi_{vi}(t_n))$, $v = 1, 2$ в первом и втором слоях без связи; б, г – соответствующие распределения средних частот ротаторов ω_{vi}^m в отсутствие связи; д – мгновенные пространственные профили синхронизованных химерных состояний при взаимодействии слоев; е – соответствующие распределения средних частот. Другие параметры слоев: $N = 100$; $\lambda = 0.1$; $P = 40$; $\sigma = 0.013$; $\alpha = 1.5558$. Время установления в отсутствие межслойной связи 10000 единиц. Время установления при наличии связи 5000 единиц

Fig. 3. Steady chimera states in two non-identical layers of rotators at $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$ without interaction ($\kappa = 0$) and in the presence of interlayer coupling with parameters $\kappa = 0.7$, $\beta = 0$: а, с – instantaneous spatial profiles $\sin(\varphi_{vi}(t_n))$, $v = 1, 2$ for the first and the second layers without coupling; б, д – the corresponding distributions of the average frequencies ω_{vi}^m ; е – instantaneous spatial profiles of the synchronized chimera states in the presence of interlayer interaction; ф – the corresponding distributions of the average frequencies of rotators. The other parameters of the layers are: $N = 100$; $\lambda = 0.1$; $P = 40$; $\sigma = 0.013$; $\alpha = 1.5558$. The transient time without interlayer coupling is equal to 10000 units. The transient time in the presence of coupling is 5000 units

При введении связи между слоями динамические режимы меняются, но синхронизация наблюдается только при сильной связи. При этом, так же, как и в случае идентичных слоев, синхронизация зависит от фазового сдвига, вно-

симого межслойной связью. Так, при $\beta = 1.5558$ и заданной расстройке синхронизация не наблюдается, по крайней мере, в области рассмотренных значений $\kappa \leq 1$. Отсутствует не только синфазное поведение ротаторов, но и средние частоты соот-



ветствующих элементов остаются различными. При той же силе связи, но при нулевом фазовом сдвиге $\beta = 0$ имеет место синхронизация слоев, близкая к полной (рис. 3, *д, е*).

Поведение во времени величины $\delta(t)$ при $\kappa = 0.7$ и двух различных значениях β ($\beta = 1.5558$ и $\beta = 0$) проиллюстрировано на рис. 4, *а, б*. В случае $\beta = 0$ не только распределения средних частот в слоях совпадают, но и средний квадрат синуса разности фаз $\delta(t)$ сходится почти к малой постоянной величине $\delta \approx 0.005$. При наличии рас-

стройки параметров слоев полная синхронизация (т.е. $\delta = 0$) в строгом смысле невозможна и в установившемся режиме имеется малое отклонение от строгой синхронизации структур. Пороговое значение коэффициента связи, соответствующее синхронизации слоев (с некоторой фиксированной малой ошибкой δ), уменьшается с уменьшением частотной расстройки ротаторов, т.е. расстройки параметров $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$, достигая минимального значения при идентичности слоев, когда имеет место строгая синхронизация.

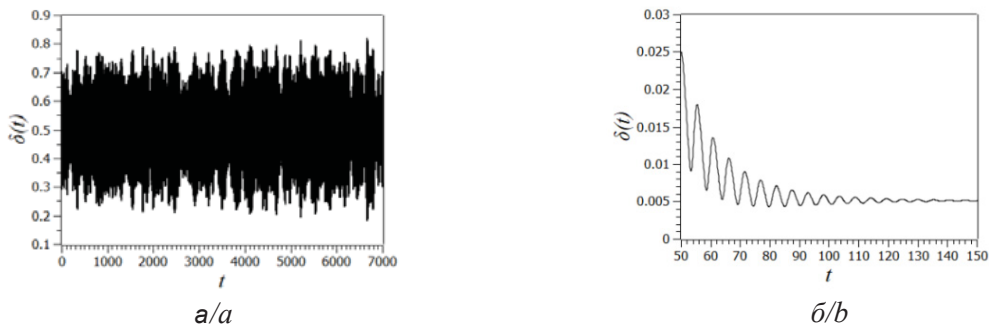


Рис. 4. Зависимость величины δ от времени при $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$, коэффициенте межслойной связи $\kappa = 0.7$ и двух значениях фазового сдвига $\beta = 1.5558$ (*а*) и $\beta = 0$ (*б*). Параметры слоев: $N = 100$; $\lambda = 0.1$; $P = 40$; $\sigma = 0.013$; $\alpha = 1.5558$. Время установления в отсутствие межслойной связи 10000 единиц

Fig. 4. Time dependence of δ for $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$, interlayer coupling coefficient $\kappa = 0.7$ and for two values of the phase shift $\beta = 1.5558$ (*a*) and $\beta = 0$ (*b*). The network parameters: $N = 100$; $\lambda = 0.1$; $P = 40$; $\sigma = 0.013$; $\alpha = 1.5558$. The transient time without interlayer coupling is 10000 units

3. Синхронизация слоев в режиме уединенных состояний

Рассмотрим теперь взаимодействие слоев, в которых реализовались однотипные, но количественно различные режимы уединенных состояний. По-прежнему будем полагать $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Параметры слоев, соответствующие режиму уединенных состояний, так же, как и в случае химерных структур, были взяты из [56, 57]: $\sigma = 0.08$, $\alpha = 0.6$. Была введена расстройка параметров: $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$. Расчеты, так же как в режиме химер, проводились при двух значениях фазового сдвига: в первом случае он выбирался равным фазовому сдвигу связи внутри слоев ($\beta = \alpha = 0.6$), во втором случае равнялся нулю. Характеристики установившихся режимов уединенных состояний в двух слоях в отсутствие межслойной связи приведены на рис. 5, *а-г*. Там же на рис. 5, *д, е* приведен пример синхронного режима, устанавливающегося при наличии

связи. На мгновенных пространственных профилях (см. рис. 5, *а, в*) хорошо видны особые (уединенные) состояния отдельных элементов, отличные от состояний большинства ротаторов. В первом слое в уединенном состоянии находится единственный элемент с номером $i = 68$. Во втором слое имеется пять таких элементов с номерами $i = 49, 52, 53, 55, 82$. Мгновенные фазы всех элементов в основном состоянии в рассматриваемые моменты времени почти одинаковы и группируются вблизи значений $0, \pi, 2\pi$. Средние частоты вращения всех ротаторов в основном состоянии почти одинаковы. В первом слое они составляют $\omega_{1i}^m = 0.04896 \pm 10^{-5}$, а во втором – $\omega_{2i}^m = -0.92398 \pm 10^{-5}$. Частоты вращения, характерные для уединенных состояний, отличаются от частот, соответствующих основным состояниям, и для обоих слоев они больше, чем основные частоты (см. рис. 5, *б, г*). Так, единственный «особый» ротатор в первом

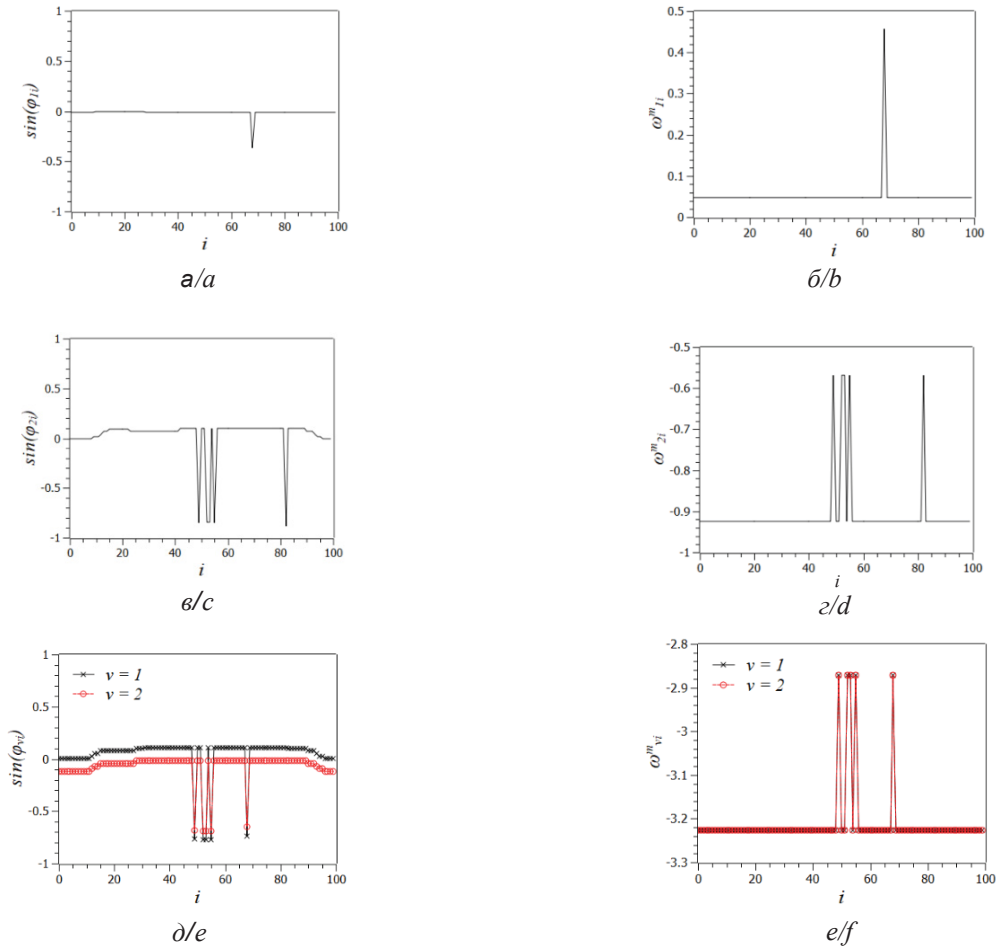


Рис. 5. Установившиеся режимы уединенных состояний в двух слоях ротаторов при $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$ в отсутствие взаимодействия ($\kappa = 0$) и при наличии межслойной связи с параметрами $\kappa = 0.5$, $\beta = 0.6$: а, в – мгновенные пространственные профили $\sin(\varphi_{vi}(t_n))$, $v = 1, 2$ в первом и втором слоях без связи; б, г – соответствующие распределения средних частот ротаторов ω_{vi}^m в отсутствие связи; д – мгновенные пространственные профили синхронизованных уединенных состояний при взаимодействии слоев; е – соответствующие распределения средних частот. Другие параметры слоев: $N = 100$; $\lambda = 0.1$; $P = 40$; $\sigma = 0.08$; $\alpha = 0.6$. Время установления в отсутствие межслойной связи 10000 единиц. Время установления при наличии связи 5000 единиц

Fig. 5. Steady regimes of solitary states in the two layers of rotators at $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$ without interaction ($\kappa = 0$) and in the presence of interlayer coupling with parameters $\kappa = 0.5$, $\beta = 0.6$: а, с – instantaneous spatial profiles $\sin(\varphi_{vi}(t_n))$, $v = 1, 2$ for the first and the second layers without coupling; б, д – the corresponding distributions of the average frequencies ω_{vi}^m ; е – the instantaneous spatial profiles of the synchronized solitary states in the presence of interlayer interaction; ф – the corresponding distributions of the average frequencies. Other parameters of the layers: $N = 100$; $\lambda = 0.1$; $P = 40$; $\sigma = 0.08$; $\alpha = 0.6$. The transient time without interlayer coupling is 10000 units. The transient time in the presence of coupling is 5000 units

слой имеет частоту $\omega_{1i}^m = 0.456639$, $i = 68$. Частоты уединенных состояний во втором слое также равны в пределах численной погрешности: $\omega_{2i}^m = -0.56930 \pm 10^{-5}$.

Введем связь между слоями. Рассмотрим значение фазового сдвига межслойной связи, совпадающее со значением внутри слоев:

$\beta = 0.6$. Несмотря на одинаковые начальные условия, соответствующие установившимся в слоях структурам, проиллюстрированным на рис. 5, а–д, при разных значениях коэффициента κ структуры, возникающие во взаимодействующих слоях, могут иметь различные уединенные состояния, отличающиеся от исходных. Сте-



пень синхронности слоев при этом возрастает с ростом силы связи. При сравнительно слабой связи $\kappa = 0.2$ в обоих слоях имеется один и тот же набор уединенных состояний. Причем номера элементов, находящихся в этих состояниях, те же самые, что и в отсутствие взаимодействия слоев. Интересно также отметить, что частоты уединенных состояний (кроме частоты элемента $i = 68$), в обоих слоях становятся близкими. Можно говорить об объединении уединенных состояний двух слоев и о частичном захвате частот уединенных состояний за исключением элемента $i = 68$. В то же время частоты ротаторов в основных состояниях для двух слоев имеют существенно разные значения. При $\kappa = 0.3$ в обоих слоях устанавливается несколько иная пространственная структура из уединенных состояний. При этом частоты в основных состояниях и в части уединенных состояний для первого и второго слоев становятся одинаковыми. Однако частоты уединенных состояний, наблюдающихся в обоих слоях при $i = 68$, значительно отличаются. При $\kappa = 0.3$ имеет место частотная синхронизация всех соответствующих ротаторов в двух слоях, за исключением ротаторов с номером $i = 68$. При $\kappa = 0.5$ структура уединенных состояний снова меняется. В обоих слоях наблюдается одинаковый набор уединенных состояний – это элементы с номерами $i = 49, 52, 53, 55, 68$. Частоты всех пар ротаторов в двух слоях совпадают с точностью до пятого знака. В основных состояниях они равны

$\omega_{vi}^m = -3.226374 \pm 10^{-6}$, $v = 1, 2$. Во всех уединенных состояниях имеем: $\omega_{vi}^m = -2.871366 \pm 10^{-6}$, $v = 1, 2, i = 49, 52, 53, 55, 68$. Таким образом, при $\kappa = 0.5$ имеет место режим частотной синхронизации всех элементов двух слоев. Он проиллюстрирован на рис. 5, *д, е*. Распределения средних частот в двух слоях с высокой точностью совпадают (см. рис. 5, *д*). Синхронизация фаз не является полной, о чем свидетельствует количественное различие единовременных мгновенных пространственных профилей в двух слоях (см. рис. 5, *д*).

Не только средние, но и мгновенные значения частот вращения ротаторов в двух слоях стремятся стать одинаковыми. Примером этого могут служить зависимости от времени мгновенных частот осцилляторов с номером $i = 0$ в двух слоях, рассчитанные для тех же значений параметров, что и графики на рис. 5. Они приведены на рис. 6, *б*. Зависимость характеристики полной синхронизации двух слоев $\delta(t)$ представлена на рис. 6, *а*. Она показывает, что погрешность синхронизации не стремится к нулю, а выходит на постоянный уровень $\delta \approx 0.015$, что соответствует небольшому постоянному сдвигу фаз между ротаторами двух слоев. При фазовом сдвиге межслойной связи $\beta = 0$ наблюдается аналогичная картина синхронизации слоев, хотя значения частот ротаторов, как в основном, так и в уединенных состояниях, будут другими.

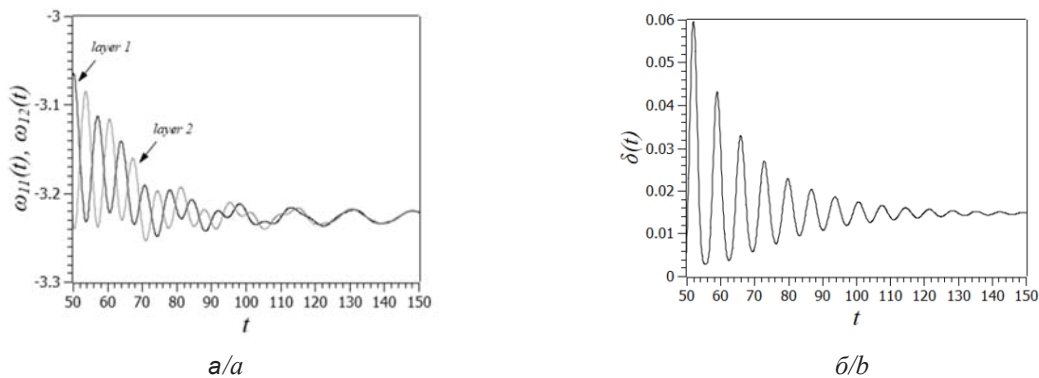


Рис. 6. Взаимодействие слоев в режиме уединенных состояний при $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$, $\kappa = 0.5$, $\beta = 0.6$. Зависимость от времени величины δ (а) и мгновенных частот элементов первого и второго слоя $\omega_{vi}(t) = \dot{\varphi}_{vi}(t)$, $i = 0$ (б). Параметры слоев и время установления соответствуют рис. 5

Fig. 6. Interaction of the layers in the solitary state regime at $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = -0.05$, $\kappa = 0.5$, $\beta = 0.6$. Time dependence of δ (a) and of the instantaneous frequencies of the elements of the first and the second layers $\omega_{vi}(t) = \dot{\varphi}_{vi}(t)$, $i = 0$ (b). The parameters of the layers and the transient time correspond to Fig. 5



4. Взаимодействие сильно неоднородных слоев в режиме качественно различных структур

Наконец, рассмотрим взаимодействие сильно неоднородных слоев, в которых установились состояния различного типа. Пусть первый слой имеет параметры $\gamma_1 = 0.05$, $\sigma_1 = 0.013$, $\alpha_1 = 1.5558$ и, в отсутствие межслойного взаимодействия, находится в режиме химеры (см. рис. 3, *a–z*), а второй слой имеет параметры $\gamma_2 = -0.05$, $\sigma_2 = 0.08$, $\alpha_2 = 0.6$ и находится в режиме уединенных состояний (см. рис. 5, *a–z*). При введении связи с параметрами $\kappa = 0.2$, $\beta = 0$ в первом слое наблюдается разрушение химеры и возникновение уединенных состояний. Пространственное расположение уединенных состояний в обоих слоях одинаково и соответствует их расположению во втором слое в отсутствие межслойной связи. Более

того, частоты уединенных состояний в двух слоях близки, так что можно говорить о частотной синхронизации уединенных состояний в двух слоях.

При увеличении силы межслойной связи происходит исчезновение уединенных состояний. В обоих слоях устанавливаются пространственно-однородные режимы вращения ротаторов и происходит синхронизация частот вращения в обоих слоях. Разность фаз всех ротаторов в первом и втором слоях становится постоянной. Полная фазовая синхронизация не наблюдается в силу наличия расстройки, но разность фаз двух слоев невелика. Величина δ , которая в установившемся режиме равна квадрату синуса разности фаз ротаторов в двух слоях, выходит на постоянный уровень $\delta \approx 0.02$. Соответствующие результаты, полученные при $\kappa = 0.5$, $\beta = 0$, приведены на рис. 7. С ростом межслойной связи значения δ уменьшаются.

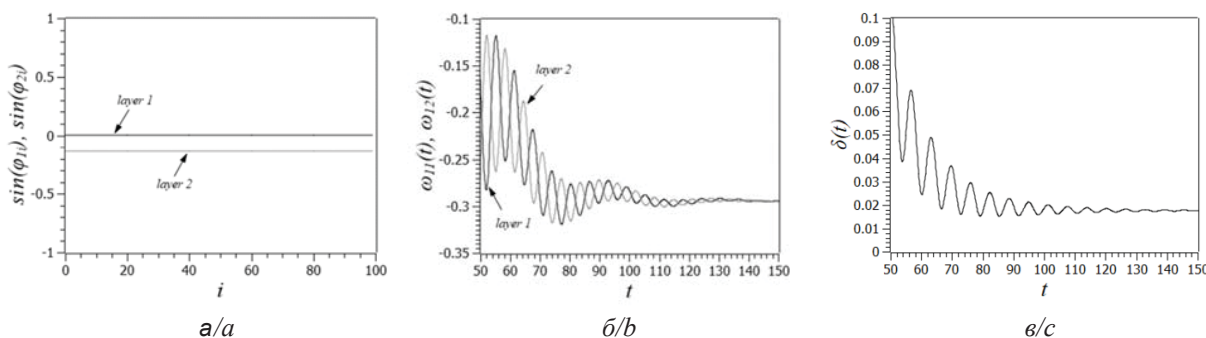


Рис. 7. Результаты взаимодействия первого слоя в режиме химеры ($\gamma_1 = 0.05$, $\sigma_1 = 0.013$, $\alpha_1 = 1.5558$) и второго слоя в режиме уединенных состояний ($\gamma_2 = -0.05$, $\sigma_2 = 0.08$, $\alpha_2 = 0.6$) при коэффициенте межслойной связи $\kappa = 0.5$. На графиках представлены мгновенные пространственные профили $\sin(\varphi_{vi}(t))$, $v = 1, 2$ в двух слоях в установившемся режиме (а), зависимости от времени мгновенных частот $\omega_{vi}(t) = \dot{\varphi}_{vi}(t)$, $v = 1, 2$ элементов с номером $i = 0$ при переходе к установившемуся режиму после введения связи (б), а также зависимость от времени величины δ (в)

Fig. 7. Results of the interaction between the first layer in the chimera regime ($\gamma_1 = 0.05$, $\sigma_1 = 0.013$, $\alpha_1 = 1.5558$) and the second layer in the solitary state mode ($\gamma_2 = -0.05$, $\sigma_2 = 0.08$, $\alpha_2 = 0.6$) with the interlayer coupling coefficient $\kappa = 0.5$. The graphs show instantaneous spatial profiles $\sin(\varphi_{vi}(t))$, $v = 1, 2$ in the two layers in the steady state (a), depending on the time of the instantaneous frequencies $\omega_{vi}(t) = \dot{\varphi}_{vi}(t)$, $v = 1, 2$ for the elements with the number $i = 0$ upon the transition to the steady state after introducing the coupling (b), and also time dependence of δ (c)

Заключение

Проведенное численное моделирование динамики двухслойной мультиплексной сети фазовых осцилляторов с инерцией (ротаторов) (см. систему уравнений (1)) выявило эффекты синхронизации пространственных структур во всех рассмотренных случаях, как в режиме химер, так и в режиме уединенных состояний. При идентичности взаимодействующих слоев, начиная с некоторого порогового значения коэффициента межслойной связи, наблюдается пол-

ная синхронизация пространственных структур и поведения во времени. Мгновенные частоты и фазы элементов с одинаковыми номерами (которые соединены межслойными связями) со временем устанавливаются одинаковыми. Пороговое значение коэффициента связи, необходимое для полной синхронизации различающихся структур в идентичных слоях мало и зависит от фазового сдвига в цепи связи.

При взаимодействии неидентичных слоев, характеризующихся частотной расстройкой, в



случае достаточно сильной межслойной связи также имеет место синхронизация частот взаимодействующих элементов. В результате эффекта захвата частот мгновенные частоты соответствующих элементов становятся одинаковыми, что приводит к идентичности распределения средних частот элементов в двух слоях. Захват частот наблюдается при взаимодействии в режиме химер, в режиме уединенных состояний, а также в случае структур разного типа в двух слоях: химеры в одном слое и уединенных состояний в другом. В силу неидентичности слоев полная синхронизация элементов двух слоев становится в строгом смысле невозможной, однако с ростом коэффициента межслойной связи устанавливается близкий к полной синхронизации режим, характеризующийся незначительной разностью мгновенных фаз соответствующих элементов двух слоев.

Пространственно-временная динамика в синхронном режиме в случае однотипных исходных структур в двух слоях имеет тот же характер: при взаимодействии различающихся химерных состояний синхронный режим представляет собой химеру, а при взаимодействии режимов уединенных состояний синхронный режим также соответствует уединенным состояниям. В случае сильной неоднородности двух слоев, когда несвязанные слои характеризуются качественно различным поведением, в результате взаимодействия в слоях может установиться совершенно другой динамический режим. Так, в проведенных исследованиях взаимодействия слоев, в одном из которых в отсутствие межслойной связи установилась химерная структура, а в другом – режим уединенных состояний, результирующим синхронным режимом оказался пространственно-однородный режим вращений с постоянными одинаковыми в обоих слоях частотами и некоторым постоянным фазовым сдвигом.

Таким образом, проведенные исследования дополняют имеющийся ряд работ по синхронизации сложных пространственных структур во взаимодействующих ансамблях и многослойных сетях нелокально-связанных осцилляторов и отображений. Эффекты синхронизации структур рассмотрены на примере одной из базовых моделей нелинейной динамики, которой является ансамбль фазовых осцилляторов с инерцией. Показано сходство эффекта синхронизации как для химерных состояний, так и для уединенных состояний, а также рассмотрена роль частотного захвата, который является необходимым условием синхронизации пространственных структур.

Список литературы

1. *Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J.* Synchronization – a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 2001. 411 p. (Cambridge Nonlinear Science Series 12). DOI: 10.1119/1.1475332
2. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Shimansky-Geier L.* Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems. Tutorial and modern development / ed. 2. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. 446 p. (Springer Series in Synergetics). DOI: 10.1007/978-3-540-38168-6
3. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves, and turbulence. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1984. 158 p. (Springer Series in Synergetics). DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3
4. *Nekorkin V. I., Velarde M. G.* Synergetic phenomena in active lattices. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2002. 359 p. (Springer Series in Synergetics). DOI: 10.1007/978-3-642-56053-8
5. *Osipov G. V., Kurths J., Zhou C.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. 370 p. (Springer Series in Synergetics). DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5
6. *Barreto E., Hunt B., Ott E., So P.* Synchronization in networks of networks : The onset of coherent behavior in systems of interacting populations of heterogeneous oscillators // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 77. 036107. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036107
7. *Louzada V. H., Araújo N. A., Andrade J. S. Jr., Herrmann H. J.* Breathing synchronization in interconnected networks // *Sci. Rep.* 2013. Vol. 3. 03289. DOI: 10.1038/srep03289
8. *Aguirre J., Sevilla-Escoboza R., Gutiérrez R., Papo D., Buldú J. M.* Synchronization of interconnected networks : The role of connector nodes // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112. 248701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.248701
9. *Sevilla-Escoboza R., Sendina-Nadal I., Leyva I., Gutiérrez R., Buldú J. M., Boccaletti S.* On the Inter-layer synchronization in multiplex networks of identical layers // *Chaos.* 2016. Vol. 26, iss. 6. 065304. DOI: 10.1063/1.4952967
10. *Leyva I., Sevilla-Escoboza R., Sendina-Nadal I., Gutiérrez R., Buldú J. M., Boccaletti S.* Inter-layer synchronization in non-identical multi-layer networks // *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, iss. 1. 45475. DOI: 10.1038/srep45475
11. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonl. Phenom. Complex Syst.* 2002. Vol. 4. P. 380–385.
12. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93, iss. 17. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
13. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E.* Loss of coherence in dynamical networks : Spatial chaos and chimera states // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, iss. 23. 234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102
14. *Tinsley M. R., Nkomo S., Showalter K.* Chimera and phase cluster states in populations of coupled chemical oscillators // *Nature Physics.* 2012. Vol. 8, iss. 9. P. 662–666. DOI: 10.1038/nphys2371



15. Martens E. A., Thutupalli S., Fourriere A., Hallatschek O. Chimera states in mechanical oscillator networks // Proc. Nat. Acad. Sci USA. 2013. Vol. 110, iss. 26. P. 10563–10567. DOI: 10.1073/pnas.1302880110
16. Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. Chimera death : Symmetry breaking in dynamical networks // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112, iss. 15. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101
17. Panaggio M. J., Abrams D. M. Chimera states : Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // Nonlinearity. 2015. Vol. 28, iss. 3. R67–R87. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/r67
18. Стрелкова Г. И., Анищенко В. С. Пространственно-временные структуры в ансамблях хаотических систем // Успехи физических наук. 2020. Т. 190, вып. 2. С. 160–178. DOI: 10.3367/UFNr.2019.01.038518
19. Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M. Chimeralike States in an Ensemble of Globally Coupled Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112, iss. 14. 144103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144103
20. Sethia G. C., Sen A. Chimera States : The Existence Criteria Revisited // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112, iss. 14. 144101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144101
21. Laing C. R. Chimera in networks with purely local coupling // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. 050904. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.050904
22. Clerc M. G., Coulibaly S., Ferré M. A., García-Nustes M. A., Rojas R. G. Chimera-type states induced by local coupling // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 93, iss. 5. 052204. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.052204
23. Hizanidis J., Panagakou E., Omelchenko I., Schöll E., Hövel P., Provata A. Chimera states in population dynamics : Networks with fragmented and hierarchical connectivities // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. 012915. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.012915
24. Bera B. K., Majhi S., Ghosh D., Perc M. Chimera states : Effects of different coupling topologies // EPL. 2017. Vol. 118, iss. 1. 10001. DOI: 10.1209/0295-5075/118/10001
25. Maksimenko V. A., Makarov V. V., Bera B. K., Dibakar Ghosh, Syamal Kumar Dana, Goremyko M. V., Frolov N. S., Koronovskii A. A., Hramov A. E. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94. 052205. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052205
26. Majhi S., Perc M., Ghosh D. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons // Chaos. 2017. Vol. 27. 073109. DOI: 10.1063/1.4993836
27. Andrzejak R. G., Ruzzene G., Malvestio I. Generalized synchronization between chimera states // Chaos. 2017. Vol. 27, iss. 5. 053114. DOI: 10.1063/1.4983841
28. Bukh A., Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps // Chaos. 2017. Vol. 27. 5009375. DOI: 10.1063/1.5009375
29. Ghosh D., Zakharova A., Jalan S. Non-identical multiplexing promotes chimera states // Chaos, Solitons and Fractals. 2018. Vol. 106. P. 56–60. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.11.010
30. Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in a network of many unidirectionally coupled layers of discrete maps // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. Vol. 23. P. 948–960. DOI: 10.1134/S1560354718070092
31. Rybalova E. V., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Anishchenko V. S., Zakharova A. S. Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode // Chaos. 2019. Vol. 29, iss. 3. 033134. DOI: 10.1063/1.5090184
32. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators // Int. J. of Bif. Chaos. 2006. Vol. 16, iss. 1. P. 21–37. DOI: 10.1142/S0218127406014551
33. Wolfrum M., Omel'chenko O. E., Yanchuk S., Maistrenko Y. L. Spectral properties of chimera states // Chaos. 2011. Vol. 21, iss. 1. 013112. DOI: 10.1063/1.3563579
34. Omel'chenko O. E., Wolfrum M., Yanchuk S., Maistrenko Y. L., Sudakov O. Stationary patterns of coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 036210. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036210
35. Ashwin P., Building H., Burylko O. Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators // Chaos. 2015. Vol. 25, iss. 1. 4905197. DOI: 10.1063/1.4905197
36. Omelchenko I., Omel'chenko O. E., Hövel P., Schöll E. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110, iss. 22. 224101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.224101
37. Omelchenko I., Zakharova A., Hövel P., Siebert J., Schöll E. Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras // Chaos. 2015. Vol. 25, iss. 8. 4927829. DOI: 10.1063/1.4927829
38. Vuillings A., Hizanidis J., Omelchenko I., Hövel P. Clustered chimera states in systems of type-I excitability // New Journal of Physics. 2016. Vol. 16. 123039. DOI: 10.1088/1367-2630/16/12/123039
39. Tanaka H., Lichtenberg A., Oishi S. First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, iss. 11. P. 2104–2107. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.2104
40. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Spigler R. Synchronization in populations of globally coupled oscillators with inertial effects // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. P. 3437–3454. DOI: 10.1103/physreve.62.3437
41. Ha S.-Y., Kim Y., Li Z. Large-time dynamics of Kuramoto oscillators under the effects of inertia and frustration // SIAM Journal on Appl. Dynamical Systems. 2014. Vol. 13, iss. 1. P. 466–492. DOI: 10.1137/130926559
42. Belykh I. V., Brister B. N., Belykh V. N. Bistability of patterns of synchrony in Kuramoto oscillators with inertia // Chaos. 2016. Vol. 26, iss. 9. 094822. DOI: 10.1063/1.4961435
43. Wisenfeld K., Colet P., Strogatz S. Synchronization transitions in a disordered Josephson series array // Phys. Rev. Letts. 1996. Vol. 76. P. 404–407. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.404



44. *Trees B., Saranathon V., Stroud D.* Synchronization in disordered Josephson junction arrays : Small-world connections and the Kuramoto model // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71. 016215. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.016215
45. *Hizanidis J., Lazarides N., Neofotistos G., Tsironis G.* Chimera states and synchronization in magnetically driven SQUID metamaterials // *Eur. Phys. J. Special Topics.* 2016. Vol. 225. P. 1231–1243. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02668-9
46. *Mishra A., Saha S., Hens C., Roy P. K., Bose M., Louodop P., Cerdeira H. A., Dana S. K.* Coherent libration to coherent rotational dynamics via chimeralike states and clustering in a Josephson junction array // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 95, iss. 1. 010201. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.010201
47. *Mishra A., Saha S., Roy P. K., Kapitaniak T., Dana S. K.* Multicluster oscillation death and chimeralike states in globally coupled Josephson junctions // *Chaos.* 2017. Vol. 27, iss. 2. 023110. DOI: 10.1063/1.4976147
48. *Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., Czołczynski K., Maistrenko Y.* Imperfect chimera states for coupled pendula // *Sci. Rep.* 2014. Vol. 4. 06379. DOI: 10.1038/srep06379
49. *Dudkowski D., Jaros P., Czołczynski K., Kapitaniak T.* Small amplitude chimeras for coupled clocks // *Nonlinear Dynamics.* 2020. Vol. 102, iss. 3. P. 1–12. DOI: 10.1007/s11071-020-05990-z
50. *Filatrella G., Nielsen A. H., Pedersen N. F.* Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model // *Eur. Phys. J.* 2008. Vol. 61. P. 485–491. DOI: 10.1140/epjb/e2008-00098-8
51. *Nishikawa T., Motter A. E.* Comparative analysis of existing models for power grid synchronization // *New Journal of Physics.* 2015. Vol. 17, iss. 1. 015012. DOI: 10.1088/1367-2630/7/1/015012
52. *Grzybowski J. M. V., Macau E. E. N., Yoneyama T.* On synchronization in power-grids modelled as networks of second-order Kuramoto oscillators // *Chaos.* 2016. Vol. 26, iss. 11. 113113. DOI: 10.1063/1.4967850
53. *Goldschmidt R. J., Pikovsky A., Politi A.* Blinking chimeras in globally coupled rotators // *Chaos.* 2019. Vol. 29, iss. 7. 5105367. DOI: 10.1063/1.5105367
54. *Olmi S., Martens E. A., Thutupalli S., Torcini A.* Intermittent chaotic chimeras for coupled rotators // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 92. 030901. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.030901
55. *Olmi S.* Chimera states in coupled Kuramoto oscillators with inertia // *Chaos.* 2015. Vol. 25, iss. 12. 123125. DOI: 10.1063/1.4938734
56. *Jaros P., Maistrenko Y., Kapitaniak T.* Chimera states on the route from coherence to rotating waves // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91, iss. 2. 022907. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.022907
57. *Jaros P., Brezetsky S., Levchenko R., Dudkowski D., Kapitaniak T., Maistrenko Y.* Solitary states for coupled oscillators with inertia // *Chaos.* 2018. Vol. 28, iss. 1. 5019792. DOI: 10.1063/1.5019792
58. *Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interaction // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89, iss. 6. 060901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.060901
59. *Teichmann E., Rosenblum M.* Solitary states and partial synchrony in oscillatory ensembles with attractive and repulsive interactions featured // *Chaos.* 2019. Vol. 29, iss. 9. 093124. DOI: 10.1063/1.5118843
60. *Шенелев И. А., Вадивасова Т. Е.* Уединенные состояния в 2D-решетке бистабильных элементов при глобальном и близком к глобальному характере взаимодействия // *Нелинейная динамика.* 2017. Т. 13, № 3. С. 317–329. DOI: 10.20537/nd1703002
61. *Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V.* Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors // *Eur. Phys. J. Special Topics.* 2017. Vol. 226. P. 1857–1866. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70023-1
62. *Semenova N., Vadivasova T., Anishchenko V.* Mechanism of solitary state appearance in an ensemble of nonlocally coupled Lozi maps // *Eur. Phys. J. Special Topics.* 2018. Vol. 227. P. 1173–1183. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800035-y
63. *Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S.* Mechanism of realizing a solitary state chimera in a ring of nonlocally coupled chaotic maps // *Chaos. Solitons and Fractals.* 2018. Vol. 115. P. 300–305. DOI: 10.1016/j.chaos.2018.09.003

References

1. Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J. *Synchronization – a universal concept in nonlinear sciences.* Cambridge, New York, Cambridge University Press, 2001, Cambridge Nonlinear Science Series 12. 411 p. DOI: 10.1119/1.1475332
2. Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Shimansky-Geier L. *Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems. Tutorial and modern development.* Ed. 2. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2007, Springer Series in Synergetics. 446 p. DOI: 10.1007/978-3-540-38168-6
3. Kuramoto Y. *Chemical oscillations, waves, and turbulence.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1984, Springer Series in Synergetics. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3
4. Nekorkin V. I., Velarde M. G. *Synergetic phenomena in active lattices.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2002, Springer Series in Synergetics. 359 p. DOI: 10.1007/978-3-642-56053-8
5. Osipov G. V., Kurths J., Zhou C. *Synchronization in oscillatory networks.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2007, Springer Series in Synergetics. 370 p. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5
6. Barreto E., Hunt B., Ott E., So P. Synchronization in networks of networks: the onset of coherent behavior in systems of interacting populations of heterogeneous oscillators. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 77, 036107. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036107
7. Louzada V. H., Araújo N. A., Andrade J. S. Jr., Herrmann H. J. Breathing synchronization in interconnected networks. *Sci. Rep.*, 2013, vol. 3, 03289. DOI: 10.1038/srep03289



8. Aguirre J., Sevilla-Escoboza R., Gutiérrez R., Papo D., Buldú J. M. Synchronization of interconnected networks: The role of connector nodes. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, 248701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.248701
9. Sevilla-Escoboza R., Sendina-Nadal I., Leyva I., Gutiérrez R., Buldu J. M., Boccaletti S. On the Inter-layer synchronization in multiplex networks of identical layers. *Chaos*, 2016, vol. 26, iss. 6, 065304. DOI: 10.1063/1.4952967
10. Leyva I., Sevilla-Escoboza R., Sendiña-Nadal I., Gutiérrez R., Buldú J. M., Boccaletti S. Inter-layer synchronization in non-identical multi-layer networks. *Sci. Rep.*, 2017, vol. 7, iss. 1, 45475. DOI: 10.1038/srep45475
11. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonl. Phenom. Complex Syst.*, 2002, vol. 4, pp. 380–385.
12. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, iss. 17, 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
13. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, iss. 23, 234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102
14. Tinsley M. R., Nkomo S., Showalter K. Chimera and phase cluster states in populations of coupled chemical oscillators. *Nature Physics*, 2012, vol. 8, iss. 9, pp. 662–666. DOI: 10.1038/nphys2371
15. Martens E. A., Thutupalli S., Fourriere A., Hallatschek O. Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 2013, vol. 110, iss. 26, pp. 10563–10567. DOI: 10.1073/pnas.1302880110
16. Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101
17. Panaggio M. J., Abrams D. M. Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, 2015, vol. 28, iss. 3, R67–R87. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/r67
18. Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Spatio-temporal structures in ensembles of coupled chaotic systems. *Phys. Usp.*, 2020, vol. 63, no. 2, pp. 145–161. DOI: 10.3367/UFNe.2019.01.038518
19. Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M. Chimeralike States in an Ensemble of Globally Coupled Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, iss. 14, 144103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144103
20. Sethia G. C., Sen A. Chimera States: The Existence Criteria Revisited. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, 144101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144101
21. Laing C. R. Chimera in networks with purely local coupling. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, 050904. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.050904
22. Clerc M. G., Coulibaly S., Ferré M. A., García-Nustes M. A., Rojas R. G. Chimera-type states induced by local coupling. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 93, iss. 5, 052204. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.052204
23. Hizanidis J., Panagakou E., Omelchenko I., Schöll E., Hövel P., Provata A. Chimera states in population dynamics: networks with fragmented and hierarchical connectivities. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, 012915. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.012915
24. Bera B. K., Majhi S., Ghosh D., Perc M. Chimera states: Effects of different coupling topologies. *EPL*, 2017, vol. 118, iss. 1, 10001. DOI: 10.1209/0295-5075/118/10001
25. Maksimenko V. A., Makarov V. V., Bera B. K., Dibakar Ghosh, Syamal Kumar Dana, Goremyko M. V., Frolov N. S., Koronovskii A. A., Hramov A. E. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, 052205. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052205
26. Majhi S., Perc M., Ghosh D. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons. *Chaos*, 2017, vol. 27, 073109. DOI: 10.1063/1.4993836
27. Andrzejak R. G., Ruzzene G., Malvestio I. Generalized synchronization between chimera states. *Chaos*, 2017, vol. 27, iss. 5, 053114. DOI: 10.1063/1.4983841
28. Bukh A., Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps. *Chaos*, 2017, vol. 27, 5009375. DOI: 10.1063/1.5009375
29. Ghosh D., Zakharova A., Jalan S. Non-identical multiplexing promotes chimera states. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2018, vol. 106, pp. 56–60. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.11.010
30. Strelkova G. I., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in a network of many unidirectionally coupled layers of discrete maps. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, pp. 948–960. DOI: 10.1134/S1560354718070092
31. Rybalova E. V., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Anishchenko V. S., Zakharova A. S. Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode. *Chaos*, 2019, vol. 29, iss. 3, 033134. DOI: 10.1063/1.5090184
32. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators. *Int. J. of Bif. Chaos*, 2006, vol. 16, iss. 1, pp. 21–37. DOI: 10.1142/S0218127406014551
33. Wolfrum M., Omel'chenko O. E., Yanchuk S., Maistrenko Y. L. Spectral properties of chimera states. *Chaos*, 2011, vol. 21, iss. 1, 013112. DOI: 10.1063/1.3563579
34. Omel'chenko O. E., Wolfrum M., Yanchuk S., Maistrenko Y. L., Sudakov O. Stationary patterns of coherence and incoherence in two-dimensional arrays of non-locally-coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, 036210. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.036210
35. Ashwin P., Building H., Burylko O. Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators. *Chaos*, 2015, vol. 25, iss. 1, 4905197. DOI: 10.1063/1.4905197
36. Omelchenko I., Omel'chenko O. E., Hövel P., Schöll E. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, vol. 110, iss. 22, 224101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.224101
37. Omelchenko I., Zakharova A., Hövel P., Siebert J., Schöll E. Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras. *Chaos*, 2015, vol. 25, iss. 8, pp. 1–8. DOI: 10.1063/1.4927829



38. Vüllings A., Hizanidis J., Omelchenko I., Hövel P. Clustered chimera states in systems of type-I excitability. *New Journal of Physics*, 2016, vol. 16, pp. 1–14. DOI: 10.1088/1367-2630/16/12/123039
39. Tanaka H., Lichtenberg A., Oishi S. First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, iss. 11, pp. 2104–2107. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.2104
40. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Spigler R. Synchronization in populations of globally coupled oscillators with inertial effects. *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 62, pp. 3437–3454. DOI: 10.1103/physreve.62.3437
41. Ha S.-Y., Kim Y., Li Z. Large-time dynamics of Kuramoto oscillators under the effects of inertia and frustration. *SIAM Journal on Appl. Dynamical Systems*, 2014, vol. 13, iss. 1, pp. 466–492. DOI: 10.1137/130926559
42. Belykh I. V., Brister B. N., Belykh V. N. Bistability of patterns of synchrony in Kuramoto oscillators with inertia. *Chaos*, 2016, vol. 26, iss. 9, 094822. DOI: 10.1063/1.4961435
43. Wisenfeld K., Colet P., Strogatz S. Synchronization transitions in a disordered Josephson series array. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 404–407. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.404
44. Trees B., Saranathon V., Stroud D. Synchronization in disordered Josephson junction arrays: Small-world connections and the Kuramoto model. *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, 016215. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.016215
45. Hizanidis J., Lazarides N., Neofotistos G., Tsironis G. Chimera states and synchronization in magnetically driven SQUID metamaterials. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2016, vol. 225, pp. 1231–1243. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02668-9
46. Mishra A., Saha S., Hens C., Roy P. K., Bose M., Louodop P., Cerdeira H. A., Dana S. K. Coherent libration to coherent rotational dynamics via chimeralike states and clustering in a Josephson junction array. *Phys. Rev. E*, 2017, vol. 95, iss. 1, 010201. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.010201
47. Mishra A., Saha S., Roy P. K., Kapitaniak T., Dana S. K. Multicluster oscillation death and chimeralike states in globally coupled Josephson Junctions. *Chaos*, 2017, vol. 27, iss. 2, 023110. DOI: 10.1063/1.4976147
48. Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., Czolczynski K., Maistrenko Y. Imperfect chimera states for coupled pendula. *Sci. Rep.*, 2014, vol. 4, 6379. DOI: 10.1038/srep06379
49. Dudkowski D., Jaros P., Czolczynski K., Kapitaniak T. Small amplitude chimeras for coupled clocks. *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 102, iss. 3, pp. 1–12. DOI: 10.1007/s11071-020-05990-z
50. Filatrella G., Nielsen A. H., Pedersen N. F. Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model. *Eur. Phys. J.*, 2008, vol. 61, pp. 485–491. DOI: 10.1140/epjb/e2008-00098-8
51. Nishikawa T., Motter A. E. Comparative analysis of existing models for power grid synchronization. *New Journal of Physics*, 2015, vol. 17, iss. 1, 015012. DOI: 10.1088/1367-2630/17/1/015012
52. Grzybowski J. M. V., Macau E. E. N., Yoneyama T. On synchronization in power-grids modelled as networks of second-order Kuramoto oscillators. *Chaos*, 2016, vol. 26, iss. 11, 113113. DOI: 10.1063/1.4967850
53. Goldschmidt R. J., Pikovsky A., Politi A. Blinking chimeras in globally coupled rotators. *Chaos*, 2019, vol. 29, iss. 7, 5105367. DOI: 10.1063/1.5105367
54. Olmi S., Martens E. A., Thutupalli S., Torcini A. Intermittent chaotic chimeras for coupled rotators. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, 030901. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.030901
55. Olmi S. Chimera states in coupled Kuramoto oscillators with inertia. *Chaos*, 2015, vol. 25, iss. 12, 123125. DOI: 10.1063/1.4938734
56. Jaros P., Maistrenko Y., Kapitaniak T. Chimera states on the route from coherence to rotating waves. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, iss. 2, 022907. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.022907
57. Jaros P., Brezetsky S., Levchenko R., Dudkowski D., Kapitaniak T., Maistrenko Y. Solitary states for coupled oscillators with inertia. *Chaos*, 2018, vol. 28, iss. 1, 011103. DOI: 10.1063/1.5019792
58. Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M. Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interaction. *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 89, iss. 6, 060901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.060901
59. Teichmann E., Rosenblum M. Solitary states and partial synchrony in oscillatory ensembles with attractive and repulsive interactions featured. *Chaos*, 2019, vol. 29, iss. 9, 093124. DOI: 10.1063/1.5118843
60. Shepelev I. A., Vadivasova T. E. Solitary states in a 2D lattice of bistable elements with global and close to global interaction. *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, iss. 3, pp. 317–329. DOI: 10.20537/nd1703002
61. Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V. Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2017, vol. 226, pp. 1857–1866. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70023-1
62. Semenova N., Vadivasova T., Anishchenko V. Mechanism of solitary state appearance in an ensemble of nonlocally coupled Lozi maps. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2018, vol. 227, pp. 1173–1183. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800035-y
63. Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Mechanism of realizing a solitary state chimera in a ring of nonlocally coupled chaotic maps. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2018, vol. 115, pp. 300–305. DOI: 10.1016/j.chaos.2018.09.003

Поступила в редакцию 06.06.2020, после рецензирования 04.09.2020, принята к публикации 01.11.2020
Received 06.06.2020, revised 04.09.2020, accepted 01.11.2020