



РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

УДК 53.043:53.01

Отражающая, нелокальная и диагональная связи в сетях связанных динамических элементов различной природы

А. В. Бух, А. С. Косенкова, В. С. Анищенко

Бух Андрей Владимирович, аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, buh.andrey@yandex.ru

Косенкова Анастасия Сергеевна, магистрант кафедры радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, nas.kosenkova@yandex.ru

Анищенко Вадим Семенович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, wadim@info.sgu.ru

Исследуется влияние топологии связей на динамику связанных в кольцо колебательных подсистем. Рассматриваются недавно предложенные отражающая и диагональная топологии связей в сравнении с широко известной нелокальной связью. Последние представляют большой интерес из-за топологического соответствия биологическим нейросетям. В качестве парциальных подсистем выбраны логистические отображения, осцилляторы ФитцХью–Нагумо и модели Курбажа–Некоркина. Рассмотрение различных подсистем позволяет отделить эффекты, возникающие в кольце из-за особенностей топологии связи от тех, которые возникают из-за особенностей поведения отдельных осцилляторов в узлах кольца. Результаты численного моделирования показали, что в зависимости от топологии связи может изменяться количество областей некогерентности для химерных состояний. Кроме того, характер перехода от полной некогерентности к полной синхронизации при увеличении параметра силы связи зависит от выбора топологии связи. Показано, что определенный тип волн, бегущая волна, вообще не реализуется в случае отражающей связи. **Ключевые слова:** химерное состояние, уединенное состояние, бегущая волна, нелокальная связь, отражающая связь, диагональная связь.

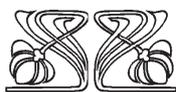
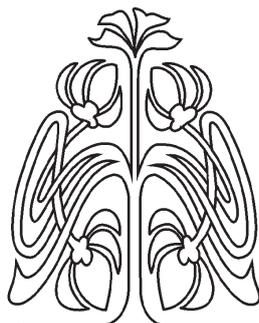
Поступила в редакцию: 31.10.2019 / Принята: 05.12.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

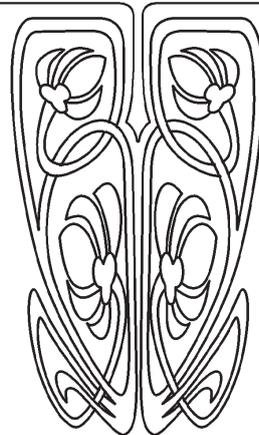
DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-1-16-28>

Введение

Исследование сетей связанных динамических элементов в нейродинамике представляет в последнее время особый интерес в связи с обнаружением химерных состояний, нового типа пространственно-временного поведения в ансамблях связанных колебательных систем [1–13]. При исследовании поведения ансамблей нейронных элементов немаловажную роль играет топология связей между ними [12–14]. В работе [14] показано, как на пространственную динамику



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





оказывают влияние и динамика парциального элемента, и выбор топологии связей. Например, введение иерархической связи приводит к проявлению несвойственного случаю нелокальной связи явления: некогерентные области включают сложную вложенную структуру и перемещаются вдоль кольца. При этом статистические характеристики колебаний элементов ансамбля устойчивы во времени. Введение отражающей [12] связи и добавление к нелокальной связи диагональной [13] на примере кольца связанных LIF (Leaky integrate and fire) осцилляторов также показывает, что изменение топологии может приводить к заметным изменениям пространственно-временной динамики ансамбля. Как показано в работах [12, 13], такие топологии связей свойственны для биологических нейросетей и поэтому достойны пристального внимания специалистов в нелинейной динамике. В случае нелокальной связи основным режимом является бегущая или стоячая волна с небольшими группами некогерентных осцилляторов на фронте волны. Скорость бегущей волны меняется с изменением диапазона и силы нелокальной связи. В случае отражающей связи было обнаружено сосуществование некогерентных кластеров и кластеров с подпороговыми колебаниями. При малых значениях параметра силы связи во всех узлах кольца наблюдаются периодические колебания. При увеличении значения параметра силы связи возникает и затем увеличивается область подпороговых колебаний. В это же время количество осцилляторов с периодическими колебаниями уменьшается [12]. В случае, когда к нелокальной связи добавляется диагональная, кольцо LIF осцилляторов демонстрирует как режимы, характерные для нелокальной связи, так и режимы, характерные для отражающей связи [13].

Отражающая и диагональная связи введены в работах [12, 13] впервые и рассмотрены только для случая ансамбля LIF осцилляторов. Остаётся открытым вопрос: какие явления связаны только с особенностью топологии связей, а какие обусловлены динамикой парциальных элементов? Чтобы показать влияние парциальных элементов на динамику кольца связанных динамических систем в случаях различных топологий связей, мы рассмотрим случаи нелокальной, отражающей и нелокальной с диагональной связи в кольцах связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, моделей Курбажа–Некоркина [15] и логистических отображений. Последнее широко используется в

качестве типичного примера того, как сложное, хаотическое поведение может возникать в очень простой нелинейной системе. Модель ФитцХью–Нагумо – это двумерная модель, предложенная в 1961 г. Ричардом ФитцХью и являющаяся результатом упрощения четырехмерных моделей Ходжкина–Хаксли и сведения их к форме двумерного осциллятора с кубической нелинейностью с одной быстрой и одной медленной переменными. Выбор перечисленных моделей в качестве парциальных элементов позволяет рассмотреть динамические системы различной природы.

1. Исследуемая модель

В общем виде исследуемая модель записывается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^t) + \frac{1}{B} \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \mathbf{G}(\mathbf{u}_j^t, \mathbf{u}_i^t), \quad (1)$$

где $\dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i^{t+1}$, $t = 1, 2, \dots, T$ в случае отображения, и $\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}_i$, $t \in [0; T]$ в случае, когда осциллятор задается системой ОДУ; \mathbf{u}_i^t – переменные, отражающие динамику отдельных осцилляторов, $i = 1, 2, \dots, N$ – индексы этих осцилляторов; N – общее количество осцилляторов в кольце; T – время, на котором рассматривается поведение кольца; $\mathbf{F}(\mathbf{u}_i^t)$ определяет динамику отдельного элемента \mathbf{u}_i^t ; B – количество связей в матрице связи σ_{ij} для данного элемента; $\mathbf{G}(\mathbf{u}_j^t, \mathbf{u}_i^t)$ определяет способ задания связи между элементами, $\mathbf{G}(\mathbf{u}_j^t, \mathbf{u}_i^t) = (\mathbf{u}_j^t - \mathbf{u}_i^t)$ – в случае диффузионной связи и $\mathbf{G}(\mathbf{u}_j^t, \mathbf{u}_i^t) = (\mathbf{F}(\mathbf{u}_j^t) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^t))$ – в случае инерционной связи. Для нелокальной связи матрица связи определяется следующими условиями:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma, & \text{для } i - R_n \leq j \leq i + R_n, \\ 0, & \text{для остальных } j; \end{cases} \quad (2)$$

R_n соответствует диапазону нелокальной связи. Для отражающей связи матрица принимает следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma, & \text{для } N - i - R_r \leq j \leq N - i + R_r, \\ 0, & \text{для остальных } j; \end{cases} \quad (3)$$

R_r отвечает диапазону отражающей связи. В случае нелокальной с диагональной топологии матрица связи для нелокальной связи (2) дополняется еще одним условием:



$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma, & \text{для } N/2 + i - R_d \leq j \leq N/2 + i + R_d, \\ \sigma, & \text{для } i - R_d \leq j \leq i + R_d, \\ 0, & \text{для остальных } j; \end{cases} \quad (4)$$

R_d определяет диапазон нелокальной с диагональной связи. Параметры R_n, R_r, R_d определяют количество связей B одного элемента для нелокальной, отражающей и нелокальной с диагональной топологии связей соответственно. Количество

связей B одинаково для всех элементов кольца в случае периодических граничных условий ($j \pm N = j$). Графическое представление топологии связей для каждого из случаев приведено на рис. 1. Для сравнения влияния топологии связей на динамику кольца мы будем полагать $R = R_n = R_r = 2R_d$, тогда количество связей выбранного элемента с другими элементами сети $B = 2R$ одинаково.

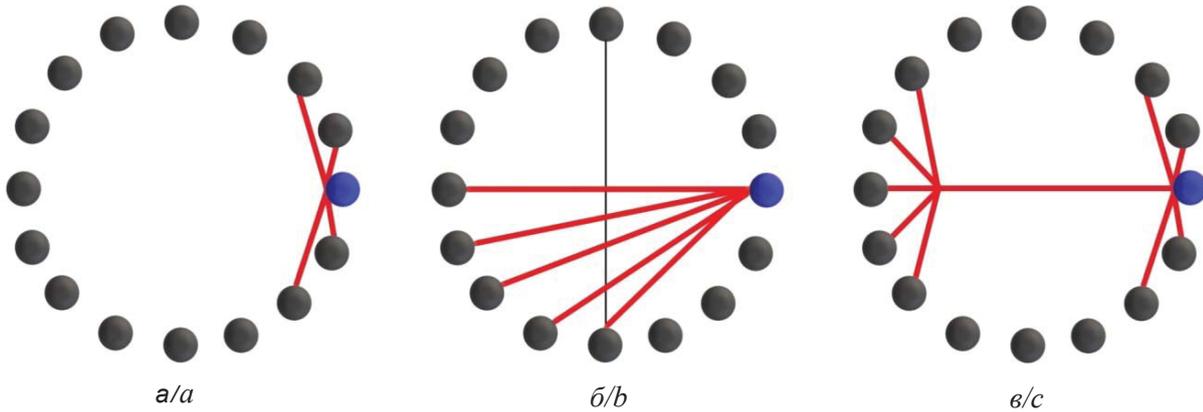


Рис. 1. Способ задания связи одного из элементов кольца в случае нелокальной связи (а) при $R_n = 2$, отражающей связи (б) при $R_r = 2$ и нелокальной с диагональной связи (в) при $R_d = 2$. Тонкая вертикальная серая линия (б) обозначает ось симметрии, которая соединяет элементы с номером 1 и номером $N/2 + 1$

Fig. 1. Links of a single element of the ring in case of nonlocal coupling (a) with $R_n = 2$, reflecting coupling (b) with $R_r = 2$, and nonlocal with diagonal coupling (c) with $R_d = 2$. The thin vertical grey line (b) denotes the symmetry axis which connects elements with indices 1 and $N/2 + 1$

2. Кольцо связанных логистических отображений

Рассмотрим кольцо диффузионно связанных логистических отображений. В таком случае $\mathbf{u}_i = x_i^{t+1}, t = 1, 2, \dots, T; \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^t) = f(x_i^t) = \alpha x_i^t(1 - x_i^t)$ и $\mathbf{G}(\mathbf{u}_j^t, \mathbf{u}_i^t) = g(x_j^t, x_i^t) = (x_j^t - x_i^t)$ в (1). Параметр α задает динамику отдельного элемента, мы устанавливаем значение параметра $\alpha = 3$, что соответствует периодическому режиму (циклу периода 1) отдельного элемента в отсутствие связи. Выбор именно этого режима позволяет избежать бифуркационных переходов при изменении параметра силы связи, которое смещает эффективное значение параметра α в сторону меньших значений. В работе рассматриваются режимы, реализующиеся со случайных равномерно распределенных начальных условий ($x_i^0 \in [0.1; 0.9]$) после времени установления, равного $1 \cdot 10^6$ итераций, т.е. $T = 1 \cdot 10^6 + 40$. Количество элементов в кольце зафиксируем $N = 300$. При малых значениях σ для различных R в случаях нелокальной (2), рефлексивной

(3) и нелокальной с диагональной связи (4) все осцилляторы демонстрируют одинаковый совпадающий периодический режим. Но, при увеличении силы связи при некотором значении σ , зависящем от параметра нелокальности R , для всех топологий связи возможно наблюдение химерных состояний (рис. 2). Количество областей некогерентности зависит от топологии связи: одна область некогерентности наблюдается в случае отражающей связи (рис. 2, б), две – в случае нелокальной (рис. 2, а) и четыре – в случае нелокальной с диагональной связью (рис. 2, в). Стоит отметить, что общее количество несинхронизованных осцилляторов при этом примерно одинаково для любой топологии при одном и том же диапазоне связи R . Дальнейшее увеличение силы связи приводит к выходу отображений на бесконечность при $\sigma \gtrsim 0.65$ вне зависимости от выбора топологии связи.

Если выбрать структуры на рис. 2, а–в в качестве начальных и плавно уменьшать значение силы связи σ , количество некогерентных осцилляторов постепенно уменьшается, пока кольцо полностью не перейдет в когерентный

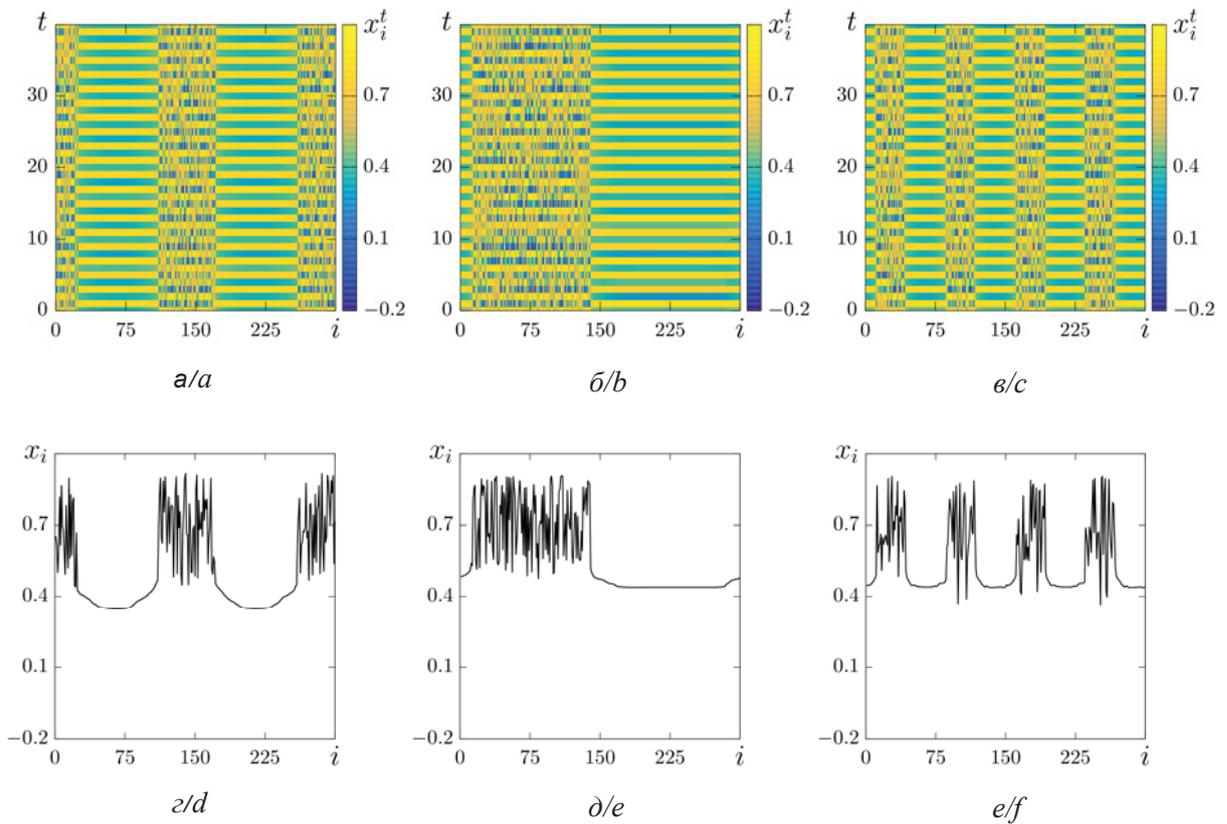


Рис. 2. Пространственно-временные диаграммы (а–в) и мгновенные снимки $x_i(t)$ (г–е) для нелокальной связи (2) (а, г), отражающей связи (3) (б, д) и нелокальной с диагональной связью (4) (в, е) при $\sigma = 0.63$, $R = 120$

Fig. 2. Spatio-temporal diagrams (a–c) and snapshots $x_i(t)$ (d–f) for nonlocal coupling (2) (a, d); reflecting coupling (3) (b, e); and nonlocal with diagonal coupling (4) (c, f) at $\sigma = 0.63$, $R = 120$

режим при $\sigma \sim 0.2$. Пространственный период полученной структуры в таком случае соответствует пространственному периоду химерной структуры при больших значениях параметра связи σ . Существует гистерезис при плавном уменьшении и увеличении параметра σ . Так, при $\sigma = 0.3$ можно наблюдать когерентные периодические в пространстве структуры, если увеличивать параметр силы связи со значения $\sigma = 0$ до $\sigma = 0.3$ (рис. 3, а–в) и уединенные состояния на периодической в пространстве структуре при уменьшении параметра силы связи со значения $\sigma = 1$ до $\sigma = 0.3$ (рис. 3, г–е).

Описанное выше различие динамики в зависимости от топологии связи состоит только в распределении некогерентных осцилляторов в кольце, что, как можно предположить, связано с различием в типе симметрии. Во всех рассмотренных случаях количество связей у каждого осциллятора $B = 240$, что соответствует связи с 80% осцилляторов и близко к глобальной связи. При уменьшении же диапазона связи R различия

в поведении становятся более значительными для различных топологий связи. Установим когерентные периодические в пространстве структуры при $\sigma = 0.3$ и $R = 120$ для каждой топологии и будем плавно уменьшать количество связей, изменяя значение параметра R (рис. 4). Результаты, приведенные на рис. 4, показывают, что переход к некогерентности происходит одинаково для нелокальной и нелокальной с диагональной связью, но отличается для отражающей связи.

В случае нелокальной связи и при добавлении диагональной связи к нелокальной сначала наблюдается уменьшение пространственного периода структуры при постепенном уменьшении радиуса связи. Затем, при дальнейшем уменьшении R , появляются уединенные некогерентные осцилляторы, их количество растет и цепочка переходит в однородное некогерентное состояние. В случае отражающей связи при плавном уменьшении R в некогерентных кластерах появляются разрывы, их количество увеличивается, затем кроме разрывов появляются уединенные

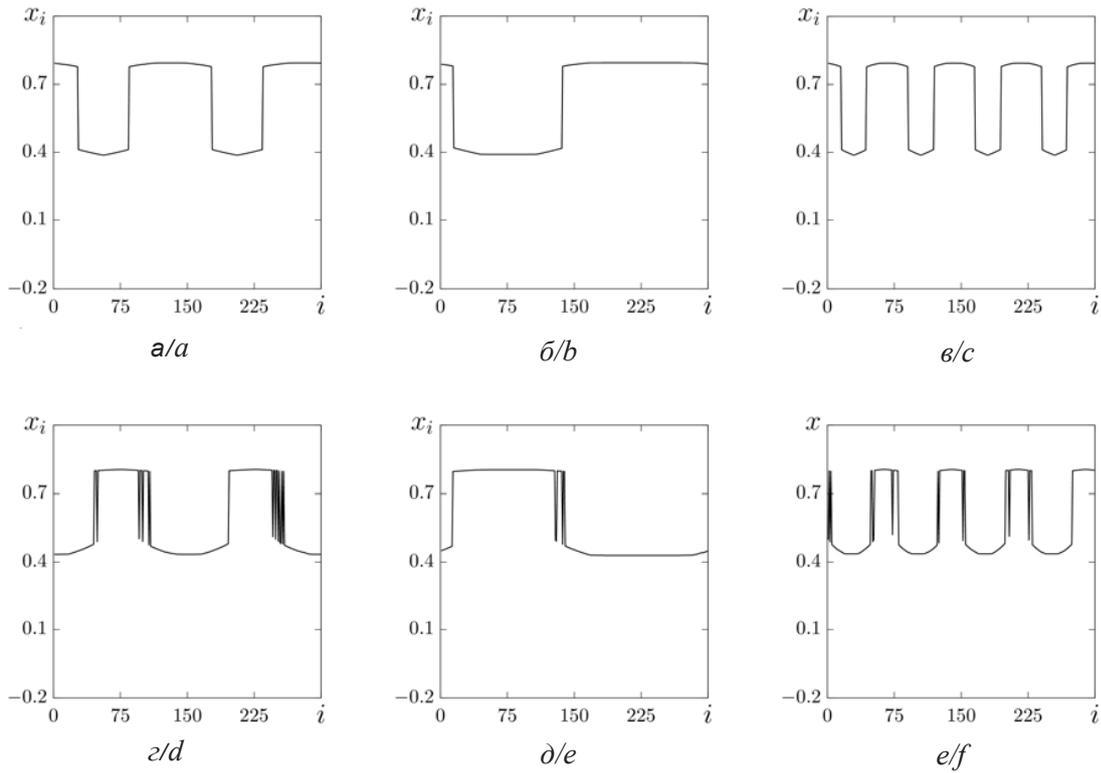


Рис. 3. Мгновенные снимки $x_i(t)$ для нелокальной связи (2) (а, с), отражающей связи (3) (б, д) и нелокальной с диагональной связи (4) (е, е) при плавном увеличении параметра силы связи с $\sigma = 0$ до $\sigma = 0.3$ (а–в) и при его плавном уменьшении с $\sigma = 1$ до $\sigma = 0.3$ (с–е). Диапазон связи $R = 120$

Fig. 3. Snapshots $x_i(t)$ for nonlocal coupling (2) (a, d); reflecting coupling (3) (b, e); and nonlocal with diagonal coupling (4) (c, f) when the coupling strength slowly increases from $\sigma = 0$ to $\sigma = 0.3$ (a–c) and slowly decreases from $\sigma = 1$ to $\sigma = 0.3$ (d–f). The coupling range is $R = 120$

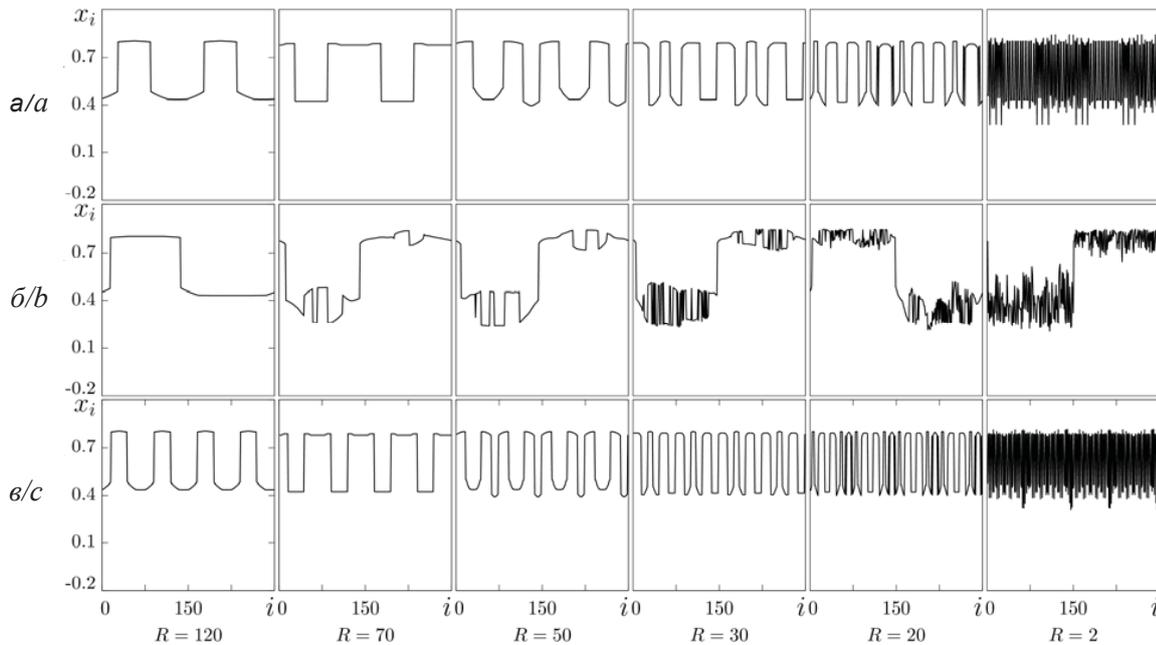


Рис. 4. Мгновенные снимки $x_i(t)$ для нелокальной связи (2) (а), отражающей связи (3) (б) и нелокальной с диагональной связи (4) (с) при уменьшении параметра R при значении параметра силы связи $\sigma = 0.3$

Fig. 4. Snapshots $x_i(t)$ for nonlocal coupling (2) (a); reflecting coupling (3) (b); and nonlocal with diagonal coupling (4) (c) when the parameter R decreases at the coupling strength $\sigma = 0.3$



состояния и их количество также увеличивается до тех пор, пока при $R = 2$ система не переходит в некогерентный режим. Что примечательно, пространственный период сохраняется для всех наблюдаемых структур в случае отражающей связи. Даже в некогерентном случае при $R = 2$ наблюдаются два отличных друг от друга некогерентных кластера. Такое поведение предположительно связано с особым типом симметрии этой топологии.

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix}; \quad t \in [0; T]; \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}_i) = \begin{pmatrix} f_x(x_i, y_i) \\ f_y(x_i, y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_i + x_i^3/3 - y_i)/\varepsilon \\ \gamma x_i - y_i - \beta \end{pmatrix},$$

а связь определяется следующим образом:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = \begin{pmatrix} g_x(x_j, y_j, x_i, y_i) \\ g_y(x_j, y_j, x_i, y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j - x_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

в соответствии с (1). Зафиксируем управляющие параметры парциальных систем ($\gamma = 0.7, \beta = 0.001, \varepsilon = 0.2$) и будем изменять только параметры связи σ, R . Начальные условия выбирались случайными в диапазонах: $x_i^0 \in [-1; 1], y_i^0 \in [-1; 1]$ время установления было выбрано равным 1000 единицам времени, а пространственно-временные диаграммы после этого рассчитывались на 40 единицах времени, т.е. $T = 1040$, интегрирование выполнялось методом Гюна, методом второго порядка с шагом 0.001. Количество осцилляторов в кольце $N = 300$. Проведенные численные исследования для разных

3. Кольцо связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо

Рассмотрим теперь в качестве парциального элемента кольца осциллятор ФитцХью–Нагумо, находящийся в режиме бистабильности. Режим выбран из-за возможности реализации структур с сосуществованием колебательного режима в некоторых кластерах и отсутствия колебаний в остальных осцилляторах. Будем рассматривать кольцо осцилляторов с диффузионной связью. Тогда

типов топологии связи (рис. 5) показали, что, так же, как и для модели связанных логистических отображений, добавление диагональной связи в кольцо связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо качественно не влияет на его свойства (рис. 5, а, в). Тогда как введение отражающей связи заметно изменяет карту режимов на плоскости (σ, R) (рис. 5, б). С одной стороны, на плоскости параметров σ, R уменьшается область В, в которой могут наблюдаться стоячие волны. В случае отражающей связи они наблюдаются только при достаточно малых значениях параметра нелокальности связи R . С другой стороны, вообще не реализуются бегущие волны (рис. 5, б), которые реализуются в случаях нелокальной и нелокальной с диагональной связью (область С на рис. 5, а, в).

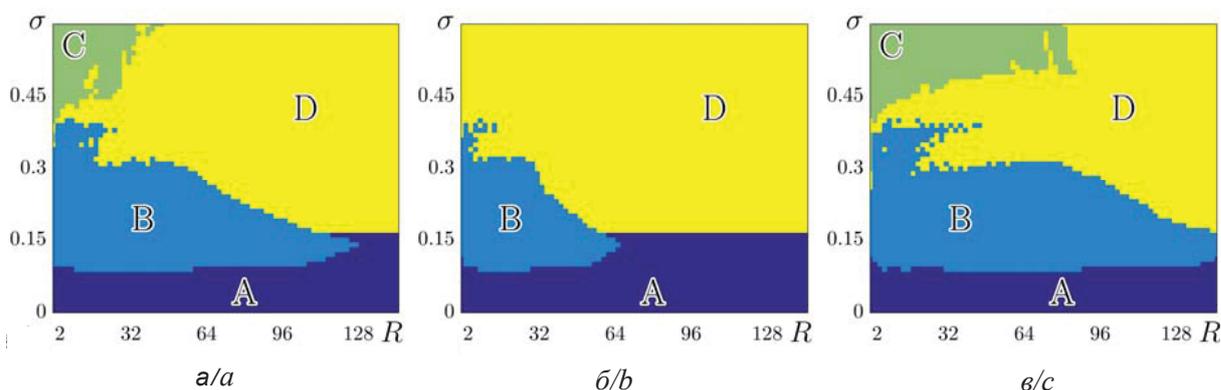


Рис. 5. Карты режимов для кольца связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо в случае нелокальной связи (а), отражающей связи (б) и нелокальной с диагональной связью (в) на плоскости параметров (σ, R). В области А наблюдаются замороженные структуры с нерегулярным распределением между двумя положениями равновесия, в области D наблюдаются замороженные синхронизованные структуры, В и С – области существования стоячих и бегущих волн соответственно

Fig. 5. Regime maps on the (σ, R) parameter plane for the ring of coupled FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal coupling (a), reflecting coupling (b), and nonlocal with diagonal coupling (c). There are frozen structures with an irregular distribution between two steady states in area A, synchronized frozen structures are observed in region D, B and C are the areas of existence of standing and travelling waves, respectively



При малых значениях силы связи вне зависимости от топологии связи наблюдаются замороженные пространственно-временные структуры (рис. 6, режимы соответствуют области А на рис. 5). Эти режимы характеризуются нерегулярным распределением осцилляторов между двумя положениями равновесия, обусловленным случайным распределением начальных состояний x_i^0, y_i^0 . При увеличении параметра σ в случае любой топологии при достаточно малом параметре нелокальности R в кольце осцилляторов ФитцХью–Нагумо наблюдаются стоячие волны (рис. 7; режимы соответствуют области В на рис. 5). Режим характеризуется наличием периодических колебаний в некоторых неподвижных

кластерах при отсутствии колебаний в остальных осцилляторах. Отметим, что сами парциальные элементы были выбраны в режиме бистабильности, т.е. в отсутствие колебаний, и наблюдаемые колебания реализуются именно под действием связи между элементами кольца. Режимы на рис. 7 качественно схожи, но, в зависимости от топологии связи, может изменяться длина волны в пространстве. При дальнейшем увеличении силы связи, вне зависимости от топологии связи, все осцилляторы демонстрируют одинаковый режим равновесия (рис. 8; режимы соответствуют области D на рис. 5). Этот режим отличается от режима в области А тем, что все осцилляторы находятся в одном из двух возможных состояний

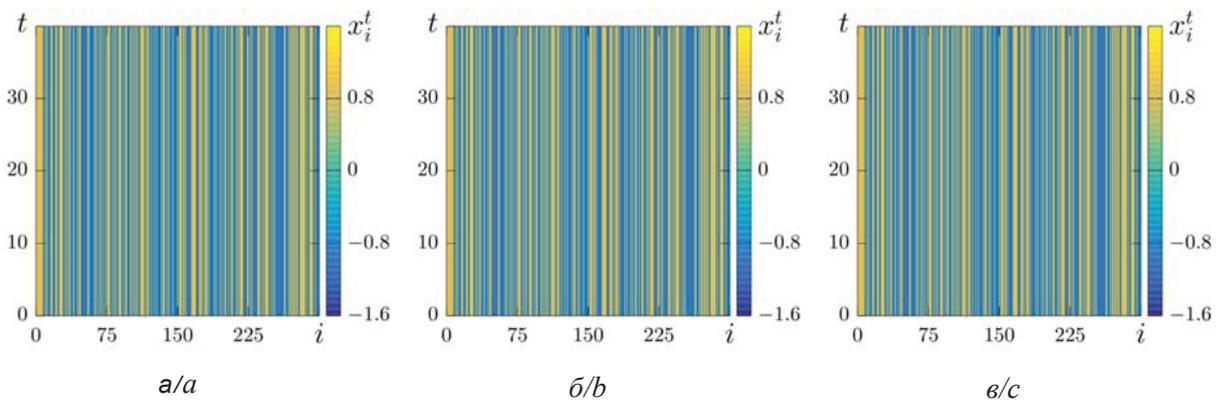


Рис. 6. Пространственно-временные диаграммы амплитуд x_i^t осцилляторов ФитцХью–Нагумо в случае нелокальной связи (а), отражающей связи (б) и нелокальной с диагональной связью (в) при $R = 30, \sigma = 0.05$, полученные с одинаковых начальных условий x_i^0

Fig. 6. Spatio-temporal diagrams of the amplitudes x_i^t of the FitzHugh–Nagumo oscillators in case of nonlocal coupling (a), reflecting coupling (b), and nonlocal with diagonal coupling (c) at $R = 30, \sigma = 0.05$. The structures are obtained using the same initial conditions x_i^0

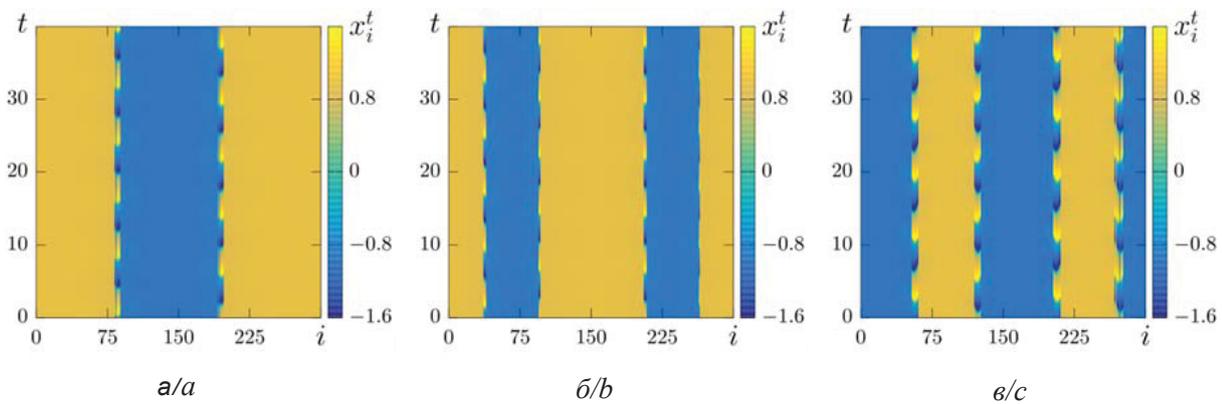


Рис. 7. Пространственно-временные диаграммы амплитуд x_i^t осцилляторов ФитцХью–Нагумо в случае нелокальной связи (а), отражающей связи (б) и нелокальной с диагональной связью (в) при $R = 30, \sigma = 0.2$

Fig. 7. Spatio-temporal diagrams of the amplitudes x_i^t of the FitzHugh–Nagumo oscillators in case of nonlocal coupling (a), reflecting coupling (b), and nonlocal with diagonal coupling (c) at $R = 30, \sigma = 0.2$



равновесия. Под действием связи все осцилляторы оказываются в одном из состояний равновесия, несмотря на то, что начальное распределение их состояний подразумевало их принадлежность разным состояниям равновесия. Наконец, при достаточно больших значениях силы связи σ , кольцо связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо может демонстрировать режим бегущих волн в случаях нелокальной связи и нелокальной

с диагональной связи. Этот режим отличается от режима, наблюдаемого в области В только тем, что структуры движутся вдоль кольца с некоторой скоростью. В случае же отражающей связи режим бегущих волн не наблюдается (рис. 9; режимы на рис. 9, а, в соответствуют области С на рис. 5, а, в). Это предположительно обусловлено тем, что осевая симметрия отражающей связи не допускает существования бегущих волн.

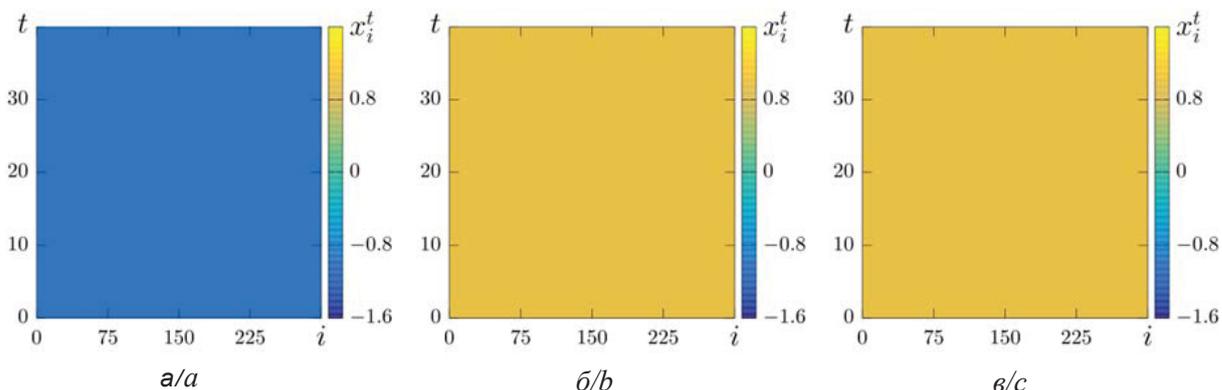


Рис. 8. Пространственно-временные диаграммы амплитуд x_i^t осцилляторов ФитцХью–Нагумо в случае нелокальной связи (а), отражающей связи (б) и нелокальной с диагональной связи (в) при $R = 30, \sigma = 0.35$

Fig. 8. Spatio-temporal diagrams of the amplitudes x_i^t of the FitzHugh–Nagumo oscillators in case of nonlocal coupling (a), reflecting coupling (b), and nonlocal with diagonal coupling (c) at $R = 30, \sigma = 0.35$

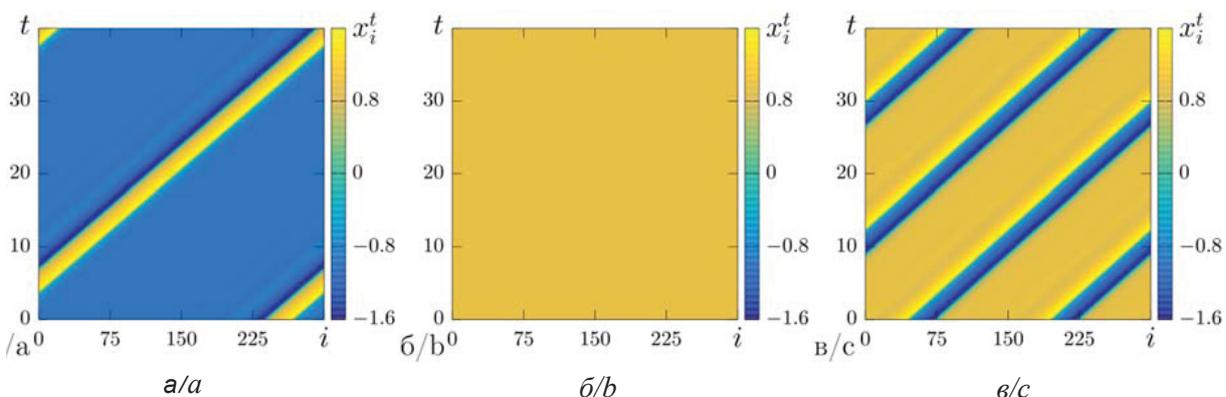


Рис. 9. Пространственно-временные диаграммы амплитуд x_i^t осцилляторов ФитцХью–Нагумо в случае нелокальной связи (а), отражающей связи (б) и нелокальной с диагональной связи (в) при $R = 30, \sigma = 0.6$

Fig. 9. Spatio-temporal diagrams of the amplitudes x_i^t of the FitzHugh–Nagumo oscillators in case of nonlocal coupling (a), reflecting coupling (b), and nonlocal with diagonal coupling (c) at $R = 30, \sigma = 0.6$

Таким образом, добавление диагональной связи в кольцо осцилляторов ФитцХью–Нагумо качественно не изменяет поведение ансамбля. Введение же отражающей связи приводит к исчезновению бегущих волн и уменьшению области существования стоячих волн (рис. 5).

4. Кольцо связанных моделей Курбажа–Некоркина

Рассмотрим кольцо связанных моделей Курбажа–Некоркина с диффузионной связью. Модель представляет собой двумерное отображение. Для кольца связанных моделей Курбажа–Некоркина



$$\hat{\mathbf{u}}_i = \begin{pmatrix} x_i^{t+1} \\ y_i^{t+1} \end{pmatrix}, t = 1, 2, \dots, T;$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_i) = \begin{pmatrix} f_x(x_i^t, y_i^t) \\ f_y(x_i^t, y_i^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i^t + x_i^t(x_i^t - \alpha)(1 - x_i^t) - y_i^t - \beta H(x_i^t - d) \\ y_i^t + \varepsilon(x_i^t - J) \end{pmatrix},$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, и связь определяется следующим образом:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = \begin{pmatrix} g_x(x_j^t, y_j^t, x_i^t, y_i^t) \\ g_y(x_j^t, y_j^t, x_i^t, y_i^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j^t - x_i^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

в соответствии с (1); x_i^t – быстрая, а y_i^t – медленная динамическая переменная, медленное изменение переменной y_i^t задается малым значением параметра $\varepsilon \in [0.001: 0.005]$. Слагаемое J управляет уровнем деполяризации мембраны ($J < d$). Параметры $\beta > 0$ и $d > 0$ определяют порог возбуждения взрывных колебаний (burst oscillations). Зафиксируем параметры отдельного отображения $\alpha = 0.27$, $\beta = 0.04$, $J = 0.15$, $d = 0.5$, $\varepsilon = 0.003$ установим радиус связи $R = 200$ и будем изменять только силу связи σ и топологию связи. В этом режиме наблюдаются спайковые колебания, а взрывные колебания отсутствуют. Данный режим выбран ввиду его простоты по сравнению с переключающимися и взрывными колебаниями. Последние также могут представлять интерес, но не рассматривались в рамках настоящей работы. Начальные условия выбираем случайно равномерно распределенными в соответствующих интервалах: $x_i^0 \in [-0.2: 0.4]$, $y_i^0 \in [-0.02: 0.04]$ режим считаем установившимся после $1 \cdot 10^6$ итераций, т.е. $T = 1 \cdot 10^6 + 500$, количество отображений $N = 1000$.

При очень малом значении параметра силы связи σ (рис. 10, а–в) кольцо демонстрирует нерегулярное поведение, при увеличении до значения $\sigma = 0.01$ в системе наблюдается множество уединенных состояний, равномерно распределенных по всему кольцу (рис. 10, г–е). Наконец, при достаточно больших значениях силы связи кольцо демонстрирует режим полной синхронизации (рис. 10, ж–и). На рис. 10 приведены режимы, одинаково наблюдаемые при любой из рассматриваемых топологий связей. Но переход от некогерентности к химерной структуре осуществляется по-разному при различной топологии связи. В случаях нелокальной и отражающей типов связей с увеличением силы связи увеличивается количество когерентных осцилля-

торов за счет расширения области когерентности (рис. 11), а в случае нелокальной с диагональной связи происходит резкий скачок от некогерентности к химерной структуре, сосуществующей с уединенными состояниями (рис. 12, в).

Заключение

Результаты численного эксперимента показали, что изменение топологии связи приводит к заметным изменениям в пространственно-временном поведении системы. Один из эффектов состоит в том, что изменяется количество ядер некогерентности при сохранении общего количества осцилляторов в некогерентных областях. Такое поведение свойственно кольцу логистических отображений при больших значениях силы связи σ и диапазона связи R . Так, в случае отражающей связи наблюдается одна область некогерентности, в случае нелокальной – две, а в случае добавления диагональной связи к нелокальной наблюдаются четыре области некогерентности. Кроме того, кольцо осцилляторов ФитцХью–Нагумо при достаточно большой силе связи σ и небольших значениях диапазона связи демонстрирует подобный эффект. В случае нелокальной связи, например, наблюдаются две области колебаний в то время, когда амплитуды остальных осцилляторов остаются неизменными. В случае отражающей связи, как и при добавлении диагональной связи к нелокальной, количество областей присутствия колебаний удваивается. В кольце связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо в случае нелокальной связи в достаточно большой области параметров наблюдаются бегущие волны. В работе показано, что бегущие волны перестают реализовываться с введением отражающей связи, тогда как продолжают существовать при добавлении диагональной связи. Переход от когерентности к некогерентности характеризуется увеличением количества уединенных состояний для кольца логистических отображений и для кольца моделей Курбажа–Некоркина. В случае отражающей связи в кольце логистических отображений, кроме увеличения количества уединенных состояний, появляются

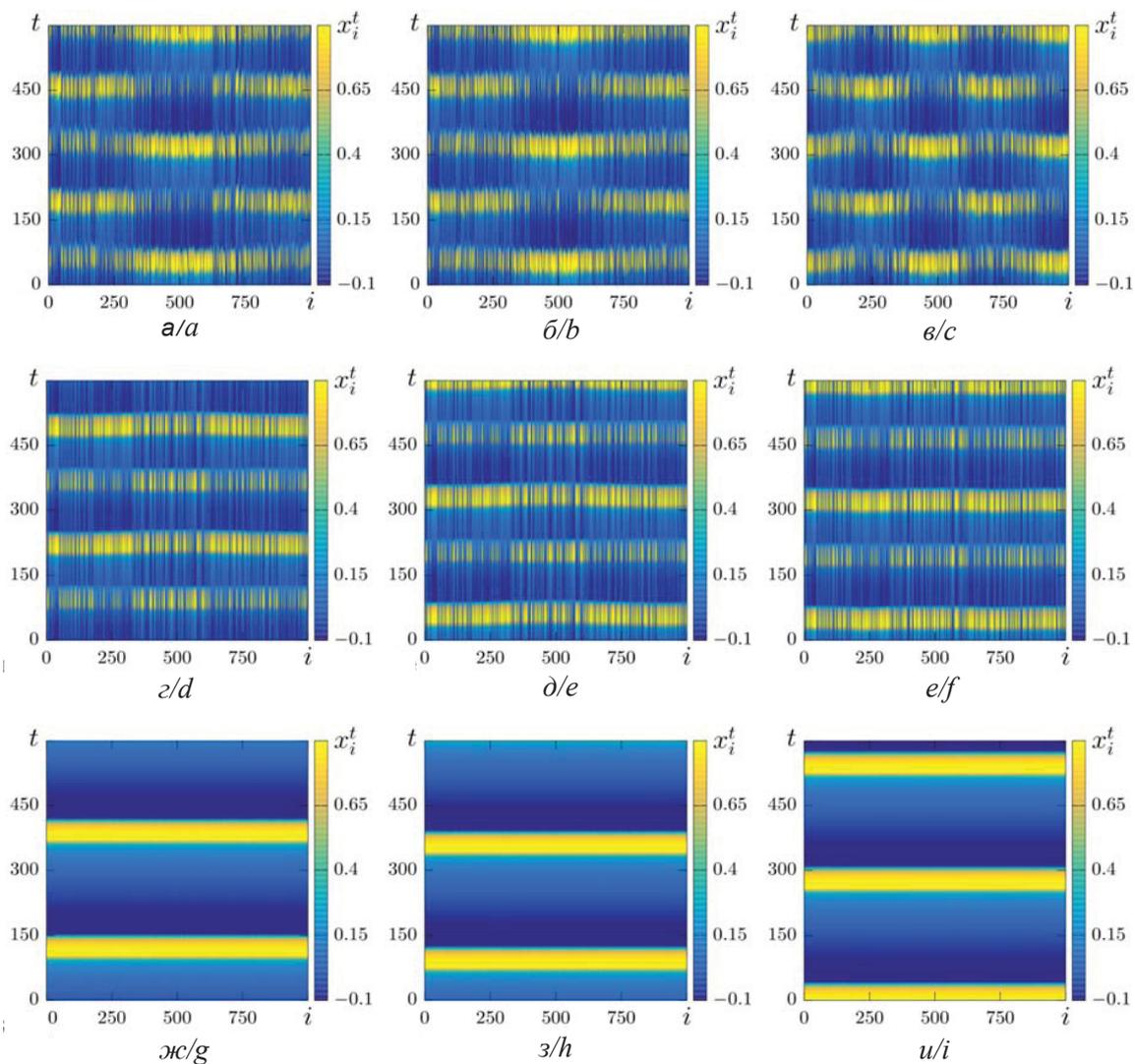


Рис. 10. Пространственно-временные диаграммы амплитуд x_i^t кольца связанных моделей Курбаде–Некоркина в случае нелокальной (a, d, g), отражающей (b, e, h) и нелокальной с диагональной (c, f, i) связей при $R = 200$ и $\sigma = 0.0001$ ($a-c$); $\sigma = 0.01$ ($d-f$); $\sigma = 0.025$ (g, h) и $\sigma = 0.04$ (i)

Fig. 10. Spatio-temporal diagrams of the amplitudes x_i^t of the ring of coupled Courbade–Nekorkin models in case of nonlocal (a, d, g), reflecting (b, e, h), and nonlocal with diagonal (c, f, i) coupling at $R = 200$, and $\sigma = 0.0001$ ($a-c$); $\sigma = 0.01$ ($d-f$); $\sigma = 0.025$ (g, h); and $\sigma = 0.04$ (i)

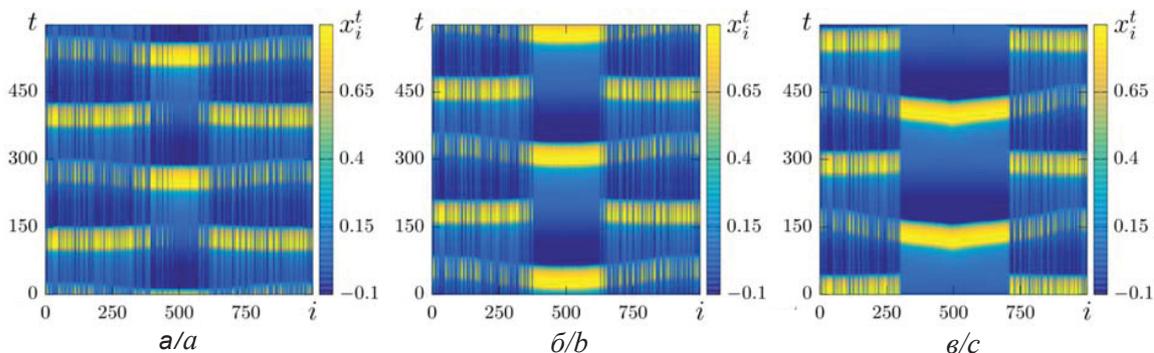


Рис. 11. Пространственно-временные диаграммы амплитуд x_i^t кольца связанных моделей Курбаде–Некоркина в случае отражающей связи при $R = 200$ и $\sigma = 0.0145$ (a); $\sigma = 0.015$ (b); $\sigma = 0.02$ (c)

Fig. 11. Spatio-temporal diagrams of the amplitudes x_i^t of the ring of coupled Courbade–Nekorkin models in case of reflecting coupling at $R = 200$, and $\sigma = 0.0145$ (a); $\sigma = 0.015$ (b); $\sigma = 0.02$ (c)

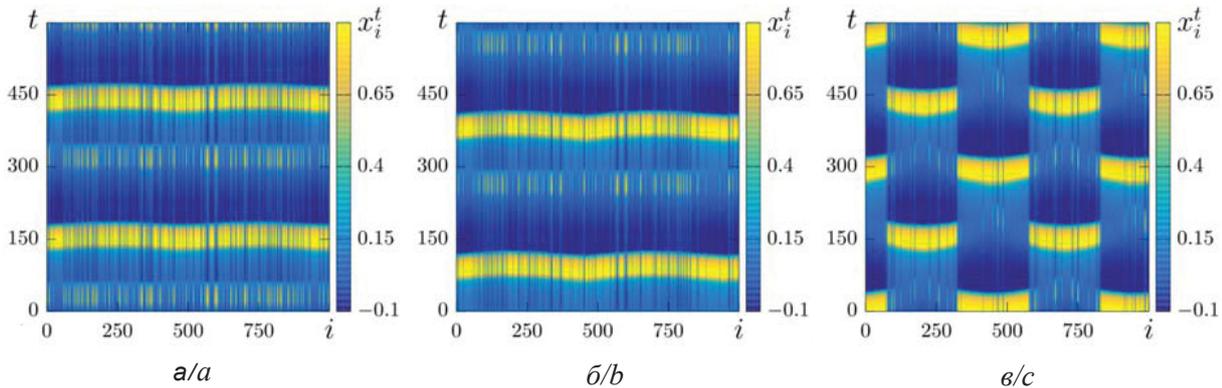


Рис. 12. Пространственно-временные диаграммы амплитуд x_i^t кольца связанных моделей Курбажа–Некоркина в случае добавления диагональной связи к нелокальной при $R = 200$ и $\sigma = 0.03$ (а); $\sigma = 0.035$ (б); $\sigma = 0.0382$ (в)
 Fig. 12. Spatio-temporal diagrams of the amplitudes x_i^t of the ring of coupled Courbade–Nekorkin models when diagonal coupling is added to nonlocal coupling at $R = 200$, and $\sigma = 0.03$ (a); $\sigma = 0.035$ (b); $\sigma = 0.0382$ (c)

разрывы в пространственном профиле. Кольцо моделей Курбажа–Некоркина демонстрирует следующее отличие в поведении при добавлении диагональной связи: химерная структура при переходе от некогерентности к когерентности сосуществует с уединенными состояниями, тогда как в случаях нелокальной связи или отражающей связи существует диапазон по параметру связи, в котором, в свою очередь, существуют только химерные состояния без уединенных состояний.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Немецкого Физического Общества (проект 163436311-SFB 910). В.С.А. благодарит за финансовую поддержку РФФИ и DFG (проект № 20-52-12004, получение результатов, написание текста). А.В.Б. благодарит за финансовую поддержку РФФИ (проект № 19-32-90005, анализ результатов).

Список литературы

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Non-linear Phenom. Complex Syst. 2002. Vol. 5. P. 380–385.
2. Kuramoto Y., Shima S.-i. Rotating spirals without phase singularity in reaction-diffusion systems // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2003. Vol. 150. P. 115–125. DOI: 10.1143/PTPS.150.115
3. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
4. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators // Int. J. Bifurc. Chaos. 2016. Vol. 16, № 01. P. 21–37. DOI: 10.1142/S0218127406014551

5. Hizanidis J., Kanas V. G., Bezerianos A., Bountis T. Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh–Rose neuron models // Int. J. Bifurc. Chaos. 2014. Vol. 24, № 03. P. 1450030. DOI: 10.1142/S0218127414500308
6. Hizanidis J., Panagakou E., Omelchenko I., Schöll E., Hövel P., Provata A. Chimera states in population dynamics : Networks with fragmented and hierarchical connectivities // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92, iss. 1. P. 012915. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.012915
7. Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117, iss. 1. P. 014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102
8. Schöll E. Synchronization patterns and chimera states in complex networks : Interplay of topology and dynamics // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2016. Vol. 225, iss. 6–7. P. 891–919. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02646-3
9. Tian C.-H., Zhang X.-Y., Wang Z.-H., Liu Z.-H. Diversity of chimera-like patterns from a model of 2D arrays of neurons with nonlocal coupling // Front. Phys. 2017. Vol. 12. P. 128904. DOI: 10.1007/s11467-017-0656-z
10. Wu Z.-M., Cheng H.-Y., Feng Y., Li H.-H., Dai Q.-L., Yang J.-Z. Chimera states in bipartite networks of FitzHugh–Nagumo oscillators // Front. Phys. 2017. Vol. 13. P. 130503. DOI: 10.1007/s11467-017-0737-z
11. Bera B. K., Majhi S., Ghosh D., Perc M. Chimera states: Effects of different coupling topologies // Eur. Lett. 2017. Vol. 118, № 1. P. 10001. DOI: 10.1209/0295-5075/118/10001
12. Tsigkri-DeSmedt N. D., Hizanidis J., Schöll E., Hövel P., Provata A. Chimeras in leaky integrate-and-fire neural networks : effects of reflecting connectivities // Eur. Phys. J. B. 2017. Vol. 90. P. 139. DOI: 10.1140/epjb/e2017-80162-0
13. Tsigkri-DeSmedt N. D., Koulierakis I., Karakos G., Provata A. Synchronization patterns in LIF neuron networks : merging nonlocal and diagonal connectivity // Eur. Phys. J. B. 2018. Vol. 91. P. 305. DOI: 10.1140/epjb/e2018-90478-8



14. Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Díaz-Guilera A., Antonopoulos C. G. Chimera-like states in modular neural networks // *Sci. Rep.* 2016. Vol. 6. P. 19845. DOI: 10.1038/srep19845

15. Некоркин В., Вдовин Л. Дискретная модель нейронной активности // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, № 5. P. 36–60.

Образец для цитирования:

Бух А. В., Косенкова А. С., Анищенко В. С. Отражающая, нелокальная и диагональная связи в сетях связанных динамических элементов различной природы // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика.* 2020. Т. 20, вып. 1. С. 16–28. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-1-16-28>

Reflecting, Nonlocal, and Diagonal Coupling Topologies in Networks of the Coupled Dynamics Elements with Various Nature

A. V. Bukh, A. S. Kosenkova, V. S. Anishchenko

Andrei V. Bukh, <https://orcid.org/0000-0002-4786-6157>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, buh.andrey@yandex.ru

Anastasia S. Kosenkova, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, nas.kosenkova@yandex.ru

Vadim S. Anishchenko, <https://orcid.org/0000-0003-2255-1498>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, wadim@info.sgu.ru

Backgrounds and Objectives: Networks of coupled dynamical oscillators are of high interest for last decades. The interest to their dynamics greatly increases with the discovery of chimera states. The latter are characterized by the coexistence of regions with coherent and incoherent behavior. There are many works devoted to the networks with nonlocal coupling topology, but the influence of the coupling topology type has not been sufficiently studied. In this paper we consider recently proposed reflecting and diagonal topologies of coupling and compare them with the nonlocal coupling. The issue addressed in the paper is of great interest and importance because of the topological correspondence to biological neuron networks. Logistic maps, FitzHugh-Nagumo oscillators, and Courbage-Nekorkin models are selected as partial subsystems in networks. **Materials and Methods:** The numerical analysis is carried out using a program complex in C++ which was developed for modeling dynamical systems with different topologies of coupling. Snapshots of amplitudes of oscillators and spatio-temporal diagrams are used to diagnose the dynamical regimes. **Results:** Numerical results have shown that a number of incoherent areas of chimera states varies when the coupling topology changes. In addition, the features of the transition from the incoherence regime to the completely synchronized state with increasing coupling strength depend on the choice of coupling topology. It is shown that a certain type of waves, namely, travelling waves, cannot be realized in the case of reflecting coupling. **Conclusion:** The performed studies have indicated that the coupling topology can affect the behavior of the networks. There is a possibility to obtain different regimes by choosing different topologies of coupling. Herewith, the coupling strength value for chimera states is preserved as the coupling topology changes.

Keywords: chimera state, solitary state, travelling wave, nonlocal coupling, reflecting coupling, diagonal coupling.

Received: 31.10.2019 / Accepted: 05.12.2019 /

Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This work was funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) – Projektnummer 163436311-SFB 910. V.S.A. thanks for the financial support provided by RFBR and DFG according to the research project No. 20-52-12004 (obtaining results, writing the manuscript), A.V.B. thanks for the financial support provided by RFBR, project No. 19-32-90005 (analysis of the results).

References

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenom. Complex Syst.*, 2002, vol. 5, pp. 380–385.
2. Kuramoto Y., Shima S.-i. Rotating spirals without phase singularity in reaction-diffusion systems. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 2003, vol. 150, pp. 115–125. DOI: 10.1143/PTPS.150.115
3. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, pp. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
4. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators. *Int J Bifurc Chaos*, 2016, vol. 16, no. 01, pp. 21–37. DOI: 10.1142/S0218127406014551
5. Hizanidis J., Kanas V. G., Bezerianos A., Bountis T. Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh–Rose neuron models. *Int J Bifurc Chaos*, 2014, vol. 24, no. 03, pp. 1450030. DOI: 10.1142/S0218127414500308
6. Hizanidis J., Panagakou E., Omelchenko I., Schöll E., Hövel P., Provata A. Chimera states in population dynamics: Networks with fragmented and hierarchical connectivities. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, iss. 1, pp. 012915. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.012915



7. Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, vol. 117, iss. 1, pp. 014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102
8. Schöll E. Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2016, vol. 225, iss. 6–7, pp. 891–919. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02646-3
9. Tian C.-H., Zhang X.-Y., Wang Z.-H., Liu Z.-H. Diversity of chimera-like patterns from a model of 2D arrays of neurons with nonlocal coupling. *Front. Phys.*, 2017, vol. 12, pp. 128904. DOI: 10.1007/s11467-017-0656-z
10. Wu Z.-M., Cheng H.-Y., Feng Y., Li H.-H., Dai Q.-L., Yang J.-Z. Chimera states in bipartite networks of FitzHugh–Nagumo oscillators. *Front. Phys.*, 2017, vol. 13, pp. 130503. DOI: 10.1007/s11467-017-0737-z
11. Bera B. K., Majhi S., Ghosh D., Perc M. Chimera states: Effects of different coupling topologies. *Eur. Lett.*, 2017, vol. 118, no. 1, pp. 10001. DOI: 10.1209/0295-5075/118/10001
12. Tsigkri-DeSmedt N. D., Hizanidis J., Schöll E., Hövel P., Provata A. Chimeras in leaky integrate-and-fire neural networks: effects of reflecting connectivities. *Eur. Phys. J. B.*, 2017, vol. 90, pp. 139. DOI: 10.1140/epjb/e2017-80162-0
13. Tsigkri-DeSmedt N. D., Koulirakis I., Karakos G., Provata A. Synchronization patterns in LIF neuron networks: merging nonlocal and diagonal connectivity. *Eur. Phys. J. B.*, 2018, vol. 91, pp. 305. DOI: 10.1140/epjb/e2018-90478-8
14. Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Díaz-Guilera A., Antonopoulos C. G. Chimera-like states in modular neural networks. *Sci. Rep.*, 2016, vol. 6, pp. 19845. DOI: 10.1038/srep19845
15. Nekorkin V., Vdovin L. Map-based model of the neural activity. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 15, no. 5, pp. 36–60 (in Russian).

Cite this article as:

Bukh A. V., Kosenkova A. S., Anishchenko V. S. Reflecting, Nonlocal, and Diagonal Coupling Topologies in Networks of the Coupled Dynamics Elements with Various Nature. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 16–28 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2020-20-1-16-28>
