

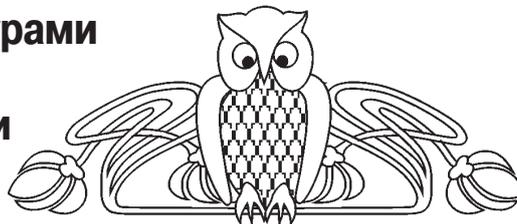


Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 21–28
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Physics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 21–28

Научная статья
УДК 530.182+53786

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-21-28>

Динамика генератора с тремя контурами в цепи обратной связи. Формирование мультистабильности и переход к хаосу



О. В. Астахов¹, С. В. Астахов², Н. С. Фадеева³, В. В. Астахов¹

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Астахов Олег Владимирович, ассистент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, astakhovov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3798-5774>

Астахов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Центра квантовых технологий физического факультета, s.v.astakhov@quantum.msu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7682-1919>

Фадеева Наталья Сергеевна, ассистент кафедры радиоэлектроники и телекоммуникаций, n.krakhovskaya@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8322-9203>

Астахов Владимир Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, astakhovv@icloud.com, <https://orcid.org/0000-0001-9597-6214>

Аннотация. Рассмотрен кольцевой генератор с тремя линейными колебательными контурами в цепи обратной связи и нелинейным усилителем. Выведены уравнения генератора, представлены результаты численного моделирования, описаны результаты бифуркационного анализа. Установлено, что добавление колебательных контуров в цепь обратной связи классического генератора Ван дер Поля приводит к появлению квазипериодических и хаотических режимов, к появлению мультистабильности. В рассмотренном трёхмодовом генераторе выявлен бифуркационный механизм формирования мультистабильности, который определяется двумя последовательными суперкритическими бифуркациями Андронова – Хопфа состояния равновесия и субкритической бифуркацией Неймарка – Сакера седлового предельного цикла.

Ключевые слова: автоколебания, мультистабильность, механизм формирования мультистабильности, динамический хаос, многомодовые кольцевые генераторы

Благодарности: Н.С.Ф. выражает признательность за частичное финансирование работы в рамках гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-31.2019.8).

Для цитирования: Астахов О. В., Астахов С. В., Фадеева Н. С., Астахов В. В. Динамика генератора с тремя контурами в цепи обратной связи. Формирование мультистабильности и переход к хаосу // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 21–28. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-21-28>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-21-28>

Dynamics of the generator with three circuits in the feedback loop. Multistability formation and transition to chaos

О. В. Астахов¹, С. В. Астахов², Н. С. Фадеева³, В. В. Астахов¹

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Moscow GSP-1, 119991, Russia

³Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

Oleg V. Astakhov, astakhovov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-3798-5774>

Sergey V. Astakhov, s.v.astakhov@quantum.msu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7682-1919>

Natalia S. Fadeeva, n.krakhovskaya@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8322-9203>

Vladimir V. Astakhov, AstakhovV@icloud.com, <https://orcid.org/0000-0001-9597-6214>

© Астахов О. В., Астахов С. В., Фадеева Н. С., Астахов В. В., 2021



Abstract. Background and Objectives: Studying the dynamical mechanisms of the emergence of nonlinear phenomena that are characteristic for multimode self-oscillating systems consisting of interacting oscillators and an ensemble of passive oscillators or representing active nonlinear systems with complex feedback channels is an important urgent task. The simplest example of a self-oscillating system with a complex feedback is the well-known classical van der Pol oscillator with an additional linear oscillatory circuit included in the feedback channel. We investigate the behavior of the multimode system increasing the number of oscillatory circuits in the oscillator's feedback loop. The research in this paper can help to better understand the mechanisms of multistability formation in infinite-dimensional self-oscillating systems such as a generator with delayed feedback and a generator with distributed feedback. **Materials and Methods:** The system equations were derived for the electronic scheme of the self-oscillating system. To describe the existing dynamic modes by numerical simulation methods, the projections of the phase portraits and the Poincare sections were obtained. To study the mechanisms of formation of multistable states, the bifurcation analysis methods were used. **Results:** It was found that the mechanism underlying the multistability formation is based on a sequence of two supercritical Andronov – Hopf bifurcations and a subcritical Neymark – Saker bifurcation. Therefore, the multistability emerges as a result of gaining stability by the unstable limit set that existed before the multistability appears. **Conclusion:** The discovered mechanism of multistability formation opens up wide possibilities for managing the multistability, which are inaccessible for systems in which the multistability is realized through tangential bifurcations. In contrast to the tangential bifurcation, the subcritical Neymark – Sacker bifurcation assumes the existence of a limit cycle both before and after the bifurcation. Thus, it is possible to use a wide range of methods and tools to stabilize saddle limit cycles in order to control the boundaries of the multistability region in the space of control parameters of the system. **Keywords:** self-oscillations, multistability, multistability formation, dynamic chaos, multimode ring oscillator

Acknowledgements: This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation to support young Russian scientists – Candidates of Sciences (MK-31.2019.8).

For citation: Astakhov O. V., Astakhov S. V., Fadeeva N. S., Astakhov V. V. Dynamics of the generator with three circuits in the feedback loop. Multistability formation and transition to chaos. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Physics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 21–28 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-1-21-28>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Автоколебательные системы – это нелинейные диссипативные динамические системы, демонстрирующие незатухающие во времени колебания [1]. Поддержание автоколебаний возможно только при условии выполнения баланса между энергией, вносимой в систему, и энергией, рассеиваемой в ней. Это осуществляется за счет сил, зависящих от состояния движения самой системы [1, 2]. Во многих случаях такой механизм сохранения динамического баланса в среднем на характерном интервале времени осуществляется с помощью обратной связи. Свойства и конкретные особенности каналов обратной связи могут существенно влиять на поведение автоколебательной системы. Простейшим примером автоколебательных систем со сложной обратной связью является хорошо известная классическая двухмодовая автоколебательная система, представляющая собой генератор Ван дер Поля с дополнительным линейным колебательным контуром, включенным в цепь обратной связи

[3]. Недавно было показано [4, 5], что в такой системе при вариации управляющих параметров могут наблюдаться периодические и квазипериодические автоколебания, переход к хаосу через удвоения торов.

В данной статье рассматривается кольцевой генератор с нелинейным усилителем и тремя линейными колебательными контурами в цепи обратной связи. При исследовании динамической системы использовалось программное обеспечение ХРРАУТ [6].

1. Исследуемая система.

Структурная схема и уравнения генератора

Исследуемая в данной работе динамическая система представляет собой генератор Ван дер Поля [7], в цепь обратной связи которого внесены два дополнительных колебательных контура. Структурная схема такого трёхмодового кольцевого генератора представлена на рис. 1.

Используя законы Кирхгофа, для неё можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - 2\gamma^2 p^2)y, & \dot{x}_1 &= (1 - 2\gamma^2 p^2)y_1, & \dot{x}_2 &= (1 - 2\gamma^2 p^2)y_2, \\ \dot{y} &= (1 - \gamma^2 p^2)(-\alpha y - x) + \gamma(-p\alpha y_1 - p^2 x_1) + \gamma^2 p^2(-\alpha y_2 - x_2 + (\lambda - \beta x^2)y), \\ \dot{y}_1 &= (-p\alpha y_1 - p^2 x_1) + \gamma p^2(-\alpha y - x - \alpha y_2 - x_2 + (\lambda - \beta x^2)y), \\ \dot{y}_2 &= (1 - \gamma^2 p^2)(-\alpha y_2 - x_2 + (\lambda - \beta x^2)y) + \gamma(-p\alpha y_1 - p^2 x_1) + \gamma^2 p^2(-\alpha y - x). \end{aligned} \quad (1)$$

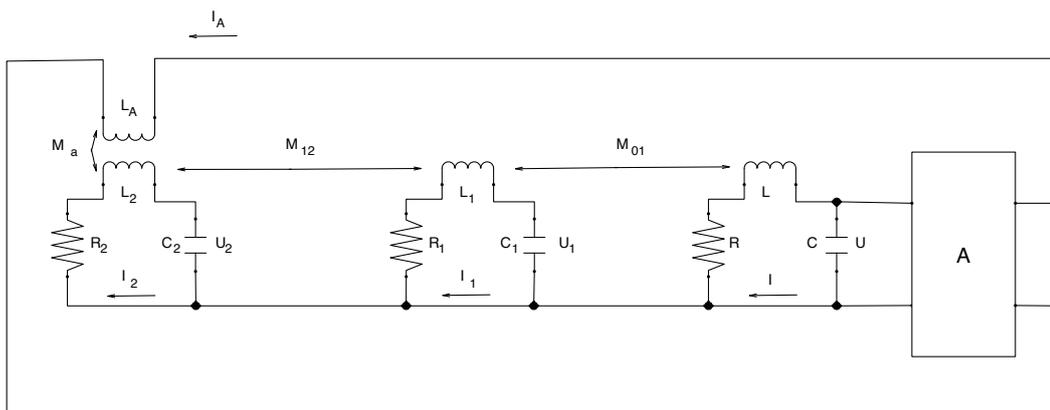


Рис. 1. Структурная схема трёхмодового генератора. A – нелинейный усилитель, управляющая характеристика которого задана функцией $I_a = S_0u - S_1u^3$

Fig. 1. Block scheme of a three-mode generator. A is a nonlinear amplifier, which is determined by the control characteristic $I_a = S_0u - S_1u^3$

Здесь x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 – динамические переменные; λ – параметр возбуждения; α – параметр диссипации; β – параметр нелинейности; γ – коэффициент связи;

p – параметр расстройки. Нормированные переменные и параметры системы связаны с напряжениями и параметрами схемы следующим образом:

$$x = \frac{u}{u_0}, x_{1,2} = \frac{u_{1,2}}{u_0}, \quad y = \frac{1}{1 - 2\gamma^2 p^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{u}{u_0} \right), \quad y_{1,2} = \frac{1}{1 - 2\gamma^2 p^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{u_{1,2}}{u_0} \right),$$

$$\lambda = \frac{M_a S_0}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad \alpha = \frac{R}{\sqrt{LC^{-1}}}, \quad \beta = \frac{3M_a S_1 u_0^2}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad \gamma = \frac{M_{01}}{L}, \quad p = \frac{\omega_{01}}{\omega_0},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad \tau = \frac{\omega_0 t}{1 - 2\gamma^2 p^2}.$$

Отметим, что при выводе уравнений предполагалось, что собственные частоты в первом и третьем осцилляторе одинаковые, ёмкости конденсаторов, коэффициенты диссипации и коэффициенты связи равны. Кроме того, имеется еще одно ограничение на параметр p , которое возникает из-за перехода к нормированному времени. Поскольку τ должно быть положительной величиной, то параметры γ, p могут меняться только в ограниченном диапазоне значений: $0 < p < \frac{1}{\gamma\sqrt{2}}$. В дальнейшем мы полагаем $\gamma = 0.2$ и $p < 2$, что не противоречит указанному ограничению.

2. Динамика трёхмодового кольцевого генератора. Характерные режимы и мультистабильность

Рассмотрим поведение системы в зависимости от λ при фиксированных значениях $\alpha = 0.01$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 0.2$, $p = 0.85$. При недостаточной подкачке энергии в генераторе отсутствуют автоколебания,

в фазовом пространстве в начале координат существует устойчивый фокус (рис. 2, а). С увеличением λ в системе возникает устойчивый предельный цикл (рис. 2, б). При дальнейшем увеличении λ периодические колебания сменяются квазипериодическими с двумя частотами, образом которых в фазовом пространстве является двумерный тор (рис. 2, в). Затем происходит последовательность удвоений тора (рис. 2, з, д), завершающаяся формированием хаотического аттрактора (рис. 2, е). Следует отметить, что в данном случае хорошо различимыми по сечениям Пуанкаре являются первые две бифуркации удвоения торов. В данной работе не ставилась задача о точном определении числа удвоений в разных сечениях пространства управляющих параметров с привлечением более тонких методов анализа. Трёхмодовый генератор демонстрирует мультистабильность. В фазовом пространстве сосуществуют устойчивые предельные циклы (рис. 3, а), устойчивые двумерные торы (рис. 3, б), хаотические аттракторы

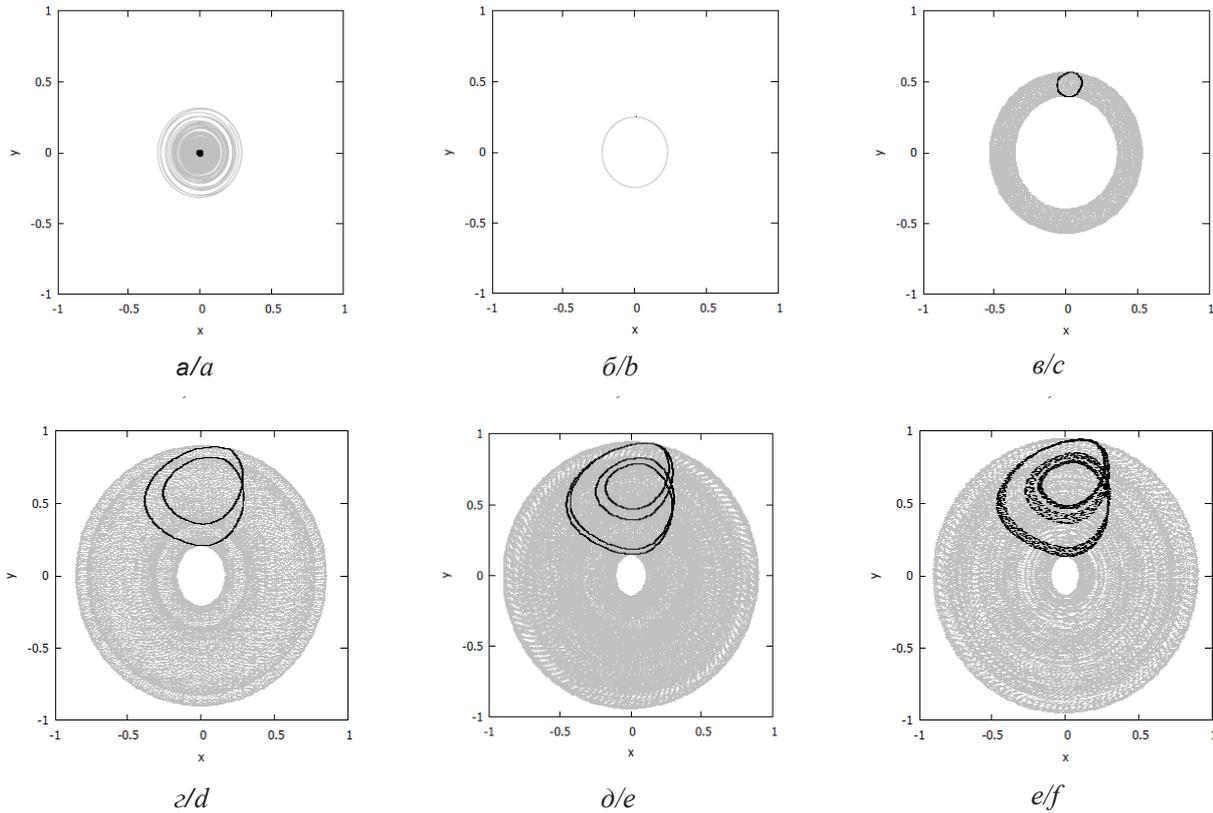


Рис. 2. Проекция фазовых портретов (обозначены серым цветом) и сечения Пуанкаре (обозначены черным цветом) при фиксированных значениях параметров $\alpha = 0.01, \beta = 1.0, \gamma = 0.2, p = 0.85$ в зависимости от параметра возбуждения: $a - \lambda = 0.01$ – устойчивый фокус, $b - \lambda = 0.04$ – предельный цикл, $c - \lambda = 0.08$ – двумерный тор; $d - \lambda = 0.14$ – двухобходный двумерный тор; $e - \lambda = 0.1474$ – четырехобходный двумерный тор; $f - \lambda = 0.1485$ – хаотический аттрактор

Fig. 2. Projections of the phase portraits (grey color) and the Poincaré sections (black color) for fixed values of the parameters $\alpha = 0.01, \beta = 1.0, \gamma = 0.2, p = 0.85$ versus the excitation parameter: $a - \lambda = 0.01$ – stable focus, $b - \lambda = 0.04$ – limit cycle, $c - \lambda = 0.08$ – two-dimensional torus; $d - \lambda = 0.14$ – doubled two-dimensional torus; $e - \lambda = 0.1474$ – quadrupled two-dimensional torus; $f - \lambda = 0.1485$ – chaotic attractor

(рис. 3, в). В системе возбуждаются два разных автоколебательных режима, которые отличаются друг от друга сдвигами фаз между колебаниями в осцилляторах цепочки обратной связи. В одном случае они близки к синфазным, а в другом – к противофазным. Первый случай соответствует рождению предельного цикла C_1 (см. рис. 3, а), а второй – рождению цикла C_2 (см. рис. 3, а).

На основе каждого из циклов при вариации управляющих параметров формируется своё семейство аттракторов, которые сосуществуют в фазовом пространстве, образуя мультистабильность. Генератор является мультистабильным в интервале значений параметра p примерно от 0.8 до 1.3.

3. Бифуркационный анализ формирования мультистабильных состояний

Зафиксируем параметры $\lambda = 0.07, \alpha = 0.01, \gamma = 0.2, \beta = 1.0$ и проследим за бифуркациями

состояния равновесия и предельных циклов при вариации расстройки в интервале $p \in (0.0, 2.0)$. На рис. 4 представлена бифуркационная диаграмма. При $p < 0.263$ в фазовом пространстве существует устойчивое состояние равновесия E . Оно характеризуется шестью собственными значениями, действительные части которых меньше нуля. При переходе через точку $p = 0.263$ действительные части одной пары комплексно-сопряженных собственных значений из отрицательных становятся положительными, происходит бифуркация Андронова – Хопфа (AH_{11}), в результате которой в окрестности неподвижной точки E рождается устойчивый цикл C_1 .

При небольшой надкритичности, по мере увеличения параметра расстройки радиус предельного цикла растёт. Далее по параметру, с превышением значения $p = 0.676$ одна пара мультипликаторов предельного цикла C_1 выходит

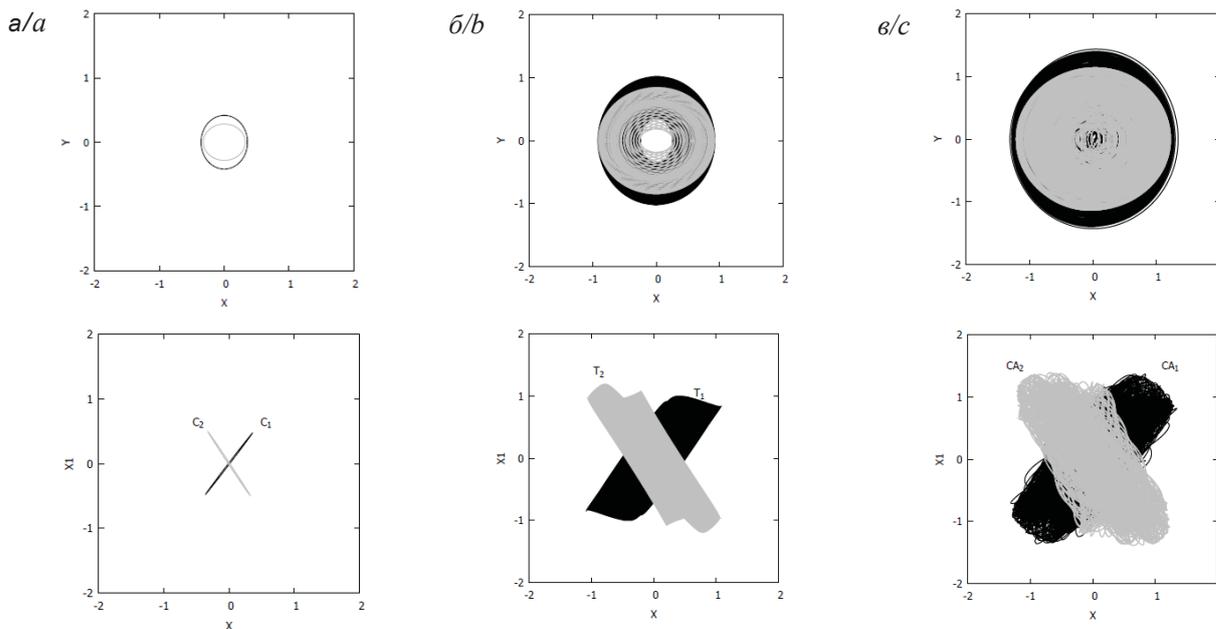


Рис. 3. Проекция аттракторов, сосуществующих в фазовом пространстве при $\alpha = 0.01, \beta = 1.0, \gamma = 0.2, p = 0.98$ и разных значениях λ : *a* – предельные циклы C_1 и C_2 при $\lambda = 0.07$, *b* – торы T_1 и T_2 при $\lambda = 0.18$, *c* – хаотические аттракторы CA_1 и CA_2 при $\lambda = 0.255$

Fig. 3. Projections of the attractors coexisting in the phase space at $\alpha = 0.01, \beta = 1.0, \gamma = 0.2, p = 0.98$ and different values of λ : *a* – limit cycles C_1 and C_2 at $\lambda = 0.07$, *b* – tori T_1 and T_2 at $\lambda = 0.18$, *c* – chaotic attractors CA_1 and CA_2 at $\lambda = 0.255$

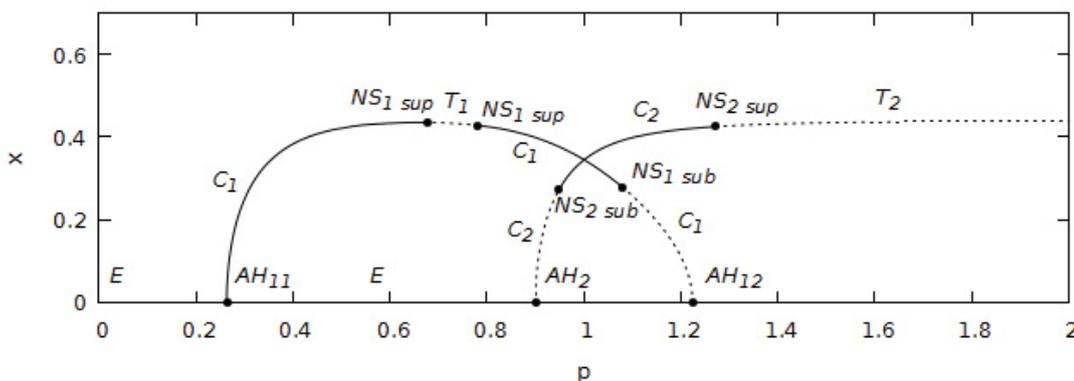


Рис. 4. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра p при фиксированных значениях $\lambda = 0.07, \alpha = 0.01, \gamma = 0.2, \beta = 1.0$. По оси ординат отложено максимальное значение динамической переменной x

Fig. 4. Bifurcation diagram versus the natural frequency mismatch parameter at $\lambda = 0.07, \alpha = 0.01, \gamma = 0.2, \beta = 1.0$. The ordinate is the maximum value of the dynamical variable x

за пределы единичной окружности, происходит суперкритическая бифуркация Неймарка – Сакера (NS_{1sup}). Цикл C_1 становится седловым, а в его окрестности рождается устойчивый двумерный тор T_1 . Он существует до значения $p = 0.781$. При подходе к этой точке тор T_1 стягивается к циклу C_1 . За этой точкой квазипериодические колебания не наблюдаются, предельный цикл C_1 вновь

становится устойчивым, пара комплексно-сопряженных мультипликаторов входит в единичную окружность. То есть при обратном движении по параметру в точке $p = 0.781$ происходит суперкритическая бифуркация Неймарка – Сакера.

Цикл C_1 наблюдается в устойчивом виде до значения $p = 1.081$. Выше него пара комплексно-сопряженных мультипликаторов выходит за еди-



ническую окружность. Цикл становится седловым, но устойчивый двумерный тор не рождается в его окрестности. При обратном движении по параметру в точке $p = 1.081$ происходит субкритическая бифуркация Неймарка – Сакера. Из седлового цикла рождается седловой тор, предельный цикл становится устойчивым. При дальнейшем увеличении p от 1.081 до 1.224 седловой цикл C_1 уменьшается, он стягивается к седловому состоянию равновесия E и влипает в него. Однако состояние равновесия E остаётся неустойчивым. При обратном движении по параметру, при переходе через точку $p = 1.224$ происходит суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа, из седлового состояния равновесия рождается седловой предельный цикл.

Кроме двух описанных бифуркаций Андронова – Хопфа в точках $p = 0.263$ и $p = 1.224$ состояние равновесия E претерпевает еще одну бифуркацию, которая ведёт к формированию мультистабильности. После первой суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа AH_{11} состояние равновесия E является седловым: действительные части двух его собственных значений из шести – положительные, остальные – отрицательные. При достижении параметром p значения 0.900, состояние равновесия E претерпевает вторую суперкритическую бифуркацию Андронова – Хопфа AH_2 . В результате этой бифуркации точка E теряет устойчивость еще по двум собственным направлениям, а в её окрестности рождается седловой предельный цикл C_2 . Он увеличивается в размерах по мере увеличения p и в точке NS_{2sub} при $p = 0.946$ претерпевает субкритическую бифуркацию Неймарка – Сакера. Из седлового цикла C_2 рождается седловой тор, а C_2 в результате данной бифуркации приобретает устойчивость. Система становится бистабильной: в фазовом пространстве, помимо ставшего устойчивым C_2 , уже существует устойчивый предельный цикл C_1 . Дальнейший рост p ведет к суперкритической бифуркации Неймарка – Сакера NS_{2sup} устойчивого предельного цикла C_2 при $p = 1.272$, в результате которой в его окрестности рождается устойчивый двумерный тор T_2 .

Таким образом, в системе (1) реализуется механизм формирования мультистабильности, основанный на последовательности двух суперкритических бифуркаций Андронова – Хопфа и субкритической бифуркации Неймарка – Сакера.

Заключение

Рассмотренный в данной работе кольцевой генератор с тремя колебательными контурами в канале обратной связи представляет собой естественное усложнение классических базовых систем теории колебаний – генератора Ван дер Поля и генератора Ван дер Поля с дополнительным колебательным контуром. Наличие дополнительного линейного осциллятора в цепи обратной связи генератора Ван дер Поля обеспечивает реализацию хаотической динамики. Добавление еще одного линейного осциллятора в цепь обратной связи (система (1)) ведёт к добавлению еще одного семейства сосуществующих автоколебательных режимов, также эволюционирующего до хаотического аттрактора через разрушение квазипериодических колебаний. В результате наблюдаются разнообразные мультистабильные состояния – и периодические, и квазипериодические, и хаотические. Возникновение мультистабильности обусловлено особым бифуркационным механизмом, не подразумевающим возникновения пар предельных множеств в результате седло-узловых бифуркаций. В исследуемой системе возникновение мультистабильности обусловлено двумя последовательными суперкритическими бифуркациями Андронова – Хопфа состояния равновесия, в результате которых рождается устойчивый и седловой предельный цикл, и одной субкритической бифуркацией Неймарка – Сакера, в результате которой седловой предельный цикл становится устойчивым. Следует отметить, что бифуркационный механизм формирования мультистабильности в рассмотренном генераторе с тремя колебательными контурами в цепи обратной связи является таким же, как и бифуркационный механизм явления затягивания частоты в генераторе Ван дер Поля с дополнительным колебательным контуром, что было выявлено в работе [5].

Список литературы

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 916 с.
2. Гукенхаймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
3. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М. : Гостехиздат, 1952. 272 с.



4. Astakhov O., Astakhov S., Krakhovskaya N., Astakhov V., Kurths J. The emergence of multistability and chaos in a two-mode van der Pol generator versus different connection types of linear oscillators // *Chaos*. 2018. Vol. 28. P. 063118-1–063118-11.
5. Astakhov S., Astakhov O., Astakhov V., Kurths J. Bifurcational Mechanism of Multistability Formation and Frequency Entrainment in a van der Pol Oscillator with an Additional Oscillatory Circuit // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26, № 7. P. 1650124-1–1650124-10.
6. Ermentrout B. *Simulating, Analyzing and Animating Dynamical Systems : A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. Philadelphia, SIAM, 2002. 290 p.
7. Van der Pol B. On Oscillation Hysteresis in a Triode Generator with Two Degrees of Freedom // *Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1922. Ser.6. P. 700–719.
8. Kanno K., Uchida A., Bunsen M. Complexity and bandwidth enhancement in unidirectionally coupled semiconductor lasers with time-delayed optical feedback // *Physical Review E*. 2016. Vol. 93. P. 032206-1–032206-10.
9. Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Wolfrum M., D’Huys O., Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96. P. 042217-1–042217-9.
10. Vitko V. V., Nikitin A. A., Ustinov A. V., Kalinikos B. A. A Theoretical Model of Dual Tunable Optoelectronic Oscillator // *Journal of Physics : Conf. Series*. 2018. Vol. 1038. P. 012106-1–012106-6.
11. Yanchuk S., Ruschel S., Sieber J., Wolfrum M. Temporal Dissipative Solitons in Time-Delay Feedback Systems // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 123. P. 053901-1–053901-6.
12. Kuznetsov S. P., Sedova J. V. Robust Hyperbolic Chaos in Froude Pendulum with Delayed Feedback and Periodic Braking // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2019. Vol. 29, № 12. P. 1930035-1–1930035-9.
13. Tian K., Ren H. P., Grebogi C. Existence of Chaos in the Chen System with Linear Time-Delay Feedback // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2019. Vol. 29, № 9. P. 1950114-1–1950114-11.
14. Guo W., Ning L. Vibrational Resonance in Fractional Order Quintic Oscillator System with Time Delay Feedback // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2020. Vol. 30, № 2. P. 2050025-1–2050025-10.
15. Pyragas V., Pyragas K. Relation between the extended time-delayed feedback control algorithm and the method of harmonic oscillators // *Physical Review E*. 2015. Vol. 92. P. 022925-1–022925-7.
16. Ngounkadi E. B. M., Fotsin H. B., Fotso P. L. Implementing a memristive van der Pol oscillator coupled to a linear oscillator : synchronization and application to secure communication // *Physica Scripta*. 2014. Vol. 89. P. 035201-1–035201-9.
17. Erneux T., Javaloyes J., Wolfrum M., Yanchuk S. Introduction to Focus Issue: Time-delay dynamics // *Chaos*. 2017. Vol. 27. P. 114201-1–114201-5.
18. Risau-Gusman S. Effects of time-delayed feedback on the properties of self- sustained oscillators // *Physical Review E*. 2016. Vol. 94. P. 042212-1–042212-10.
19. Pisarchik A. N., Feudel U. Control of multistability // *Physics Reports-Review Section of Physics Letters*. 2014. Vol. 540. P. 167–218.
20. Pyragas V., Pyragas K. Act-and-wait time-delayed feedback control of nonautonomous systems // *Physical Review E*. 2016. Vol. 94. P. 012201-1–012201-8.

References

1. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaykin S. E. *Theory of Oscillators*. Oxford, New York, Toronto, Pergamon Press, 1966. 848 p.
2. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, Springer-Verlag, 1983. 462 p.
3. Teodorichik K. F. *Avtokolebatel'nyye sistemy* [Self-oscillating systems]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1952. 272 p. (in Russian).
4. Astakhov O., Astakhov S., Krakhovskaya N., Astakhov V., Kurths J. The emergence of multistability and chaos in a two-mode van der Pol generator versus different connection types of linear oscillators. *Chaos*, 2018, vol. 28, pp. 063118-1–063118-11
5. Astakhov S., Astakhov O., Astakhov V., Kurths J. Bifurcational Mechanism of Multistability Formation and Frequency Entrainment in a van der Pol Oscillator with an Additional Oscillatory Circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 7, pp. 1650124-1–1650124-10.
6. Ermentrout B. *Simulating, Analyzing and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. Philadelphia, SIAM, 2002. 290 p.
7. Van der Pol B. On Oscillation Hysteresis in a Triode Generator with Two Degrees of Freedom. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1922, ser. 6, pp. 700–719.
8. Kanno K., Uchida A., Bunsen M. Complexity and bandwidth enhancement in unidirectionally coupled semiconductor lasers with time-delayed optical feedback. *Physical Review E*, 2016, vol. 93, pp. 032206-1–032206-10.
9. Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Wolfrum M., D’Huys O., Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring. *Physical Review E*, 2017, vol. 96, pp. 042217-1–042217-9.
10. Vitko V. V., Nikitin A. A., Ustinov A. V., Kalinikos B. A. A Theoretical Model of Dual Tunable Optoelectronic Oscillator. *Journal of Physics: Conf. Series*, 2018, vol. 1038, pp. 012106-1–012106-6.
11. Yanchuk S., Ruschel S., Sieber J., Wolfrum M. Temporal Dissipative Solitons in Time-Delay Feedback Systems. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 123, pp. 053901-1–053901-6.



12. Kuznetsov S. P., Sedova J. V. Robust Hyperbolic Chaos in Froude Pendulum with Delayed Feedback and Periodic Braking. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, vol. 29, no. 12, pp. 1930035-1–1930035-9.
13. Tian K., Ren H. P. Grebogi C. Existence of Chaos in the Chen System with Linear Time-Delay Feedback. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, vol. 29, no. 9, pp. 1950114-1–1950114-11.
14. Guo W., Ning L. Vibrational Resonance in Fractional Order Quintic Oscillator System with Time Delay Feedback. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 2050025-1–2050025-10.
15. Pyragas V., Pyragas K. Relation between the extended time-delayed feedback control algorithm and the method of harmonic oscillators. *Physical Review E*, 2015, vol. 92, pp. 022925-1–022925-7.
16. Ngouonkadi E. B. M., Fotsin H. B., Fotso P. L. Implementing a memristive van der Pol oscillator coupled to a linear oscillator: synchronization and application to secure communication. *Physica Scripta*, 2014, vol. 89, pp. 035201-1–035201-9.
17. Erneux T., Javaloyes J., Wolfrum M., Yanchuk S. Introduction to Focus Issue: Time-delay dynamics. *Chaos*, 2017, vol. 27, pp. 114201-1–114201-5.
18. Risau-Gusman S. Effects of time-delayed feedback on the properties of self- sustained oscillators. *Physical Review E*, 2016, vol. 94, pp. 042212-1–042212-10.
19. Pisarchik A. N., Feudel U. Control of multistability. *Physics Reports*, 2014, vol. 540, pp. 167–218.
20. Pyragas V., Pyragas K. Act-and-wait time-delayed feedback control of nonautonomous systems. *Physical Review E*, 2016, vol. 94, pp. 012201-1–012201-8.

Поступила в редакцию 27.05.2020, после рецензирования 05.10.2020, принята к публикации 19.11.2020

Received 27.05.2020, revised 05.10.2020, accepted 19.11.2020