



УДК 530.182

## Взаимная синхронизация диссипативно связанных мемристивных генераторов



И. А. Корнеев, А. В. Слепнев, В. В. Семенов, Т. Е. Вадивасова

Корнеев Иван Александрович, заведующий учебной лабораторией радиофизики кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ivankorneev@yandex.ru

Слепнев Андрей Вячеславович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, a.v.slepnev@gmail.com

Семенов Владимир Викторович, кандидат физико-математических наук, Институт FEMTO-ST, CNRS и Университет Бургундии Франш-Конте, Безансон, Франция, semenov\_v\_v@list.ru

Вадивасова Татьяна Евгеньевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, vadvivasovate@yandex.ru

Исследуются особенности полной и частотной синхронизации в системе двух диссипативно связанных мемристивных генераторов периодических колебаний. Демонстрируются особенности синхронизации, связанные с мемристивным характером взаимодействующих систем. Они заключаются в непрерывной зависимости границ синхронизации (как полной, так и частотной) от начальных условий, в частности от начального состояния мемристивных элементов двух генераторов. Исследуется влияние неидеального характера мемристивных элементов, приводящее к исчезновению чувствительности к начальным условиям.

**Ключевые слова:** мемристор, мемристивные системы, синхронизация, автоколебания.

Поступила в редакцию: 23.04.2020 / Принята: 01.06.2020 / Опубликовано: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-3-210-221>

### Введение

Динамические системы, содержащие мемристивные элементы, то есть элементы, обладающие «памятью», составляют особый класс динамических систем, которые могут быть названы мемристивными системами. Примером мемристивного двухполюсника может служить мемристор Чуа (мемристивная проводимость или сопротивление в теоретической работе [1] реализуется на практике с помощью различных физических устройств [2–9]). Под мемристив-

ными элементами и устройствами в обобщенном смысле понимают двухполюсники с характеристикой вида:

$$x(t) = G_M(y, z, t)y(t), \quad \frac{dz}{dt} = f(y, z, t),$$

где  $x$  и  $y$  – некоторые переменные, соответствующие воздействию и отклику (например, ток и напряжение), а  $z$  – переменная, задающая мгновенное состояние мемристивного элемента. Характеристика мемристивного элемента  $G_M$  (например, проводимость) в текущий момент времени зависит от переменной  $z(t)$ , значение которой в данный момент времени связано со входной переменной  $y$  инерционно, т.е. зависит от предыстории мемристора [10, 11]. Если уравнение мемристивной переменной имеет вид  $dz/dt = f(y)$ , то

$$z(t) = z(0) + \int_0^t f[y(\theta)]d\theta, \quad (1)$$

т.е. состояние мемристивного элемента в момент времени  $t$  зависит от начального значения переменной  $z(0)$  и «память» о начальном состоянии мемристивного элемента сохраняется бесконечно долго. Такой мемристивный элемент можно назвать «идеальным». Реальные устройства не обладают бесконечно долгой памятью, однако при некоторых условиях влияние начального состояния может сохраняться на достаточно длительном времени. В «неидеальном» случае мемристивный элемент можно рассматривать как некоторую цепочку инерционной нелинейности. При соответствующем выборе характеристики она может существенно повлиять на динамику системы. Например, привести к возникновению динамического хаоса, как это имеет место в радиотехническом генераторе с инерционной нелинейностью Анищенко – Астахова [12].

Мемристивные системы изучались в работах [13–22], в которых были описаны особенности их динамики. Наличие идеальных мемристивных элементов в ряде случаев приводит к возникновению в фазовом пространстве динамической системы многообразий, состоящих из точек равновесия и замкнутых орбит. Они не являются изолированными и образуют непрерыв-



ное инвариантное множество притягивающих траекторий, т.е. притягивающее предельное множество. Оно является аттрактором системы, но не обладает всюду плотной траекторией. Особенности поведения динамических систем с такими притягивающими множествами описаны в [13, 14, 17, 20–22].

В ряде работ были установлены и исследованы эффекты синхронизации в мемристивных системах [18, 23–28]. При исследовании синхронизации можно выделить следующие виды мемристивных взаимодействующих систем: «обычные» системы (например, периодические генераторы ван дер Поля и ФитцХью – Нагумо или генераторы хаоса, такие как осцилляторы Лоренца), связанные через мемристивные элементы [23–28]; мемристивные системы с обычной резистивной или иной немемристивной связью [18, 29–31] и мемристивные системы с мемристивной связью. Последний случай, насколько нам известно, пока еще не рассматривался. Большое количество статей посвящено синхронизации искусственных мемристивных нейронных сетей [29–35], в которых определяются условия их полной или запаздывающей синхронизации.

В мемристивных системах синхронизация колебаний имеет особенности, однако полное описание этих особенностей до настоящего времени отсутствует. В целом синхронизация мемристивных систем еще недостаточно исследована. Особенно это касается синхронизации мемристивных генераторов, как идентичных, так и с расстройкой частот.

В настоящей работе исследуются два резистивно связанных генератора, содержащих мемристивные проводимости. Рассматривается как полная синхронизация идентичных генераторов, так и синхронизация частот в генераторах с расстройкой. Выявляются особенности эффектов синхронизации, связанные с мемристивным характером парциальных систем. Анализируется влияние «неидеальности» мемристивных элементов и длительность процессов установления в этом случае.

### 1. Исследуемая модель

В данной работе рассматриваются два мемристивных генератора, взаимодействующих через обычную проводимость (диссипативная связь). Парциальные мемристивные генераторы представляют собой LCR-контур с постоянной отрицательной проводимостью и с мемристивной проводимостью. Отдельно взятый подобный генератор подробно описан в работах

[20–22]. Было показано, что в случае мемристивной проводимости с «идеальной памятью» такой генератор обладает линией равновесий и демонстрирует бифуркации при постоянных параметрах системы и изменении начальных условий (так называемые бифуркации без параметров [36]). Притягивающее предельное множество в фазовом пространстве системы в колебательном режиме представляет собой объединение двумерной поверхности, состоящей из непрерывного множества замкнутых траекторий и двух полупрямых, образованных устойчивыми точками равновесия.

Уравнения системы двух связанных мемристивных генераторов (рис. 1) в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 - G(z_1)x_1 + k(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = -x_1 + \beta y_1, \\ \dot{z}_1 = x_1 - \delta z_1, \\ \dot{x}_2 = y_2 - G(z_2)x_2 - k(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_2 = p(-x_2 + \beta y_2), \\ \dot{z}_2 = x_2 - \delta z_2. \end{cases} \quad (2)$$

Переменные  $x_1, x_2$  представляют собой нормированные напряжения на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ ;  $y_1, y_2$  – токи через индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ ;  $z_1, z_2$  – переменные, управляющие мемристивными проводимостями (мемристивные переменные). В соответствии с [1] их можно понимать как нормированные магнитные потоки. В реальных мемристивных устройствах эти переменные имеют другой физический смысл. Например, в полупроводниковых мемристорах они могут означать толщину слоя с высокой концентрацией миграционных примесей [2]. Парциальные генераторы полагаются идентичными за исключением расстройки частот. Этого можно добиться, если все элементы двух генераторов (см. рис. 1) выбрать одинаковыми за исключением индуктивностей, отношение которых определяет отношение частот генераторов. Уравнения системы (2) содержат следующие безразмерные параметры:  $k$  – коэффициент, регулирующий силу связи;  $p = \omega_2^2/\omega_1^2 = L_1/L_2$  – коэффициент частотной расстройки;  $\beta = 0.035$  – параметр, определяемый величиной отрицательного сопротивления.

Будем полагать, что зависимость мемристивных проводимостей от переменных  $z_1$  и  $z_2$  задается одной и той же гладкой функцией  $G(z) = a + bz^2$ , где  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ . Уравнения, описывающие динамику мемристивных переменных, в общем случае содержат малый параметр  $\delta$ , который определяет «неидеальность» мемри-

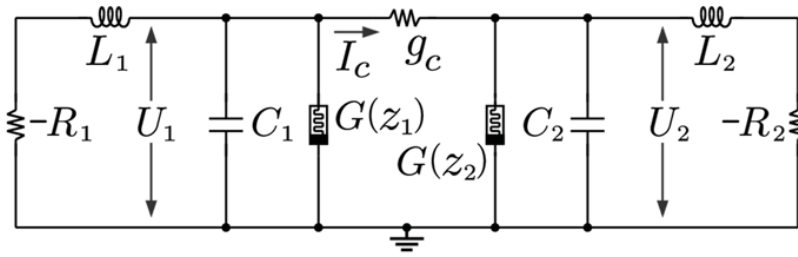


Рис. 1. Радиотехническая схема исследуемой системы двух диссипативно связанных мемристивных генераторов

Fig. 1. Schematic circuit diagram of the studied system of two dissipatively coupled memristive self-oscillators

стивных элементов. В реальных мемристорах «неидеальность» является следствием процесса диффузии носителей заряда в активном слое [37, 38]. Равенство  $\delta = 0$  соответствует «идеальному» мемристор. При этом в фазовом пространстве системы (2) существует инвариантное многообразие (плоскость)  $E$ , состоящее из точек равновесия с координатами  $x_{1,2} = 0, y_{1,2} = 0$ , и произвольными  $z_1$  и  $z_2$ . При фиксированных значениях параметров часть плоскости состоит из устойчивых точек, а часть – из неустойчивых. В результате потери устойчивости точками равновесия в парциальных генераторах возникают колебания. При этом, как и в отдельно взятом мемристивном генераторе, в системе (2) будет существовать множество различных фазовых траекторий, соответствующих установившемуся режиму, характеристики которых непрерывным образом зависят от начального состояния.

«Неидеальные» мемристоры ( $\delta \neq 0$ ) играют роль инерционных нелинейных элементов, которые не являются в строгом смысле мемристивными, так как начальные значения переменных  $z_{1,2}(0)$  со временем перестают влиять на значения проводимостей  $G(z_{1,2}(t))$ . В результате исчезает многообразие точек равновесия. При определенной связи можно ожидать синхронизацию колебаний взаимодействующих мемристивных систем. Рассмотрим эффекты полной и частотной синхронизации колебаний в системе (2), а также исследуем влияние параметра  $\delta$  на явление синхронизации.

## 2. Полная синхронизация идентичных мемристивных генераторов

Полная (синфазная) синхронизация колебаний имеет место в полностью идентичных взаимодействующих системах и означает, что соответствующие фазовые траектории, принадлежа-

щие инвариантному многообразию (симметричному подпространству)  $S: x_1 = x_2 = x, y_1 = y_2 = y, z_1 = z_2 = z$ , являются устойчивыми относительно возмущений, трансверсальных к этому многообразию. Полагая в уравнениях (2)  $x_1 = x, y_1 = y, z_1 = z, x_2 = x + u, y_2 = y + v, z_2 = z + w$  и раскладывая правые части уравнений в ряд в окрестности значений  $x, y, z$  по малым приращениям  $u, v, w$ , ограничиваясь первым порядком малости, можно получить уравнения для малых возмущений  $u, v, w$ :

$$\begin{cases} \dot{u} = v - [G(z) + 2k]u - G_z(z)xw, \\ \dot{v} = -u + \beta v, \\ \dot{w} = u - \delta w, \end{cases} \quad (3)$$

где  $G_z(z) = dG(z)/dz$ . Поведение возмущений во времени, рассчитанное вдоль траектории, принадлежащей инвариантному многообразию  $S$ , характеризует устойчивость или неустойчивость этой траектории в направлениях, трансверсальных  $S$ . Если мемристоры являются «идеальными» ( $\delta = 0$ ), то из уравнений (2) следует, что значение  $z$  для решения, принадлежащего многообразию  $S$ , в любой момент времени  $t$  зависит от начального значения  $z(0)$ . Действительно

$$z(t) = z(0) + \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Переменные  $x(t)$  и  $y(t)$  также зависят от начальных условий. Таким образом, параметры системы (3) и условия устойчивости траектории в инвариантном многообразии  $S$  зависят от начальных условий. Выход на ту или иную траекторию, лежащую в  $S$ , зависит от координат начальной точки, особенно от начальных значений мемристивных переменных  $z_1(0) = z_2(0) = z(0)$ . При  $\delta > 0$  решение уравнения для  $z$  в  $S$  имеют вид:



$$z(t) = z(0)e^{-\delta t} + e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta \tau} x(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Влияние начального значения  $z(0)$  в этом случае экспоненциально убывает, и скорость «забывания» характеризуется величиной  $\delta$ . Непрерывная зависимость устойчивости синхронного режима от начальных условий исчезает.

Исследование режима полной синхронизации при  $p = 1$  двух мемристивных генераторов показало, что при  $\delta = 0$  в инвариантном многообразии  $S$ , как и в отдельно взятом генераторе, существует двумерная поверхность из замкнутых периодических траекторий, которые несколько различаются по форме и диаметру, а также множества точек равновесия. Если оно становится асимптотически устойчивым в трансверсальном направлении, то возникает режим полной синхронизации. Представление о характере аттрактора можно получить на основании проекций фазовых портретов (рис. 2, а–в). Он

представляет собой множество периодических кривых, полученных для множества различных начальных значений  $z_1(0)$ . при фиксированных  $x_{1,2}(0), y_{1,2}(0)$  и трех значениях  $z_2(0)$ :  $z_2(0) = 0.1$  (см. рис. 2, а);  $z_2(0) = 0$  (см. рис. 2, б);  $z_2(0) = -0.1$  (см. рис. 2, в). Серая область соответствует множеству замкнутых траекторий на аттракторе, получаемых для соответствующего множества начальных условий. Это множество несколько меняется с изменением  $z_2(0)$  (см. рис. 2, а, б). Для фрагмента на рис. 2, в форма этого множества повторяет случай, приведенный на рис. 2, а, что связано с симметрией аттрактора. Аттрактор также включает отрезки на оси  $OZ$ , образованные устойчивыми равновесиями (серые линии). Черным цветом на рис. 2 изображена одна из множества возможных замкнутых кривых на поверхности аттрактора. Единственная замкнутая кривая, приведенная на рис. 2, г, соответствует притягивающему предельному циклу в системе при выбранных параметрах в случае «неидеального» мемристора ( $\delta = 0.1$ ).

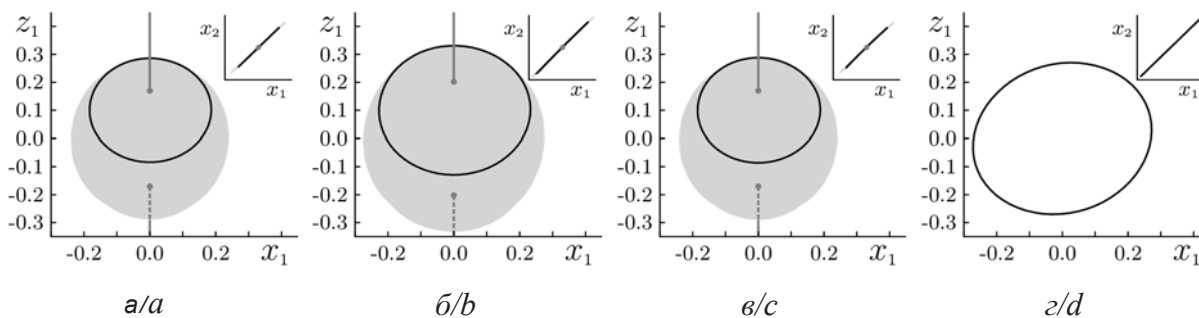


Рис. 2. Проекция фазовых траекторий на притягивающем предельном множестве системы (2) при  $k = 0.1$  и  $\delta = 0$ : а –  $z_1(0) \in [-0.3:0.3], z_2(0) = 0.1$  (серая поверхность),  $z_1(0) = z_2(0) = 0.1$  (черная кривая); б –  $z_1(0) \in [-0.3:0.3], z_2(0) = 0$  (серая поверхность),  $z_1(0) = 0.1, z_2(0) = 0$  (черная кривая); в –  $z_1(0) \in [-0.3:0.3], z_2(0) = -0.1$  (серая поверхность),  $z_1(0) = 0.1, z_2(0) = -0.1$  (черная кривая); г – проекция фазовых траекторий при  $k = 0.1$  и  $\delta = 0.1, z_1(0) \in [-0.3:0.3], z_2(0) = 0.1$  (черная кривая). Другие начальные условия:  $x_1(0) = x_2(0) = 0.001, y_1(0) = y_2(0) = 0.001$

Fig. 2. Projections of phase trajectories on the attracting limit set of the system (2) at  $k = 0.1$  and  $\delta = 0$ : (a)  $z_1(0) \in [-0.3:0.3], z_2(0) = 0.1$  (gray surface),  $z_1(0) = z_2(0) = 0.1$  (black curve); (b)  $z_1(0) \in [-0.3:0.3], z_2(0) = 0$  (gray surface),  $z_1(0) = 0.1, z_2(0) = 0$  (black curve); (c)  $z_1(0) \in [-0.3:0.3], z_2(0) = -0.1$  (gray surface),  $z_1(0) = 0.1, z_2(0) = -0.1$  (black curve); (d) projection of phase trajectories at  $k = 0.1$  and  $\delta = 0.1, z_1(0) \in [-0.3:0.3], z_2(0) = 0.1$  (black curve). Other initial conditions:  $x_1(0) = x_2(0) = 0.001, y_1(0) = y_2(0) = 0.001$

Не все траектории в серой области на рис. 2 принадлежат строго инвариантному многообразию  $S$ , хотя на проекциях  $x_1, x_2$  и  $y_1, y_2$  они могут быть так близко расположены

к биссектрисе, что отклонение от нее на глаз незаметно. Для регистрации режима полной синхронизации использовалось следующее условие:

$$D = \frac{1}{M} \sum_0^M [(x_1(t_i) - x_2(t_i))^2 + (y_1(t_i) - y_2(t_i))^2] \leq 0.00001, \quad (6)$$



где  $i$  – номер отсчета по времени,  $M$  – число отсчетов. Отклонение значений  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  при расчете величины  $D$  не учитывалось, поскольку в случае  $x_1(t) = x_2(t), y_1(t) = y_2(t)$  также выполняется равенство  $z_1(t) = z_2(t)$ .

Рассмотрим влияние начальных значений мемристивных переменных  $z_1(0)$  и  $z_2(0)$  на установление режима полной синхронизации при различных коэффициентах связи в случае «идеальных» мемристивных проводимостей ( $\delta = 0$ ). На рис. 3, а, б приведены диаграммы режимов при двух фиксированных значениях  $z_2(0)$ . Начальные значения всех других динамических переменных были выбраны одинаковыми и равными 0.001. Серым тоном выделена область, соответствующая режиму полной синхронизации колебаний генераторов согласно критерию (6). В белой области возможны как несинхронные колебательные режимы, для которых замкнутые траектории не лежат в инвариантном многообразии  $S$ , так и устойчивые точки равновесия. Можно видеть, что режим полной синхронизации колебаний имеет порог по связи, зависящий от начального состояния первого мемристора (т.е. от значения мемристивной переменной  $z_1(0)$ ). Аналогично он зависит и от началь-

ного состояния второго мемристора. Пороговое значение коэффициента связи обращается в ноль только при выборе начального состояния в инвариантном многообразии  $S$ , что в рассматриваемом случае соответствует равенству  $z_1(0) = z_2(0)$ . Начальные значения мемристивных переменных, при которых реализуется колебательный режим, ограничены (примерно в интервале  $[-0.2, 0.2]$ ), поэтому значительной расстройки значений  $z_1(0)$  и  $z_2(0)$  задать не удастся. Важно отметить, что пороговое значение коэффициента связи непрерывно зависит от начальных значений динамических переменных  $z_1(0)$  и  $z_2(0)$ , что не может быть связано с «обычной» мультистабильностью и является следствием «идеальной» мемристивности. Синхронный и несинхронный колебательные режимы проиллюстрированы на рис 3, в, г. В случае полной синхронизации проекции траекторий располагаются строго на биссектрисе. В случае несинхронных колебаний проекция траектории также лежит на прямой, но эта прямая отклоняется от биссектрисы. Это означает, что траектория в установившемся режиме не стремится к инвариантному многообразию  $S$  и полная синхронизация отсутствует.

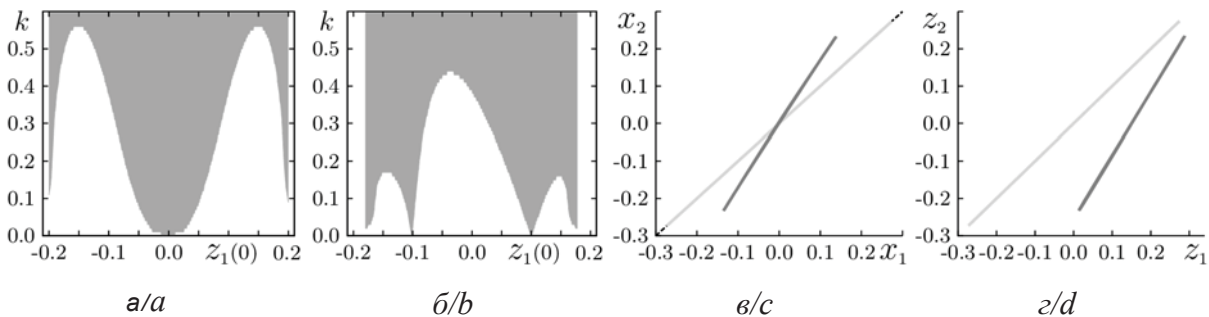


Рис. 3. Область полной синхронизации колебаний (серый тон) системы (2) при  $\delta = 0$  и  $z_2(0) = 0$  (а) и  $z_2(0) = 0.1$  (б). Проекция колебаний (в, г) в случае синхронного режима при  $z_1(0) = z_2(0) = 0.1$  (светло-серая линия) и несинхронного режима при  $z_1(0) = 0.15, z_2(0) = 0$  (темно-серая линия) при  $k = 0.01$ . Черной пунктирной линией показана биссектриса прямого угла. Другие начальные условия:  $x_1(0) = x_2(0) = 0.001, y_1(0) = y_2(0) = 0.001$

Fig. 3. The region of complete synchronization of oscillations (gray tone) in the system (2) at  $\delta = 0$  and  $z_2(0) = 0$  (a), and  $z_2(0) = 0.1$  (b). Oscillations projections (c, d) in the case of synchronous mode at  $z_1(0) = z_2(0) = 0.1$  (light gray line) and non-synchronous mode at  $z_1(0) = 0.15, z_2(0) = 0$  (dark gray line) at  $k = 0.01$ . The black dotted line shows the bisector of a right angle. Other initial conditions:  $x_1(0) = x_2(0) = 0.001, y_1(0) = y_2(0) = 0.001$

На рис. 4 показаны диаграммы на плоскости начальных значений  $z_1(0), z_2(0)$ , построенные для различной силы связи при  $\delta = 0$ . На них черными точками отмечены синхронные режимы, соответствующие условию (6). Увеличение коэффициента связи приводит к увеличению области синхронизации, что видно на рис. 4.

Отличное от нуля значение параметра  $\delta$  ведет к разрушению поверхности равновесий. При этом для любого коэффициента связи  $k > 0$  имеет место полная синхронизация колебаний независимо от начальных условий. Однако время установления синхронного режима при малых  $\delta$  может быть очень велико.

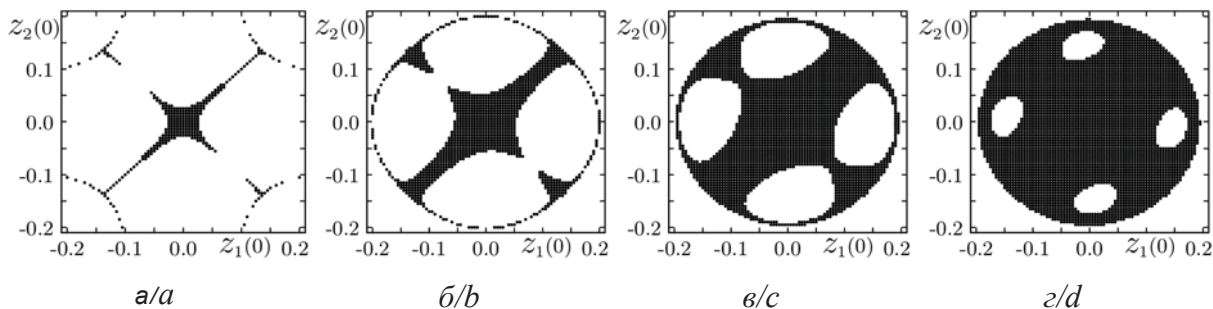


Рис. 4. Область полной синхронизации колебаний (черные точки) двух идентичных генераторов при  $\delta = 0$  на плоскости  $z_1(0), z_2(0)$  при различных значениях коэффициента связи:  $k = 0.01$  (а);  $k = 0.1$  (б);  $k = 0.3$  (в);  $k = 0.5$  (г). Другие начальные условия:  $x_1(0) = x_2(0) = 0.001, y_1(0) = y_2(0) = 0.001$

Fig. 4. The region of complete synchronization of oscillations (black dots) of two identical self-oscillators for  $\delta = 0$  on the  $(z_1(0), z_2(0))$  plane at various values of the coupling coefficient:  $k = 0.01$  (a);  $k = 0.1$  (b);  $k = 0.3$  (c);  $k = 0.5$  (d). Other initial conditions:  $x_1(0) = x_2(0) = 0.001, y_1(0) = y_2(0) = 0.001$

Рассмотрим влияние  $\delta$  на длительность переходного процесса  $t_{tr}$ , приводящего к установлению полной синхронизации в соответствии с критерием (6). При фиксированном значении коэффициента связи  $k = 0.001$  была рассчитана зависимость длительности переходного процесса от величины  $\delta$  для двух начальных условий: соответствующих отсутствию полной синхронизации при  $\delta = 0$  и приводящих к полной синхронизации при любом значении  $\delta$ . Результаты приведены на рис. 5. В первом случае длительность переходного процесса стремится к бесконечности при

$\delta \rightarrow 0$  и выходит на некоторый постоянный уровень с ростом  $\delta$ . При достаточно малых значениях  $\delta$  длительность переходного процесса может превышать любое заданное время наблюдения. Во втором случае длительность переходного процесса всегда конечна и слабо зависит от величины  $\delta$ . Таким образом, при малом  $\delta$ , когда мемристоры близки к «идеальным», на конечном времени наблюдения поведение связанных генераторов будет мало отличаться от поведения «идеальной» мемристивной системы.

### 3. Синхронизация частот мемристивных генераторов с расстройкой

Рассмотрим систему (2) при наличии малой частотной расстройки ( $p \neq 1$ ). Можно предположить, что, как и в случае обычных автогенераторов, связанных через мемристор [27], для резистивно взаимодействующих мемристивных систем с частотной расстройкой предельное множество траекторий включает как периодические, так и квазипериодические траектории, а реализация соответствующего режима зависит от начальных значений динамических переменных. Проведенные расчеты полностью подтвердили данное предположение. В зависимости от начальных значений переменных  $z_1(0), z_2(0)$  при одних и тех же значениях коэффициента связи  $k$  и параметра частотной расстройки  $p$  наблюдались как периодические (синхронные), так и квазипериодические (несинхронные) колебания. Численно были построены области частотной синхронизации на плоскости параметров  $k$  и  $p$  при различных значениях  $z_1(0), z_2(0)$ . На рис. 6, а приведены две области синхронизации колебаний в системе (2) при  $\delta = 0$ , полученные

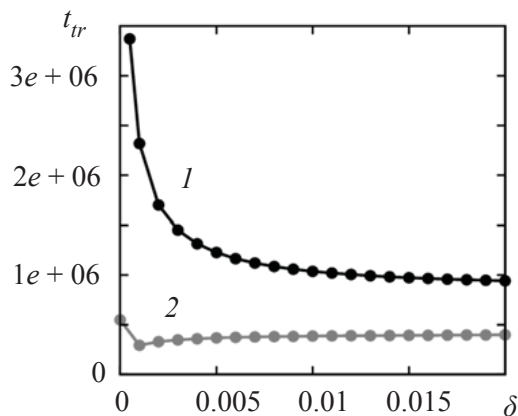


Рис. 5. Зависимость длительности переходного процесса  $t_{tr}$  от параметра  $\delta$  при  $k = 0.001$  и начальных условиях:  $x_1(0) = 0.15, x_2(0) = 0.01, y_1 = 0.01, y_2 = 0.001, z_1(0) = 0, z_2(0) = 0.15$  (линия 1);  $x_1(0) = 0.05, x_2(0) = 0.01, y_1 = y_2 = 0.1, z_1(0) = z_2(0) = 0$  (линия 2)

Fig. 5. Dependence of the duration of the transition process  $t_{tr}$  on the parameter  $\delta$  at  $k = 0.001$  and following initial conditions:  $x_1(0) = 0.15, x_2(0) = 0.01, y_1 = 0.01, y_2 = 0.001, z_1(0) = 0, z_2(0) = 0.15$  (line 1);  $x_1(0) = 0.05, x_2(0) = 0.01, y_1 = y_2 = 0.1, z_1(0) = z_2(0) = 0$  (line 2)



для различных начальных значений  $z_2(0)$  (при одинаковых начальных значениях прочих переменных). Они построены для малых значений коэффициента связи и соответствуют синхронизации через фазовый захват.

С ростом коэффициента связи наблюдается эффект подавления автоколебаний одного из генераторов, а область существования периодического (синхронного) режима резко расширяется (на графиках не изображено). Особенностью мемристивной системы является зависимость границ частотно-фазового захвата от начальных условий. Это хорошо видно на рис. 6, а. Такая

зависимость является непрерывной. Непрерывная зависимость границ области захвата от начального значения одной из мемристивных переменных проиллюстрирована на рис. 6, б, на котором приведена область синхронизации на плоскости значений частотной расстройки  $p$  и величины  $z_1(0)$  при фиксированных других начальных условиях и  $k = 0.003$ . Также на рис. 6, в, г приведены фазовые проекции, соответствующие синхронному режиму периодических колебаний и несинхронному режиму двухчастотных биений, наблюдающимся при одних и тех же параметрах системы, но разным выборе начальных условий.

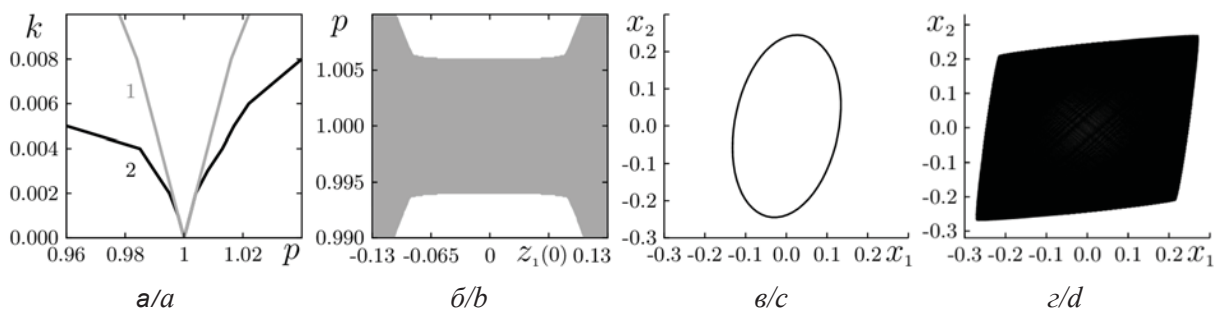


Рис. 6. Взаимная синхронизация частот мемристивных генераторов (2) с расстройкой по частотам при  $\delta = 0$ : а – синхронизация для различных начальных значениях мемристивных переменных при  $z_1(0) = z_2(0) = 0$  (линия 1) и  $z_1(0) = 0, z_2(0) = 0.1$  (линия 2); б – область синхронизации на плоскости значений частотной расстройки  $p$  и величины  $z_1(0)$  при  $z_2(0) = 0, k = 0.003$ . Фазовые проекции (в, г) при  $k = 0.003$  и  $p = 0.993$  иллюстрирующие режим частотной синхронизации при  $z_1(0) = 0.11$  и  $z_2(0) = 0$  (в) и биений вне области синхронизации при  $z_1(0) = z_2(0) = 0$

Fig. 6. Mutual frequency synchronization of memristive self-oscillators (2) with frequency detuning at  $\delta = 0$ : (a) synchronization for various initial values of memristive variables at  $z_1(0) = z_2(0) = 0$  (line 1) and  $z_1(0) = 0, z_2(0) = 0.1$  (line 2); (b) the synchronization region on the plane of the frequency detuning  $p$  and  $z_1(0)$  at  $z_2(0) = 0, k = 0.003$ . Phase projections (c, d) at  $k = 0.003$  and  $p = 0.993$  illustrating the frequency synchronization mode at  $z_1(0) = 0.11$  and  $z_2(0) = 0$  (c) and beats outside the synchronization region at  $z_1(0) = z_2(0) = 0$

### Заключение

Проведенное численное моделирование динамики резистивно-связанных мемристивных генераторов показало, что рассматриваемые мемристивные системы демонстрируют как эффект полной синхронизации (при полной идентичности парциальных систем), так и эффект синхронизации частот колебаний (при наличии частотной расстройки). То есть мемристивным генераторам присуще фундаментальное явление синхронизации, что позволяет отнести их к классу автоколебательных систем. В то же время, для идеальных мемристивных систем (при  $\delta = 0$ ) эффекты синхронизации имеют свои особенности. Ранее в работе [27] была описана особенность синхронизации генераторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивную

проводимость. В такой мемристивной системе также образуется многообразие равновесий и эффект синхронизации характеризуется непрерывной зависимостью границы частотно-фазового захвата от начальных условий. Однако, поскольку динамика парциального генератора не имеет мемристивных свойств и характеризуется существованием устойчивого предельного цикла, в случае идентичных парциальных в режиме полной синхронизации слагаемое связи обращается в ноль и система демонстрирует поведение, аналогичное поведению парциального генератора. То есть в случае полной синхронизации мемристивный характер взаимодействия в данном случае не проявляется. При взаимодействии мемристивных генераторов чувствительность к начальным условиям проявляется уже при взаимодействии идентичных систем. Это связано



с наличием уже у самой парциальной системы многообразия равновесий и сложного устройства притягивающего множества. В парциальном генераторе режим периодических колебаний связан не с предельным циклом (изолированной замкнутой кривой), а с плотным множеством замкнутых кривых, имеющих разные амплитуды [20–22]. В этом случае полная синхронизация колебаний характеризуется наличием порога по связи, величина которого непрерывно зависит от начальных условий, в частности от начальных значений переменных, задающих состояния мемристивных элементов. Меняя эти значения, можно наблюдать или не наблюдать режим полной синхронизации.

При введении частотной расстройки мемристивных генераторов и вариации параметра связи имеет место классический эффект частотно-фазового захвата. В этом случае свойства рассматриваемой системы двух мемристивных генераторов, взаимодействующих через обычную проводимость, аналогичны свойствам «обычных» периодических генераторов, взаимодействующих через «идеальный» мемристор [27]. При постоянном значении коэффициента связи имеет место непрерывная зависимость границ области синхронизации частот от начальных условий. Таким образом, влияние начальных условий на эффекты синхронизации можно рассматривать как общее свойство мемристивных систем.

Все сказанное выше касается «идеальных» мемристивных систем, для которых мемристивные элементы «помнят» свое исходное состояние бесконечно долго. Однако реальные мемристивные элементы не могут в строгом смысле обладать таким свойством. В настоящей работе рассмотрено влияние конечной памяти мемристивных элементов на примере эффекта полной синхронизации мемристивных генераторов. Было показано, что введение параметра  $\delta$ , характеризующего скорость «забывания» мемристорами своего исходного состояния, приводит к исчезновению зависимости характера установившегося режима от начальных условий. В режиме периодических колебаний полная синхронизация наблюдается при любой силе связи парциальных генераторов и при любых начальных условиях. Однако время установления стационарных синхронных колебаний зависит не только от значения параметра  $\delta$  и силы связи, но также и от начальных условий. При близости мемристивных элементов к «идеальным» (малое

$\delta$ ) и соответствующем выборе начальных условий время установления синхронного режима может быть очень большим. При ограниченном времени наблюдения система ведет себя как мемристивная, демонстрируя ту же чувствительность наблюдаемого поведения к начальным условиям.

### Благодарности

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-32-90030).*

### Список литературы

1. Chua L. O. Memristor – The missing circuit element // IEEE Transactions on Electron Devices. 1971. Vol. 18. P. 507–519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337
2. Strukov D. B., Snider G. S., Stewart D. R., Williams R. S. The missing memristor found // Nature. 2008. Vol. 453. P. 80–83. DOI: 10.1038/nature06932
3. Berzina T., Smerieri A., Bernabó M., Pucci A., Ruggeri G., Erokhin V., Fontana M. Optimization of an organic memristor as an adaptive memory element // Journal of Applied Physics. 2009. Vol. 105, № 12. P. 124515. DOI: 10.1063/1.3153944
4. Jeong H. Y., Kim J. Y., Kim J. W., Hwang J. O., Kim J. E., Lee J. Y., Choi S. Y. Graphene oxide thin films for flexible nonvolatile memory applications // Nano Letters. 2010. Vol. 10, № 11. P. 4381–4386. DOI: 10.1021/nl101902k
5. Chang T., Jo S.-H., Kim K.-H., Sheridan P., Gaba S., Lu W. Synaptic behaviors and modeling of a metal oxide memristive device // Applied Physics A. 2011. Vol. 102. P. 857–863. DOI: 10.1007/s00339-011-6296-1
6. Yang Y., Sheridan P., Lu W. Complementary resistive switching in tantalum oxide-based resistive memory devices // Applied Physics Letters. 2012. Vol. 100, № 20. P. 203–112. DOI: 10.1063/1.4719198
7. Strachan J., Torrezan A., Miao F., Pickett M., Yang J., Yi W., Medeiros-Ribeiro G., Williams R. State dynamics and modeling of tantalum oxide memristors // IEEE Transactions on Electron Devices. 2013. Vol. 60, № 7. P. 2194–2202. DOI: 10.1109/TED.2013.2264476
8. Liu G., Chen Y., Wang C., Zhang W., Li R.-W., Wang L. Polymer memristor for information storage and neuromorphic applications // Materials Horizons. 2014. Vol. 1, № 5. P. 489–506. DOI: 10.1039/C4MH00067F
9. Erokhina S., Sorokin V., Erokhin V. Polyaniline-based organic memristive device fabricated by layered-by-layered deposition technique // Electronic Materials Letters. 2015. Vol. 11, № 5. P. 801–805. DOI: 10.1007/s13391-015-4329-1
10. Chua L. O., Kang S. M. Memristive devices and systems // Proceedings of the IEEE. 1976. Vol. 64, iss. 2. P. 209–223. DOI: 10.1109/PROC.1976.10092
11. Volos C. K., Kyprianidis I. M., Stouboulos I. N., Munoz-Pacheco J. M., Pham V. T. Synchronization of chaotic





- nonlinear circuits via a memristor // *Journal of Engineering Science & Technology Review*. 2015. Vol. 8, iss. 2. P. 44–51.
12. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L.* Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: tutorial and modern developments. Springer Science & Business Media, 2007. 455 p.
  13. *Messias M., Nespoli C., Botta V. A.* Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters in memristor oscillators // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2010. Vol. 20, № 2. P. 437–450. DOI: 10.1142/S0218127410025521
  14. *Pirani V. A. B., Nespoli C., Messias M.* Mathematical Analysis of a Third-order Memristor-based Chua's Oscillator // *Trends in Applied and Computational Mathematics*. 2011. Vol. 12, № 2. P. 91–99. DOI: 10.5540/tema.2011.012.02.0091
  15. *Riaza R.* Manifolds of equilibria and bifurcations without parameters in memristive circuits // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2012. Vol. 72, iss. 3. P. 877–896. DOI: 10.1137/100816559
  16. *Fitch A. L., Yu D., Iu H. H. C., Sreeram V.* Hyperchaos on memristor-based modified canonical Chua's circuit // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2012. Vol. 22, № 6. P. 1250133–1250138. DOI: 10.1142/S0218127412501337
  17. *Li Q., Hu S., Tang S., Zeng G.* Hyperchaos and horseshoe in a 4D memristive system with a line of equilibria and its implementation // *International Journal of Circuit Theory and Applications*. 2014. Vol. 42, iss. 11. P. 1172–1188. DOI: 10.1002/cta.1912
  18. *Pham V. T., Volos C. K., Vaidyanathan S., Le T. P., Vu V. Y.* A memristor-based hyperchaotic system with hidden attractors: dynamics, synchronization and circuitual emulating // *Journal of Engineering Science & Technology Review*. 2015. Vol. 8, iss. 2. P. 205–214.
  19. *Kengne J., Tabekoung Z. N., Namba V. K., Negou A. N.* Periodicity, chaos and multiple attractors in a memristor-based Shinriki's circuit // *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2015. Vol. 25. P. 103126. DOI: 10.1063/1.4934653
  20. *Semenov V., Korneev I., Arinushkin P., Strelkova G., Vadivasova T., Anishchenko V.* Numerical and experimental studies of attractors in memristor-based Chua's oscillator with a line of equilibria. Noise-induced effects // *The European Physical Journal Special Topics*. 2015. Vol. 224, iss. 8. P. 1553–1561. DOI: 10.1140/epjst/e2015-02479-6
  21. *Korneev I. A., Vadivasova T. E., Semenov V. V.* Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria // *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 89, iss. 4. P. 2829–2843. DOI: 10.1007/s11071-017-3628-5
  22. *Korneev I. A., Semenov V. V.* Andronov-Hopf bifurcation with and without parameter in a cubic memristor oscillator with a line of equilibria // *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2017. Vol. 27, iss. 8. P. 081104(1–5). DOI: 10.1063/1.4996401
  23. *Frasca M., Gambuzza L., Buscarino A., Fortuna L.* Implementation of adaptive coupling through memristor // *Physica Status Solidi C*. 2014. Vol. 12, iss. 1–2. P. 206210. DOI: 10.1002/pssc.201400097
  24. *Gambuzza L., Buscarino A., Fortuna L., Frasca M.* Memristor-based adaptive coupling for consensus and synchronization // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*. 2015. Vol. 62, iss. 4. P. 1175–1184. DOI: 10.1109/TCSI.2015.2395631
  25. *Volos C. K., Pham V.-T., Vaidyanathan S., Kyprianiadis I. M., Stouboulos I. N.* The case of bidirectionally coupled nonlinear circuits via a memristor // *Advances and Applications in Nonlinear Control Systems*. 2016. Vol. 635. P. 317–350. DOI: 10.1007/978-3-319-30169-3\_15
  26. *Ignatov M., Hansen M., Ziegler M., Kohlstedt H.* Synchronization of two memristively coupled van der Pol oscillators // *Applied Physics Letters*. 2016. Vol. 108, iss. 8. P. 84–105. DOI: 10.1063/1.4942832
  27. *Корнеев И. А., Шабалина О. Г., Семенов В. В., Вадивасова Т. Е.* Синхронизация автогенераторов, взаимодействующих через мемристор // *Известия вузов. ПНД*. 2018. Т. 26, № 2. С. 24–40. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40
  28. *Xu F., Zhang J., Fang T., Huang Sh., Wang M.* Synchronous dynamics in neural system coupled with memristive synapse // *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 92, № 3. P. 1395–1402. DOI: 10.1007/s11071-018-4134-0
  29. *Yang X., Cao J., Yu W.* Exponential synchronization of memristive Cohen–Grossberg neural networks with mixed delays // *Cognitive Neurodynamics*. 2014. Vol. 8, № 3. P. 239–249. DOI: 10.1007/s11571-013-9277-6
  30. *Hu X., Duan Sh.* Adaptive synchronization of memristor-based chaotic neural systems // *Journal of Engineering Science and Technology Review*. Rev. 2015. Vol. 8, iss. 2. P. 17–23.
  31. *Yangand X., Ho D. W. C.* Synchronization of delayed memristive neural networks : Robust analysis approach // *IEEE Transactions on Cybernetics*. 2016. Vol. 46, iss. 12, № 2. P. 3377–3387. DOI: 10.1109/TCYB.2015.2505903
  32. *Zhao H., Li L., Peng H., Kurths J., Xiao J., Yang Y.* Anti-synchronization for stochastic memristor-based neural networks with non-modeled dynamics via adaptive control approach // *The European Physical Journal B*. 2015. Vol. 88, iss. 5. P. 1–10. DOI: 10.1140/epjb/e2015-50798-9
  33. *Wang C., Lv M., Alsaedi A., Ma J.* Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network // *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2017. Vol. 27, iss. 11. P. 113108(1–8). DOI: 10.1063/1.5004234
  34. *Zhang L., Yang Y., Wang F.* Lag synchronization for fractional-order memristive neural networks via period intermittent control // *Nonlinear Dynamics*. 2017.



- Vol. 89. P. 367–381. DOI: 10.1007/s11071-017-3459-4
35. Chen C., Li L., Peng H., Yang Y., Li T. Synchronization control of coupled memristor-based neural networks with mixed delays and stochastic perturbations // *Neural Processing Letters*. 2018. Vol. 47, № 2. P. 679–696. DOI: 10.1007/s11063-017-9675-6
36. Fiedler B., Liescher S., Alexander J. Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: I. theory // *Journal of Differential Equations*. 2000. Vol.

- 167, iss. 1. P. 16–35. DOI: 10.1006/jdeq.2000.3779
37. Chen L., Li Ch., Huang T., Chen Y., Wen Sh., Qi J. A synapse memristor model with forgetting effect // *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377, iss. 45–48. P. 3260–3265. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.024
38. Zhou E., Fang L., Yang B. A general method to describe forgetting effect of memristor // *Physics Letters A*. 2019. Vol. 383, iss. 10. P. 942–948. DOI: 10.1016/j.physleta.2018.12.028

#### Образец для цитирования:

Корнеев И. А., Слепнев А. В., Семенов В. В., Вадивасова Т. Е. Взаимная синхронизация диссипативно связанных мемристивных генераторов // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 210–221. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-3-210-221>

#### Mutual Synchronization of Dissipatively Coupled Memristive Self-Oscillators

I. A. Korneev, A. V. Slepnev,  
V. V. Semenov, T. E. Vadivasova

Ivan A. Korneev, <https://orcid.org/0000-0003-1716-5170>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [ivankorneew@yandex.ru](mailto:ivankorneew@yandex.ru)

Andrei V. Slepnev, <https://orcid.org/0000-0003-0273-6479>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [a.v.slepnev@gmail.com](mailto:a.v.slepnev@gmail.com)

Vladimir V. Semenov, <https://orcid.org/0000-0002-4534-8065>, FEMTO-ST Institute, CNRS & University Bourgogne Franche-Comté, 15B avenue des Montboucons Besançon Cedex 25030, France, [semenov\\_v\\_v@list.ru](mailto:semenov_v_v@list.ru)

Tatiana E. Vadivasova, <https://orcid.org/0000-0002-8081-2820>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, [vadivasovate@yandex.ru](mailto:vadivasovate@yandex.ru)

**Background and Objectives:** Dynamical systems containing memristive elements, i.e. elements with “memory”, represent a special class of dynamical systems that can be named memristive systems. In memristive systems, the synchronization of oscillations has some features. However, a complete description of these features is still lacking. For the most part, this concerns the synchronization of memristive self-oscillators, both identical and with frequency detuning. In this paper, we study two resistively coupled self-oscillators containing memristive conductivities. We consider both the complete synchronization of identical self-oscillators and the frequency synchronization of self-oscillators with detuning. The features of synchronization effects associated with the memristive nature of partial systems are revealed. The influence of “non-ideality” of memristive elements and the duration of the establishment processes in this case are analyzed. **Materials and Methods:** Using numerical integration methods for various parameter values, approximate solutions of a system of ordinary differential equations that describe the dynamics of two coupled memristive self-oscillators are obtained. Projections of phase trajectories are plotted on various planes, as well as regions of synchronization of

oscillations of the system under study. **Results:** It is shown that the memristive systems under consideration demonstrate both the effect of complete synchronization (with full identity of partial systems) and the effect of frequency synchronization (in the presence of frequency detuning). The complete synchronization of oscillations is characterized by the presence of a threshold for the coupling, the value of which continuously depends on the initial conditions, in particular, on the initial values of variables that specify the states of memristive elements. With a constant value of the coupling coefficient, there is a continuous dependence of the boundaries of the frequency synchronization region on the initial conditions. The introduction of a parameter characterizing the rate of memristors “forgetting” their initial state (“non-ideality”) leads to the disappearance of the dependence of the type of the steady state on the initial conditions. **Conclusion:** The fundamental phenomenon of synchronization is inherent in memristive self-oscillators, which allows them to be attributed to the class of self-oscillating systems. The influence of the initial conditions on the effects of synchronization can be considered as a general property of “ideal” memristive systems. **Keywords:** memristor, memristive systems, synchronization, self-oscillations.

Received: 23.04.2020 / Accepted: 01.06.2020 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

*Acknowledgements:* This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-32-90030).

#### References

1. Chua L. O. Memristor – The missing circuit element. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 1971, vol. 18, pp. 507–519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337
2. Strukov D. B., Snider G. S., Stewart D. R., Williams R. S. The missing memristor found. *Nature*, 2008, vol. 453, pp. 80–83. DOI: 10.1038/nature06932
3. Berzina T., Smerieri A., Bernabó M., Pucci A., Ruggeri G., Erokhin V., Fontana M. Optimization of an organic memristor as an adaptive memory element. *Journal of Applied Physics*, 2009, vol. 105, no. 12, pp. 124515. DOI: 10.1063/1.3153944



4. Jeong H. Y., Kim J. Y., Kim J. W., Hwang J. O., Kim J. E., Lee J. Y., Choi S. Y. Graphene oxide thin films for flexible nonvolatile memory applications. *Nano Letters*, 2010, vol. 10, no. 11, pp. 4381–4386. DOI: 10.1021/nl101902k
5. Chang T., Jo S.-H., Kim K.-H., Sheridan P., Gaba S., Lu W. Synaptic behaviors and modeling of a metal oxide memristive device. *Applied Physics A*, 2011, vol. 102, pp. 857–863. DOI: 10.1007/s00339-011-6296-1
6. Yang Y., Sheridan P., Lu W. Complementary resistive switching in tantalum oxide-based resistive memory devices. *Applied Physics Letters*, 2012, vol. 100, no. 20, pp. 203–112. DOI: 10.1063/1.4719198
7. Strachan J., Torrezan A., Miao F., Pickett M., Yang J., Yi W., Medeiros-Ribeiro G., Williams R. State dynamics and modeling of tantalum oxide memristors. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2013, vol. 60, no. 7, pp. 2194–2202. DOI: 10.1109/TED.2013.2264476
8. Liu G., Chen Y., Wang C., Zhang W., Li R.-W., Wang L. Polymer memristor for information storage and neuro-morphic applications. *Materials Horizons*, 2014, vol. 1, no. 5, pp. 489–506. DOI: 10.1039/C4MH00067F
9. Erokhina S., Sorokin V., Erokhin V. Polyaniline-based organic memristive device fabricated by layered-by-layered deposition technique. *Electronic Materials Letters*. 2015, vol. 11, no. 5, pp. 801–805. DOI: 10.1007/s13391-015-4329-1
10. Chua L. O., Kang S. M. Memristive devices and systems. *Proceedings of the IEEE*. 1976, vol. 64, iss. 2, pp. 209–223. DOI: 10.1109/PROC.1976.10092
11. Volos C. K., Kyprianidis I. M., Stouboulos I. N., Munoz-Pacheco J. M., Pham V. T. Synchronization of chaotic nonlinear circuits via a memristor. *Journal of Engineering Science & Technology Review*, 2015, vol. 8, iss. 2, pp. 44–51.
12. Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L. *Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: tutorial and modern developments*. Springer Science & Business Media, 2007. 455 p.
13. Messias M., Nespoli C., Botta V. A. Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters in memristor oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, no. 2, pp. 437–450. DOI: 10.1142/S0218127410025521
14. Pirani V. A. B., Nespoli C., Messias M. Mathematical Analysis of a Third-order Memristor-based Chua's Oscillator. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, 2011, vol. 12, no. 2, pp. 91–99. DOI: 10.5540/tema.2011.012.02.0091
15. Rianza R. Manifolds of equilibria and bifurcations without parameters in memristive circuits. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2012, vol. 72, iss. 3, pp. 877–896. DOI: 10.1137/100816559
16. Fitch A. L., Yu D., Iu H. H. C., Sreeram V. Hyperchaos on memristor-based modified canonical Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, vol. 22, no. 6, pp. 1250133–1250138. DOI: 10.1142/S0218127412501337
17. Li Q., Hu S., Tang S., Zeng G. Hyperchaos and horseshoe in a 4D memristive system with a line of equilibria and its implementation. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2014, vol. 42, iss. 11, pp. 1172–1188. DOI: 10.1002/cta.1912
18. Pham V. T., Volos C. K., Vaidyanathan S., Le T. P., Vu V. Y. A memristor-based hyperchaotic system with hidden attractors: dynamics, synchronization and circuitual emulating. *Journal of Engineering Science & Technology Review*, 2015, vol. 8, iss. 2, pp. 205–214.
19. Kengne J., Tabekoung Z. N., Namba V. K., Negou A. N. Periodicity, chaos and multiple attractors in a memristor-based Shinriki's circuit. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2015, vol. 25, pp. 103126. DOI: 10.1063/1.4934653
20. Semenov V., Korneev I., Arinushkin P., Strelkova G., Vadivasova T., Anishchenko V. Numerical and experimental studies of attractors in memristor-based Chua's oscillator with a line of equilibria. Noise-induced effects. *The European Physical Journal Special Topics*, 2015, vol. 224, iss. 8, pp. 1553–1561. DOI: 10.1140/epjst/e2015-02479-6
21. Korneev I. A., Vadivasova T. E., Semenov V. V. Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 89, iss. 4, pp. 2829–2843. DOI: 10.1007/s11071-017-3628-5
22. Korneev I. A., Semenov V. V. Andronov-Hopf bifurcation with and without parameter in a cubic memristor oscillator with a line of equilibria. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2017, vol. 27, iss. 8, pp. 081104(1–5). DOI: 10.1063/1.4996401
23. Frasca M., Gambuzza L., Buscarino A., Fortuna L. Implementation of adaptive coupling through memristor. *Physica Status Solidi C*, 2014, vol. 12, iss. 1–2, pp. 206210. DOI: 10.1002/pssc.201400097
24. Gambuzza L., Buscarino A., Fortuna L., Frasca M. Memristor-based adaptive coupling for consensus and synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2015, vol. 62, iss. 4, pp. 1175–1184. DOI: 10.1109/TCSI.2015.2395631
25. Volos C. K., Pham V.-T., Vaidyanathan S., Kyprianidis I. M., Stouboulos I. N. The case of bidirectionally coupled nonlinear circuits via a memristor. *Advances and Applications in Nonlinear Control Systems*, 2016, vol. 635, pp. 317–350. DOI: 10.1007/978-3-319-30169-3\_15
26. Ignatov M., Hansen M., Ziegler M., Kohlstedt H. Synchronization of two memristively coupled van der Pol oscillators. *Applied Physics Letters*, 2016, vol. 108, iss. 8, pp. 84–105. DOI: 10.1063/1.4942832
27. Korneev I. A., Shabalina O. G., Semenov V. V., Vadivasova T. E. Synchronization self-sustained oscillators interacting through the memristor. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 2, pp. 24–40. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40



28. Xu F., Zhang J., Fang T., Huang Sh., Wang M. Synchronous dynamics in neural system coupled with memristive synapse. *Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 92, no. 3, pp. 1395–1402. DOI: 10.1007/s11071-018-4134-0
29. Yang X., Cao J., Yu W. Exponential synchronization of memristive Cohen–Grossberg neural networks with mixed delays. *Cognitive Neurodynamics*, 2014, vol. 8, no. 3, pp. 239–249. DOI: 10.1007/s11571-013-9277-6
30. Hu X., Duan Sh. Adaptive synchronization of memristor-based chaotic neural systems. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 2015, vol. 8, iss. 2, pp. 17–23.
31. Yangand X., Ho D. W. C. Synchronization of delayed memristive neural networks: Robust analysis approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, vol. 46, iss. 12, no. 2, pp. 3377–3387. DOI: 10.1109/TCYB.2015.2505903
32. Zhao H., Li L., Peng H., Kurths J., Xiao J., Yang Y. Anti-synchronization for stochastic memristor-based neural networks with non-modeled dynamics via adaptive control approach. *The European Physical Journal B*, 2015, vol. 88, iss. 5, pp. 1–10. DOI: 10.1140/epjb/e2015-50798-9
33. Wang C., Lv M., Alsaedi A., Ma J. Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2017, vol. 27, iss. 11, pp. 113108(1–8). DOI: 10.1063/1.5004234
34. Zhang L., Yang Y., Wang F. Lag synchronization for fractional-order memristive neural networks via period intermittent control. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 89, pp. 367–381. DOI: 10.1007/s11071-017-3459-4
35. Chen C., Li L., Peng H., Yang Y., Li T. Synchronization control of coupled memristor-based neural networks with mixed delays and stochastic perturbations. *Neural Processing Letters*, 2018, vol. 47, no. 2, pp. 679–696. DOI: 10.1007/s11063-017-9675-6
36. Fiedler B., Liebscher S., Alexander J. Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: I. theory. *Journal of Differential Equations*, 2000, vol. 167, iss. 1, pp. 16–35. DOI: 10.1006/jdeq.2000.3779
37. Chen L., Li Ch., Huang T., Chen Y., Wen Sh., Qi J. A synapse memristor model with forgetting effect. *Physics Letters A*, 2013, vol. 377, iss. 45–48, pp. 3260–3265. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.024
38. Zhou E., Fang L., Yang B. A general method to describe forgetting effect of memristor. *Physics Letters A*, 2019, vol. 383, iss. 10, pp. 942–948. DOI: 10.1016/j.physleta.2018.12.028

---

**Cite this article as:**

Korneev I. A., Slepnev A. V., Semenov V. V., Vadivasova T. E. Mutual Synchronization of Dissipatively Coupled Memristive Self-Oscillators. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 210–221 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-3-210-221>

---