



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 29–35
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Physics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 29–35

Научная статья

УДК 517.9

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-29-35>

О влиянии шума на квазипериодичность разной размерности, включая квазипериодическую бифуркацию Хопфа



А. П. Кузнецов, Ю. В. Седова✉

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Россия, 410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Кузнецов Александр Петрович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, kuzalexp@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>

Седова Юлия Викторовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, sedovayv@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7843-646X>

Аннотация. Работа посвящена численному исследованию воздействия аддитивного шума на дискретную систему, в которой реализуются квазипериодические режимы разной размерности. Дан обзор основных особенностей, наблюдающихся в системе с двухчастотной квазипериодичностью (отображение окружности) в присутствии шума. В качестве основной модели исследования выбрано простейшее трехмерное отображение (тор-отображение) с двухчастотной и трехчастотной квазипериодичностью, полученное методом дискретизации системы дифференциальных уравнений, описывающей генератор квазипериодических колебаний Кузнецова–Кузнецова–Станкевич. Рассматривается модификация режимов, наблюдаемых в отображении при введении шума, с помощью метода карт ляпуновских показателей. Численно получена серия спектров Фурье в точке, соответствующей трехчастотному тору. Обсуждается вид графиков ляпуновских показателей, характерных для квазипериодической бифуркации Хопфа рождения 3-тора при добавлении шума.
Ключевые слова: шум, тор-отображение, квазипериодическая динамика, показатель Ляпунова, спектр Фурье

Благодарности: Работа выполнена в рамках госзадания Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН.

Для цитирования: Кузнецов А. П., Седова Ю. В. О влиянии шума на квазипериодичность разной размерности, включая квазипериодическую бифуркацию Хопфа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 29–35. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-29-35>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-29-35>

On the effect of noise on quasiperiodicity of different dimensions, including the quasiperiodic Hopf bifurcation

А. П. Kuznetsov, Yu. V. Sedova✉

Saratov Branch of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, 38 Zelenaya St., Saratov 410019, Russia

Alexander P. Kuznetsov, kuzalexp@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>

Yuliya V. Sedova, sedovayv@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7843-646X>

Abstract. Background and Objectives: The basic model of study is the simplest three - dimensional map with two-frequency and three-frequency quasiperiodicity at adding of noise. The main objective is to examine the effect of noise on the quasiperiodic Hopf bifurcation of the 3-torus birth.

Materials and Methods: To study the torus map in the presence of noise we use such numerical methods as computing of Lyapunov exponents, calculation of Fourier spectra, drawing of attractor portraits. **Results:** Quasi-periodic bifurcations under the influence of noise occupy certain intervals in the parameter, but their main classification features (equality or not of the corresponding Lyapunov exponents) are preserved at the qualitative level. **Conclusion:** We considered the effect of noise on the simplest system with two- and three-frequency quasiperiodicity. The three-frequency quasiperiodicity is preserved at certain noise amplitudes, but then turns into a two-frequency one. In the Fourier spectra, this process develops according to the scenario of "blurring" the noise components of the corresponding spectral components.

Keywords: noise, torus map, quasi-periodic dynamics, Lyapunov exponent, Fourier spectrum

Acknowledgements: This work was performed in the framework of the State task of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences.

For citation: Kuznetsov A. P., Sedova Yu. V. On the effect of noise on quasiperiodicity of different dimensions, including the quasiperiodic Hopf bifurcation. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Physics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 29–35 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-29-35>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



Введение

Воздействие шума на различные динамические режимы представляет собой важную фундаментальную проблему, поскольку в реальных физических системах присутствие шума неизбежно [1–4]. Для систем с возможностью хаоса шум разрушает тонкие детали фрактальных структур в фазовом пространстве и пространстве параметров, иногда существенно модифицируя наблюдаемую картину. Одним из интересных и менее изученных вопросов является случай систем с квазипериодической динамикой. При его обсуждении важным аспектом является возможность квазипериодичности с разным числом несоизмеримых частот, когда в фазовом пространстве наблюдаются инвариантные торы разной размерности. В последнее время для автономных систем с квазипериодичностью получены новые результаты, включая решение некоторых проблем, связанных с квазипериодическими бифуркациями [5–10]. В данной статье рассмотрено влияние шума на системы с двух- и трехчастотной квазипериодичностью и сопутствующими динамическими режимами.

1. Случай двухчастотной квазипериодичности. Отображение окружности в присутствии шума

Для сопоставления с дальнейшими результатами приведем здесь простейшие иллюстрации воздействия шума на систему с двухчастотной квазипериодичностью. Как известно, базовой моделью в этом случае является отображение окружности [1–3]:

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n \pmod{1}. \quad (1)$$

Здесь x – динамическая переменная (фаза колебаний), K и r – амплитудный и частотный параметры. Отображение (1) описывает такие явления, как синхронизация, квазипериодическая динамика и ее разрушение с переходом к хаосу. На рис. 1, а представлена полученная численно карта ляпуновских показателей отображения (1), на которой разными цветами показаны области периодических режимов P , квазипериодических двухчастотных режимов T_2 и хаоса C . (Для периодического режима ляпуновский показатель отрицательный, для квазипериодического – нулевой, для хаотического – положительный.) Можно видеть классическую картину языков Арнольда, погруженных в область квазипериодичности [3]. Выше критической линии $K = 1$ в системе возникает перекрытие языков, и становится возможным хаотическое поведение [1, 2].

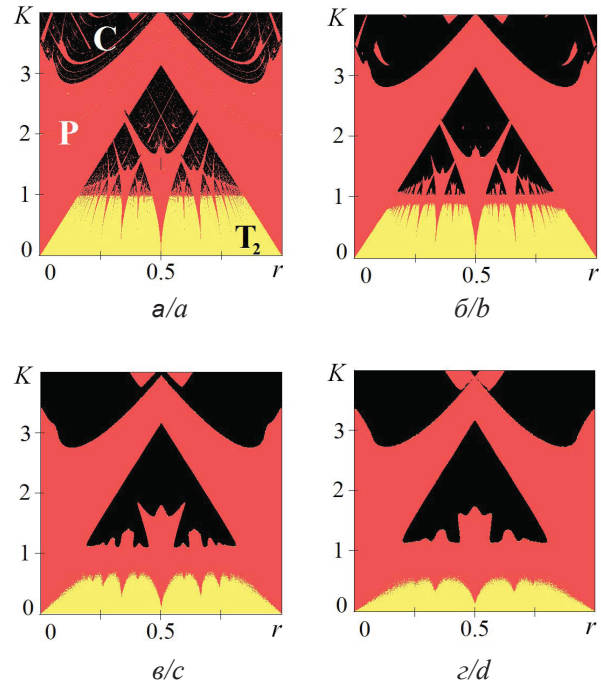


Рис. 1. Карты ляпуновских показателей отображения (2): $a - \varepsilon = 0$, $b - \varepsilon = 0.01$, $c - \varepsilon = 0.05$, $d - \varepsilon = 0.08$ (цвет online)
Fig. 1. Lyapunov exponent charts of the map (2): $a - \varepsilon = 0$, $b - \varepsilon = 0.01$, $c - \varepsilon = 0.05$, $d - \varepsilon = 0.08$ (colour online)

Добавим теперь в отображение окружности случайное воздействие [11]:

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n + \varepsilon \xi_n \pmod{1}. \quad (2)$$

Здесь ε представляет собой интенсивность шума, а ξ_n – случайную последовательность значений с нулевым средним $\langle \xi_n \rangle = 0$ и постоянным значением дисперсии $\sigma = \sqrt{\langle \xi_n^2 \rangle}$. Для численных расчетов использовались генерируемые компьютером величины ξ_n , равномерно распределенные на интервале $[-0.5; 0.5]$. Отметим, что если амплитуда шума мала, а динамика модели рассматривается на большом временном масштабе, то конкретная форма распределения вероятности для ξ_n не существенна.

На рис. 1, б, в, г показаны ляпуновские карты в присутствии шума разной интенсивности. В присутствии шума периодическая или квазипериодическая динамика в точном смысле не реализуется, но картина характерных областей на картах показателя Ляпунова остается видна. Поэтому можно говорить о «шумовом периодическом режиме», когда ляпуновский показатель отрицателен, о «шумовом квазипериодическом»,



когда он близок к нулю, или о «шумовом хаотическом», если показатель Ляпунова положителен (отметим, что значения ляпуновских показателей, лежащие в интервале от $-5 \cdot 10^{-4}$ до $5 \cdot 10^{-4}$, принимаются нами за «условный ноль»). Ляпуновские карты позволяют различать визуально эти режимы. Анализируя рисунки, можно сделать следующие выводы:

- при малой интенсивности шума картина языков Арнольда качественно сохраняется, а при больших – разрушается. При этом в области малых значений параметра K доминируют условно-квазипериодические режимы;
- в окрестности критической линии возникает полоса условно-периодических режимов, расширяющаяся с ростом интенсивности шума;
- выше критической линии периодические режимы разрушаются и вытесняются условно-шумовыми хаотическими режимами.

Отметим, что в области хаоса исчезают мелкие детали, но в целом эта область при влиянии шума не увеличивается, а, скорее, уменьшается в размере.

2. Случай трехчастотной квазипериодичности. Тор-отображение с шумом

Перейдем к анализу трехчастотной квазипериодичности. Для этого используем недавно предложенную дискретную систему – тор-отображение [12]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \cdot y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot ((\lambda + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4) y_n - \omega_0^2 x_n), \quad (3) \\ z_{n+1} &= z_n + h \cdot (b(\varepsilon - z_n) - ky_n^2). \end{aligned}$$

Здесь x, y, z – динамические переменные, $\lambda, \beta, \omega_0, b, \varepsilon, k$ – набор управляющих параметров. Модель (3) получена путем перехода к конечным разностям в дифференциальных уравнениях, описывающих один из простейших генераторов квазипериодических колебаний [5] (генератор Кузнецова–Кузнецова–Станкевич) с двухчастотной квазипериодической динамикой:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4) y - \omega_0^2 x, \quad (4) \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - ky^2. \end{aligned}$$

При переходе от дифференциальных уравнений (4) к дискретной модели (3) возникает новый дополнительный параметр h – шаг дискретного времени, размерность системы повышается, за счет чего становится возможным существование

трехчастотной квазипериодичности¹. Процедура дискретизации особенно замечательна тем, что она обогащает динамику получающейся системы.

На рис. 2 в центре показана карта ляпуновских показателей отображения (3). Красным цветом на ней отмечены периодические режимы P , желтым – двухчастотные квазипериодические режимы T_2 , синим – трехчастотные квазипериодические T_3 , черным – хаоса C , лиловым – гиперхаоса HC . Все перечисленные режимы определялись по величине показателей Ляпунова Λ_i в соответствии с их сигнатурой:

- 1) P : $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$
- 2) T_2 : $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$
- 3) T_3 : $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0$
- 4) C : $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$
- 5) HC : $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0, \Lambda_3 < 0$.

Ляпуновская карта на рис. 2 имеет следующие особенности. Линия квазипериодической бифуркации Хопфа QH разделяет области двух- и трехчастотной квазипериодичности. От нее отходят полосы двухчастотных режимов, ограниченные линиями седло-узловых бифуркаций двухчастотных торов. В них, в свою очередь, встроены поперечные полосы периодических режимов – точных резонансов. В основной области двухчастотных режимов возможны периодические резонансы, самый широкий из которых в данном случае отвечает циклу периода 10. На рис. 2 также приведены примеры фазовых портретов и спектров Фурье в некоторых точках плоскости параметров, иллюстрирующих характерные типы режимов.

Воздействуем теперь на тор-отображение (3) аддитивным источником шума. Для этого добавим к одному из уравнений дополнительное слагаемое в виде набора случайных чисел:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \cdot y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot ((\lambda + z_n + x_n^2 - \beta x_n^4) y_n - \omega_0^2 x_n), \quad (5) \\ z_{n+1} &= z_n + h \cdot (b(\varepsilon - z_n) - ky_n^2) + \varepsilon \xi_n. \end{aligned}$$

Здесь ε представляет собой интенсивность шума, а ξ_n – случайную последовательность.

На рис. 3 представлены карты показателя Ляпунова тор-отображения при увеличении интенсивности шума. По мере роста амплитуды шума наблюдаются следующие особенности.

¹ Отметим, что для первого уравнения системы (4) дискретизация выполнена по полуявной схеме Эйлера, т.е. используется значение переменной y в $n+1$ -й момент.

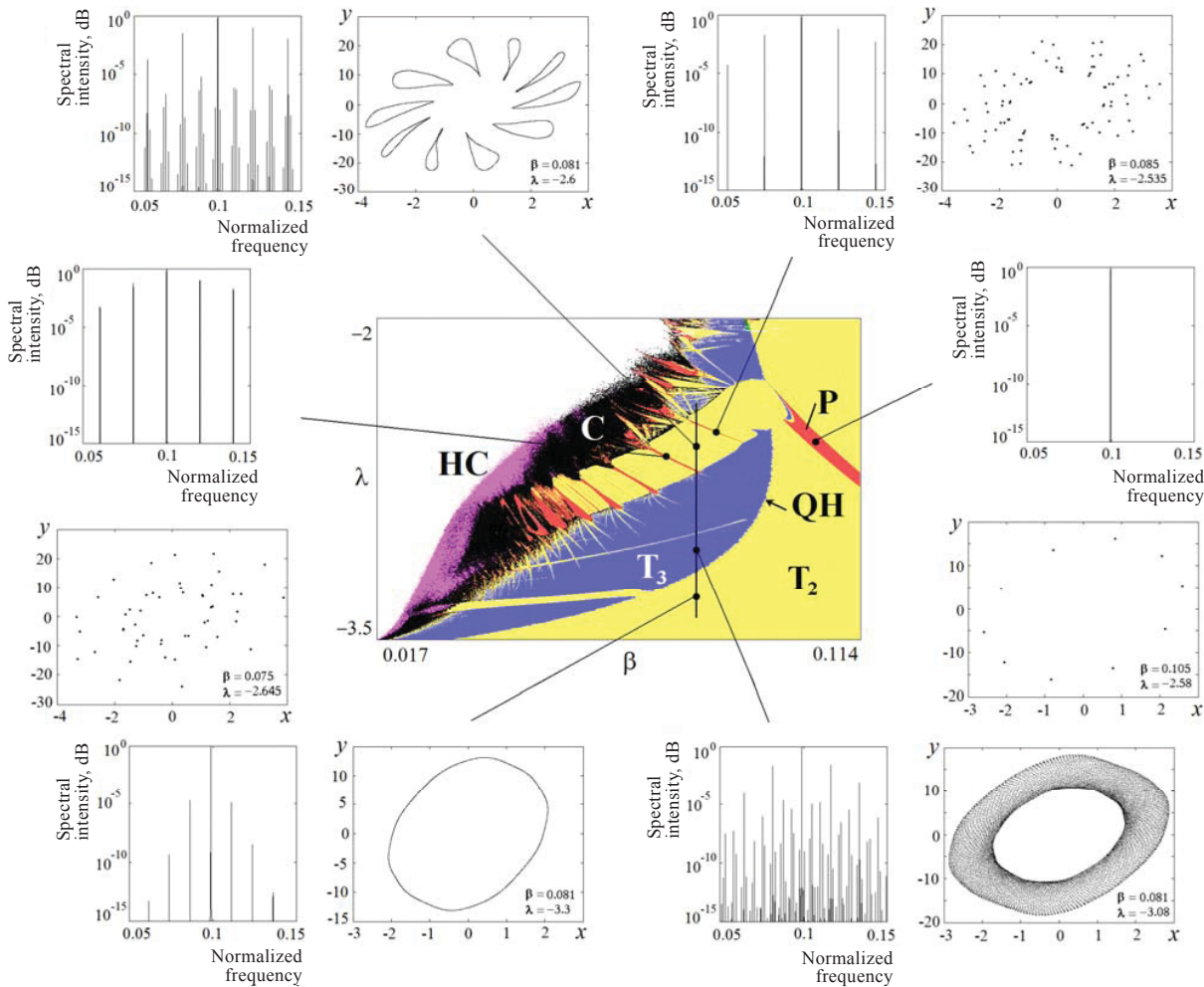


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей тор-отображения (центральная вставка). По периферии рисунка парами расположены спектры Фурье и фазовые портреты в некоторых точках плоскости параметров (β, λ) . Параметр дискретизации $h = 0.1$, остальные параметры $b=1, \varepsilon = 4, k = 0.02, \omega_0 = 2\pi$ (цвет online)

Fig. 2. Lyapunov exponent chart of the torus map (central insert). On the periphery of the Figure, Fourier spectra and phase portraits are arranged in pairs at some points in the (β, λ) parameter plane. Disretization parameter is $h = 0.1$, other parameters are $b=1, \varepsilon = 4, k = 0.02, \omega_0 = 2\pi$ (colour online)

- Мелкие области периодических режимов внутри полосы основного двухчастотного резонанса разрушаются, однако на их месте возникает достаточно большой остров условно-периодического режима.

- Область условно-периодического режима на базе цикла периода 10 сохраняется и при большом шуме.

- Трехчастотные режимы при малом шуме сохраняются, но при достаточно большой его величине превращаются в двухчастотные. Далее мы проиллюстрируем этот процесс с помощью Фурье-спектров.

- Хаотические и гиперхаотические режимы сохраняются.

На рис. 4 показана иерархия спектров Фурье модели (5) при увеличении интенсивности шума

в точке, соответствующей в автономном случае трехчастотному тору. Спектр Фурье в отсутствие шума представляет собой дискретное множество компонент, отвечающих несоизмеримым частотам, амплитуда которых уменьшается в обе стороны от основной частоты (рис. 4, а). Пик максимальной высоты находится на частоте 0.1, что обусловлено величиной параметра дискретизации h . С ростом шума исчезают многочисленные спутники на комбинационных частотах (рис. 4, б–д). При амплитуде шума порядка 10^{-1} спектр Фурье за счет зашумления становится аналогичен спектру двухчастотного квазипериодического движения (рис. 4, е). Подобные иллюстрации полезны тем, что их можно напрямую сравнивать со спектрами, получаемыми в результате физического эксперимента.

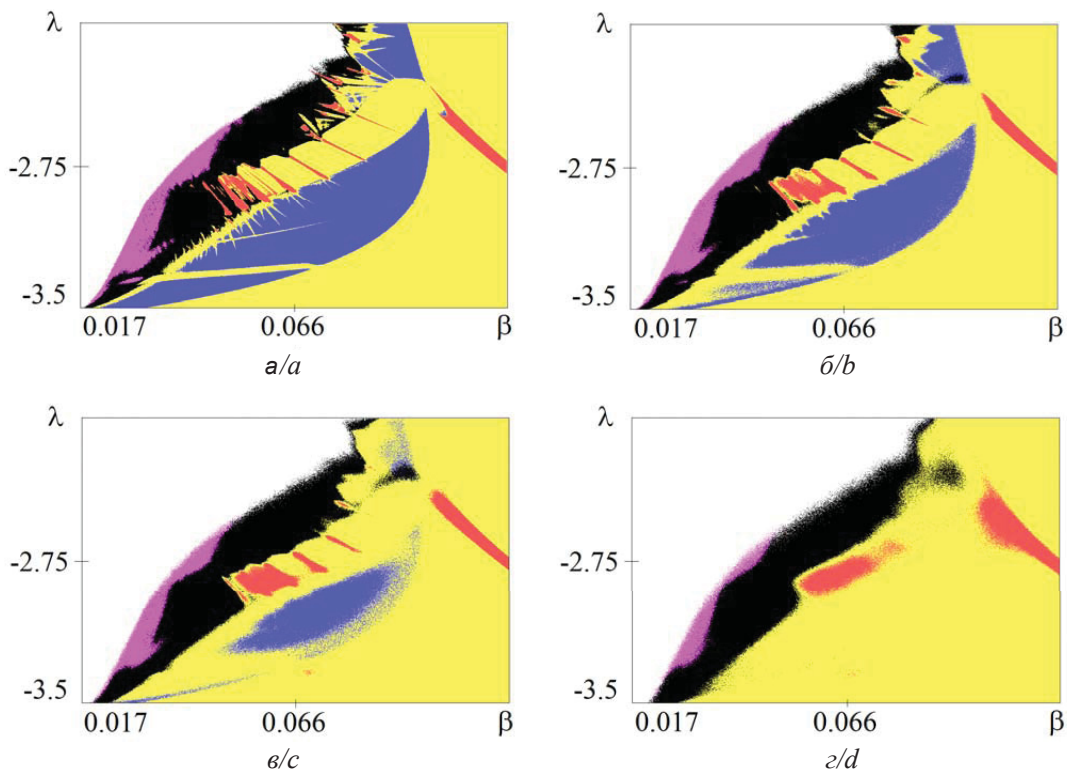


Рис. 3. Ляпуновские карты системы (5). Амплитуда шума: $a - \varepsilon = 10^{-2}$, $b - \varepsilon = 3 \cdot 10^{-2}$, $c - \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $z - \varepsilon = 10^{-1}$ (цвет online)

Fig. 3. Lyapunov exponent charts of the system (5). Noise amplitude: $a - \varepsilon = 10^{-2}$, $b - \varepsilon = 3 \cdot 10^{-2}$, $c - \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$, $d - \varepsilon = 10^{-1}$ (colour online)

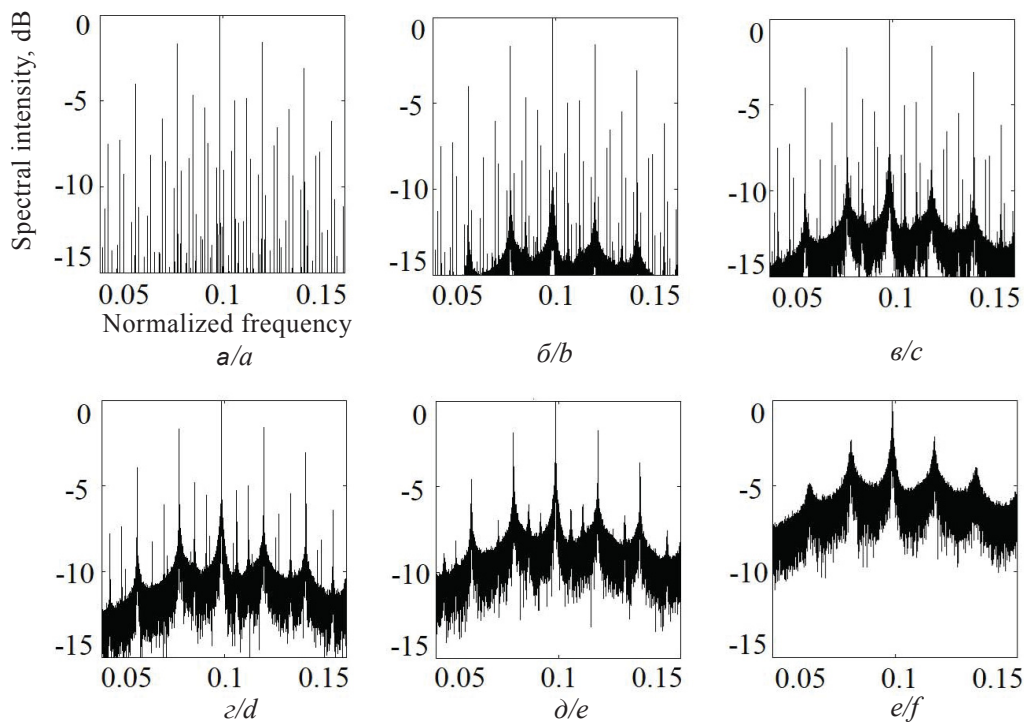


Рис. 4. Фурье-спектры для модели (5) в точке $\beta = 0.081$, $\lambda = -3.08$, $b = 1$, $\varepsilon = 4$, $k = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$. Уровень шума равен: $a - 0$, $b - 10^{-5}$, $c - 10^{-4}$, $z - 10^{-3}$, $d - 10^{-2}$, $e - 10^{-1}$

Fig. 4. Fourier spectra for the model (5) in the point $\beta = 0.081$, $\lambda = -3.08$, $b = 1$, $\varepsilon = 4$, $k = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$. The noise amplitude is: $a - 0$, $b - 10^{-5}$, $c - 10^{-4}$, $d - 10^{-3}$, $e - 10^{-2}$, $f - 10^{-1}$



Обсудим теперь влияние шума на квазипериодическую бифуркацию Хопфа QH рождения 3-тора из 2-тора. На рис. 5 с этой целью продемонстрировано влияние шума на график зависимости спектра ляпуновских показателей от параметра λ . (Двигаемся вдоль линии $\beta = \text{const}$, отмеченной на рис. 2, – эта линия пересекает область трехчастотной квазипериодичности снизу вверх). Вначале обсудим вид графика в случае $\varepsilon = 0$. В точке QH бифуркацию претерпевает двухчастотный тор, для которого $\Lambda_1 = 0$. Как видно из рис. 5, a , особенность этой бифуркации в том, что до ее порога равны друг другу показатели $\Lambda_2 = \Lambda_3$. В точке бифуркации оба эти показателя обращаются в ноль. За точкой бифуркации показатели уже не совпадают: второй равен нулю $\Lambda_2 = 0$, а третий – становится отрицательным $\Lambda_3 < 0$. Теперь $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$, и возникает трехчастотный тор. Это квазипериодическая бифуркация Хопфа QH . Ее отличительный признак – условие совпадения двух показателей до точки бифуркации [9].

При введении шума небольшой интенсивности (рис. 5, b) основной идентификационный признак данной бифуркации сохраняется: показатели $\Lambda_2 = \Lambda_3$. Однако теперь точка бифуркации немного «размыта». Особенно хорошо это становится видно при большой интенсивности шума (рис. 5, c). При малом значении параметра показатели визуально совпадают, но потом становятся не равными друг другу. При этом показатель Λ_2 растет, приближаясь к нулю, а показатель Λ_3 достигает максимума, который, однако, уже не равен нулю. Затем он начинает уменьшаться.

Рис. 5, c наряду с квазипериодической бифуркацией Хопфа иллюстрирует в области больших λ и поведение системы с седло-узловой бифуркацией инвариантных торов при воздействии шума. Теперь показатель Λ_2 демонстрирует «провал» в отрицательную область. Но Λ_2 и Λ_3 при этом существенно не равны друг другу, что является признаком седло-узловой бифуркации торов в отсутствие шума [9]. Отметим, что по мере увеличения интенсивности шума исчезают мелкие особенности и изрезанность графиков (рис. 5, b , c), что отвечает разрушению мелких резонансов.

Заключение

Таким образом, рассмотрено воздействие шума на простейшую систему с двух- и трехчастотной квазипериодичностью. Трехчастотная

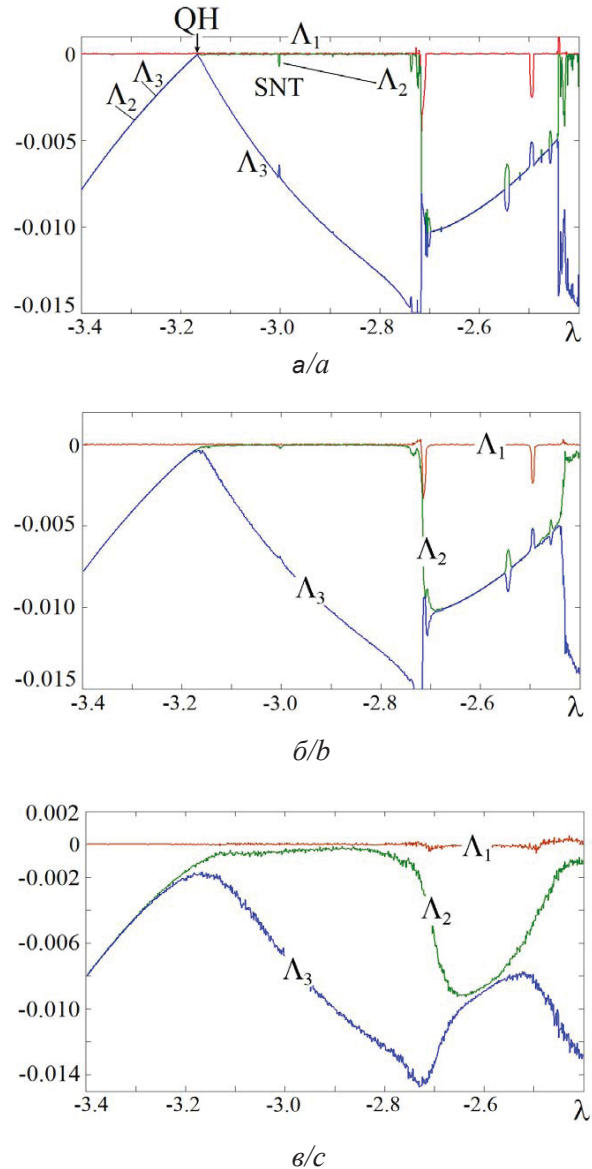


Рис. 5. Зависимость ляпуновских показателей торо отображения с шумом (5) от параметра λ . Амплитуда шума: $a - \varepsilon = 0$, $b - \varepsilon = 10^{-2}$, $c - \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$. Значения параметров $b = 1$, $\varepsilon = 4$, $k = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$, шаг дискретизации $h = 0.1$. Параметр $\beta = 0.081$ (цвет online)

Fig. 5. Dependence of Lyapunov exponents of the torus map with noise (5) on the parameter λ . The noise amplitude is: $a - \varepsilon = 0$, $b - \varepsilon = 10^{-2}$, $c - \varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$. The values of the parameters $b = 1$, $\varepsilon = 4$, $k = 0.02$, $\omega_0 = 2\pi$, the discretization step $h = 0.1$. Parameter $\beta = 0.081$ (colour online)

квазипериодичность сохраняется при некоторых амплитудах шума, но затем превращается в двухчастотную. В Фурье-спектрах этот процесс развивается по сценарию «замазывания» шумовыми составляющими соответствующих спектральных компонент. Квазипериодические бифуркации при воздействии шума занимают



определенные интервалы по параметру, но основные их классификационные признаки (равенство или неравенство соответствующих ляпуновских показателей) на качественном уровне сохраняются.

Список литературы

1. Schuster H. G., Just W. *Deterministic chaos : An introduction*. Weinheim : Wiley-VCH, 2006. 283 p.
2. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization : A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. 432 p.
3. Кузнецов С. П. *Динамический хаос*. М. : Физматлит, 2001. 296 с.
4. Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development*. Berlin : Springer Science & Business Media, 2007. 446 p.
5. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Stankevich N. V. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15. P. 1676–1681.
6. Anishchenko V. S., Nikolaev S. M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 76. P. 046216.
7. Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms : The Arnol'd resonance web // *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*. 2008. Vol. 15, № 5. P. 769–787.
8. Vitolo R., Broer H., Simó C. Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // *Nonlinearity*. 2010. Vol. 23. P. 1919–1947.
9. Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2011. Vol. 16, № 1–2. P. 154–184.
10. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus : Synchronization of quasiperiodic motions // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73. P. 056202.
11. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sedova J. V. Effect of noise on the critical golden-mean quasiperiodic dynamics in the circle map // *Physica A*. 2006. Vol. 359. P. 48–64.
12. Kuznetsov A. P., Sedova Yu. V. The simplest map with three-frequency quasi-periodicity and quasi-periodic bifurcations // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26, iss. 8. P. 1630019.

References

1. Schuster H. G., Just W. *Deterministic chaos: An introduction*. Weinheim, Wiley-VCH, 2006. 283 p.
2. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge, Cambridge University Press, 2001. 432 p.
3. Kuznetsov S. P. *Dinamicheskij haos* [Dynamical Chaos]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 296 p. (in Russian).
4. Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development*. Berlin, Springer Science & Business Media, 2007. 446 p.
5. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Stankevich N. V. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, pp. 1676–1681.
6. Anishchenko V. S., Nikolaev S. M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, pp. 046216.
7. Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 769–787.
8. Vitolo R., Broer H., Simó C. Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms. *Nonlinearity*, 2010, vol. 23, pp. 1919–1947.
9. Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2011, vol. 16, no. 1–2, pp. 154–184.
10. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 73, pp. 056202.
11. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sedova J. V. Effect of noise on the critical golden-mean quasiperiodic dynamics in the circle map. *Physica A*, 2006, vol. 359, pp. 48–64.
12. Kuznetsov A. P., Sedova Yu. V. The simplest map with three-frequency quasi-periodicity and quasi-periodic bifurcations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, iss. 8, pp. 1630019.

Поступила в редакцию 21.10.2020, после рецензирования 07.12.2020, принята к публикации 31.01.2021
 Received 21.10.2020, revised 07.12.2020, accepted 31.01.2021